Vance

Algebra y trigonometría

ADDISON WESLEY IBEROAMERICANA

CHICO MISTERIOSO
EST ACA

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

ELBRIDGE P. VANCE
Oberlin College

Versión en español por el

DR. ALBERTO SAENGER
Instituto de Matemática
Universidad Católica de Chile

SEGUNDA EDICION ESPAÑOLA

ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA
Argentina • Brasil • Chile • Colombia • Ecuador • España
Estados Unidos • México • Perú • Puerto Rico • Venezuela

Versión en español de la tercera edición de la obra *Modern Algebra and Trigonometry*, de Elbridge P. Vance y Thomas F. Banchoff, publicada originalmente en inglés por Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, E.U.A. © 1983.

Esta edición en español es la única autorizada.

Impreso en Estados Unidos. *Printed in U.S.A.*

ISBN 0-201-08043-5
12 13 14 15 16 17 18–AL–96 95 94 93 92

Nota editorial

La gran aceptación obtenida por la primera edición de esta obra nos ha motivado a emprender la preparación de la presente segunda edición española de la misma, a la cual se han incorporado todos los cambios y mejoras introducidos en la segunda y tercera ediciones del texto original en inglés.

Durante el lapso de tiempo transcurrido desde la publicación de la edición anterior, en el cual más de 50.000 estudiantes hispanoamericanos la han empleado ventajosamente en su preparación básica, los programas de los cursos a los cuales corresponde este texto han sufrido diversas modificaciones, que van desde un enfoque moderado en la presentación axiomática de estos temas a un tratamiento axiomático acentuado, dejando de lado las aplicaciones concretas.

A pesar de todos estos cambios, estamos convencidos de que existe la necesidad de un texto equilibrado que combine estos aspectos fundamentales: preparar al estudiante para reconocer a la Matemática como sistema lógico deductivo y proporcionarle una agilidad operatoria que le permita interpretar en forma concreta el primer aspecto y asegurar la aplicación de dichos conceptos a la resolución de problemas de aplicación práctica.

La presente obra del profesor Vance cumple con ambos aspectos. Y en el transcurso del tiempo — a través del consenso de aquellos que la han utilizado en su primera edición bilingüe — se ha consagrado como libro de texto clásico en las materias que trata.

Fondo Educativo Interamericano tiene el agrado de presentar en español esta segunda edición ampliada y mejorada de *Algebra y trigonometría,* con la confianza de que recibirá una buena acogida por parte de los docentes y estudiantes de habla hispana.

Prólogo

En el prólogo a la primera edición de *Algebra y trigonometría*, el autor expresaba que los dos objetivos básicos de esta obra eran educar al estudiante en la naturaleza de la Matemática considerada como sistema lógico, haciendo hincapié en que el alumno debe captar la importancia de las definiciones precisas, la necesidad de plantear explícitamente las hipótesis y el hecho de que todo sistema matemático consta de estas definiciones e hipótesis, junto con los resultados deducidos mediante un razonamiento lógico. El segundo objetivo puede expresarse en forma bien específica: consiste en una presentación unificada de los conceptos básicos del Algebra y de la Trigonometría, junto con una sólida fundamentación para ambas. Tal materia es fundamental en la preparación de cualquier estudiante, tanto para el que piensa continuar estudiando Matemática, Ciencias Naturales o Ingeniería como para aquel cuyo interés son las Ciencias Sociales o la Economía. Una vez que domine las materias contenidas en esta obra, el alumno debe estar bien preparado para estudiar Lógica Matemática, Matemática Finita, Estadística y Probabilidades, o bien continuar con el Cálculo y la Geometría Analítica.

La intención del autor fue la de escribir un texto versátil que pudiera usarse en toda la gama que va desde un curso de un semestre, que cubra sólo lo mínimo esencial, hasta un curso de un año completo. El alumno de secundaria con una preparación promedio no debiera tener dificultades con estas materias, pudiendo reducirse el número de horas de clase del curso si la preparación del estudiante es más sólida.

La elección de temas, con la integración del Algebra y la Trigonometría donde ello parezca natural; la proporción de tiempo dedicada a cada uno y el tratamiento lógico a lo largo de toda la obra, tienen por objeto hacer resaltar el punto de vista moderno. Los problemas al final de cada sección forman parte integral del libro, no sólo contribuyen a dar unidad a la materia sino que con frecuencia conllevan conceptos importantes y teoremas a los que se hace referencia más adelante. Tales problemas, necesarios para la continuidad de la exposición, van precedidos de un triángulo y deberán ser estudiados en todos los casos. Al final del libro aparecen las respuestas a los problemas con numeración impar y se incluyen tablas de potencias y raíces, así como también tablas a cuatro decimales para funciones circulares, logaritmos y logaritmos de las funciones circulares.

En esta nueva edición el autor ha tratado de mantener el enfoque y el estilo

original de este texto, empleado con éxito por tantos profesores y alumnos. Al mismo tiempo, ha hecho algunos cambios que reflejan las sugerencias recibidas de quienes lo han utilizado. Los principales cambios incorporados son los siguientes:

— Toda la materia introductoria que se refiere a conjuntos se trata en forma concisa en el capítulo 1.
— Las propiedades de los números se tratan en el capítulo 2, donde proporcionan una motivación adicional y una ilustración sobre el desarrollo de los números reales como un sistema deductivo.
— En el capítulo 4 se ha modificado el tratamiento de desigualdades y se ha incluido un breve acápite sobre la pendiente de una recta, como una ilustración del empleo de los sistemas de coordenadas.
— El capítulo correspondiente a los números complejos es ahora el 7 en vez del 14, con el fin de que el estudiante tenga estos conocimientos previos al abordar los temas de ecuaciones cuadráticas y polinomiales.
— En el capítulo 9 se ha incluido un tratamiento novedoso y detallado sobre matrices, así como también una breve introducción a los vectores, puesto que se recomienda ampliamente la inclusión de ambos temas en cualquier enfoque moderno de la Matemática a este nivel, ya que constituyen una preparación previa excelente para cursos posteriores de Algebra Lineal.
— Como una característica adicional se han aumentado los problemas y se han agregado cinco juegos de problemas de repaso o globales, distribuidos en lugares adecuados del texto. Muchos de ellos han sido tomados del desarrollo previo de problemas en los cuales interviene posteriormente el Cálculo, algunos hacen hincapié en la operatoria y otros tratan aspectos más abstractos.

En síntesis, el esfuerzo representado en esta nueva edición busca lograr que este texto sea cada vez más accesible y útil a los estudiantes del Algebra y de la Trigonometría.

Tanto FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO como el autor están muy agradecidos a todas las personas que, mediante sus comentarios y sugerencias, han contribuido a la aparición de esta nueva edición y esperan poder contar con tan valiosa participación en el futuro.

Indice general

ALGEBRA Y TRIGONOMETRIA

1

Conjuntos

Los procedimientos cuantitativos básicos de la ciencia comprenden las operaciones de contar y medir. Contar significa caracterizar una colección o conjunto de objetos mediante un numero, en tanto que medir es asignar un número a alguna propiedad de un objeto. Las nociones de «contar» y «medir», al igual que la de conjunto, distan de ser conceptos simples. Cada una de estas nociones ha sido objeto de muchos estudios en el campo de la metodologia científica. Lo importante para nosotros en el presente estudio es el hecho de que tanto «contar» como «medir» conducen a números, y mediante el uso de números y conjuntos es posible lograr una buena comprensión de los fenómenos de la naturaleza. Comenzaremos con una breve discusión sobre conjuntos y notación básica. En la sección 1.2 consideramos subconjuntos y números naturales (números para contar) y en la sección 1.3 estudiamos las operaciones con conjuntos.

1.1 Conjuntos y notación básica

La noción basica de conjunto, cuya importancia en matemáticas fue considerada por primera vez por Georg Cantor (1845-1918), es tan fundamental en las diferentes ramas de la materia que es imposible dar una definición precisa en función de conceptos más básicos. Sin embargo, esta noción es tan intuitiva que nos basaremos en nuestra experiencia para considerarla. Podemos considerar un conjunto como una colección (o agregado) de objetos de cualquier especie, con la restricción de considerar sólo a aquellos objetos que han sido descritos en forma lo suficientemente clara como para que no haya duda acerca de si un cierto objeto pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, podemos considerar como conjuntos:

(a) El conjunto de alumnos del primer año en tu Universidad.
(b) El conjunto de los alumnos de (a) cuyos apellidos comienzan por la letra V.
(c) El conjunto de los números naturales (números que se usan al «contar») desde 1 hasta 4.

(d) El conjunto de los autores de este libro.
(e) El conjunto de todos los estados de los Estados Unidos con una población inferior a los 10.000 habitantes.
(f) El conjunto de todas las rectas (de un plano) que pasan por un punto dado
(g) El conjunto de todos los puntos que están sobre una línea dada.
(h) El conjunto de todos los fósiles del mundo.
(i) El conjunto de letras de la palabra «Mississippi»

Si un objeto pertenece al conjunto, se dice que es un miembro o *elemento* del conjunto, de lo contrario, no es un elemento del conjunto. Para indicar pertenencia usamos el símbolo $\in$. Las letras mayúsculas se utilizan generalmente para denotar conjuntos y las minúsculas para denotar elementos. Así, si a es un objeto y A, un conjunto, escribimos $a \in A$ como abreviatura de «a es un elemento de A» o «a pertenece al conjunto A». Análogamente, escribimos $a \notin A$ para indicar que a no es un elemento de A.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. Si designamos por M el conjunto de las letras diferentes en la palabra «Mississippi», entonces $s \in M$ pero $t \notin M$. Si P es el conjunto de los números naturales pares, entonces $4 \in P$ pero $7 \notin P$. Si N designa el conjunto de los números naturales, entonces $7 \in N$ pero $0 \notin N$, $-2 \notin N$ y $\frac{1}{2} \notin N$.

Es importante tener una idea clara de lo que significa el que dos conjuntos sean iguales.

DEFINICIÓN 1.1. *Dos conjuntos A y B se dicen iguales si tienen exactamente los mismos elementos. En este caso escribimos $A = B$ y en caso contrario $A \neq B$.*

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. El conjunto M del ejemplo anterior es igual al de las letras diferentes de la palabra «imps», pero M no es igual al conjunto de las letras de la palabra «prisma», ya que r pertenece a este conjunto pero $r \notin M$. Si J es el conjunto de los números naturales desde 1 hasta 4 y K denota el conjunto cuyos elementos son 1, 4, 3 y 2, entonces $J = K$.

Se ve claramente por los ejemplos que los conjuntos pueden diferir tanto en la clase como en la cantidad de sus elementos. En general, decimos que un conjunto es *finito* si es posible escribir una lista completa de sus elementos; en caso contrario, decimos que es *infinito*. Los ejemplos (a), (b), (c), (d), (e), (h), (i) son finitos en tanto que (f) y (g) son infinitos. Un conjunto puede ser finito aunque sea muy «grande», tal como (h); puede constar de un solo elemento, como (d), o incluso no tener ninguno, como (e).

El uso de conjuntos en matemáticas elementales sirve para aclarar ciertas ideas, para simplificar algunos conceptos más o menos complicados y también para unificar los estudios de conceptos distintos pero relacionados entre sí. Teniendo esto presente, introducimos a continuación los dos métodos mas comunes para describir un conjunto, el *método por extensión* y el *método por comprensión*.

Método por extensión. Podemos determinar un conjunto haciendo una enumeración de sus elementos y encerrándolos en corchetes.

Método por comprensión. Podemos determinar un conjunto encerrando en corchetes una frase descriptiva, y conviniendo en que son elementos del conjunto aquellos objetos, y sólo ellos, que poseen la propiedad descrita.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. Podemos escribir $M = \{$letras diferentes en la palabra «*Mississippi*»$\}$, utilizando el método por comprensión, o bien poner $M = \{m, i, s, p\}$ usando el método por extensión.

El orden de enumeración de sus elementos no afecta al conjunto mismo; por tanto, $M = \{m, i, s, p\} = \{i, p, m, s\} = \{s, m, p, i\}$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4. Podemos escribir $F = \{1, 2, 3, 4\} = \{4, 2, 1, 3\} = \{$números naturales desde 1 hasta 4$\} = \{x | x$ es número natural menor que $5\}$. Una notación útil al describir un conjunto mediante el método por comprensión, es la última utilizada en la descripción de F. La barrita vertical significa «tal que».

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5. El conjunto $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ se puede describir: $D = \{x | x$ es un número natural par no mayor que $10\}$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6. Es imposible describir el conjunto $G = \{$puntos en una línea$\}$ mediante el método por extensión.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7. Sería difícil describir el conjunto $Z = \{$mi gato, la tierra, Pedro, Emilia$\}$ mediante el método por comprensión.

Debido a conjuntos como los recién indicados, deben usarse ambos métodos en la descripción de conjuntos.

En todo estudio sobre conjuntos es muy importante poder comparar los tamaños de diferentes colecciones de objetos. Esto se logra mediante uno de los grandes conceptos fundamentales de las matemáticas, el de la «correspondencia uno-a-uno» (o biunívoca).

DEFINICIÓN 1.2. *Se dice que existe una* correspondencia uno-a-uno *entre dos conjuntos* **A** *y* **B** *si es posible asociar los elementos de* **A** *con los de* **B** *de modo que a cada elemento de cada conjunto le corresponda exactamente un elemento del otro conjunto.*

Por ejemplo, casi todos los seres humanos pueden asociar los dedos de su mano izquierda con los de su mano derecha de modo que cada elemento quede asociado exactamente con otro elemento. En los precedentes ejemplos ilustrativos 3 a 7, existe esta correspondencia uno-a-uno entre los conjuntos M y F, F y Z y M y Z, pero no existe entre F y D o entre F y G.

DEFINICIÓN 1.3. *Se dice que dos conjuntos A y B son equivalentes si existe una correspondencia uno-a-uno entre sus elementos.*

Si dos conjuntos son iguales deben ser equivalentes, pero la proposición recíproca no es válida, ya que hay conjuntos tales como M y Z que son equivalentes pero no iguales.

Obsérvese que si A es equivalente a B y B es equivalente a C, entonces A es equivalente a C. Esto se denomina *propiedad transitiva de la equivalencia.*

Problemas

Utilícense ambos métodos, por extensión y por comprensión, para describir los conjuntos de los problemas 1 a 5.

1 Los hijos de los padres del lector.

2 Los números enteros positivos menores que 10.

3 Las fracciones de numerador 1 y cuyo denominador es un número entero positivo menor que 10.

4 Los dígitos usados en nuestro sistema decimal.

5 Los números enteros positivos múltiplos de 2 y menores que 20

Utilícese el método por comprensión para describir los conjuntos cuyos elementos se han enumerado en los problemas 6 a 11.

6 $H = \{2, 4, 6, 8\}$.

7 $S = \{1, 4, 9, 16, 25\}$.

8 $V = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$.

9 $J = \{1, 4, 7, 10, 13\}$.

10 $T = \{10, 100, 1000, 10\,000\}$.

11 $P = \{$Truman, Eisenhower, Kennedy, Johnson, Nixon$\}$

Utilícese el método por comprensión para describir los conjuntos indicados en los problemas 12 a 19, explicando además por qué el método por extensión es difícil o imposible de aplicar.

12 Los números enteros positivos mayores que 100

13 Los alumnos de su universidad que han estado en el extranjero

14 Los ciudadanos de un país que han leído la Constitución

15 Los libros de la biblioteca.

16 El conjunto de todos los triángulos de área menor que 3

17 Dése un ejemplo de un conjunto que tenga exactamente dos elementos; un elemento; ningún elemento; un número infinito de elementos.

18 Para cada uno de los conjuntos enumerados a continuación indíquese cuáles son finitos y cuáles infinitos. En el caso de los conjuntos finitos, indíquese además cuáles son equivalentes y cuáles son iguales.

(a) El conjunto de los dos primeros números positivos impares
(b) El conjunto de los números enteros positivos impares menores que 5
(c) El conjunto de todos los números enteros positivos impares
(d) El conjunto de las letras distintas en la palabra «Canadian»
(e) El conjunto de los puntos de una recta que se encuentran a distancia unitaria de un punto dado de la recta.

(f) El conjunto de los puntos de un plano dado que se encuentran a distancia unitaria de un punto dado del plano.
(g) El conjunto cuyos elementos son los números 1 y 3.

19 Para cada uno de los conjuntos que se indican, dígase cuáles son equivalentes y cuáles son iguales.

(a) Conjunto de las letras diferentes de la palabra «indian».
(b) Conjunto de las letras diferentes de la palabra «naid».
(c) Conjunto de las letras diferentes de la palabra «dain».
(d) Conjunto de las letras diferentes de la palabra «naidin».
(e) Conjunto de las letras diferentes de la palabra «tain»
(f) Conjunto de las letras diferentes de la palabra «retain».

20 Para cada uno de los conjuntos que se indican, dígase cuáles son equivalentes y cuáles son iguales.

(a) Conjunto de las letras diferentes de la palabra «anna».
(b) Conjunto $\{a, n, n, a\}$.
(c) Conjunto $\{a, n\}$.
(d) Conjunto de las letras diferentes de la palabra «an»

1.2 Subconjuntos y enumeración

Todo elemento del conjunto M de las letras diferentes en «Mississippi» es un elemento del conjunto L de las letras del alfabeto Asimismo, el conjunto P de los números naturales pares está incluido en el conjunto N de los números naturales. A continuación precisaremos esta noción.

Definición 1.4. *El conjunto A es un* subconjunto *del conjunto B si todo elemento de A es elemento de B.*

Dado que este concepto se emplea a menudo, es conveniente simbolizarlo por $A \subset B$, que se lee «A es un subconjunto de B» o «A está incluido en B». Así,

$$A \subset B \text{ si y sólo si } x \in A \text{ implica } x \in B.$$

Si existe un elemento de A que no está en B, entonces diremos que A no es subconjunto de B y escribimos $A \not\subset B$.

Ejemplo ilustrativo 1. Si L es el conjunto de las letras del alfabeto y $R = \{\text{letras diferentes en «prisma»}\}$, entonces $R \subset L$. También $M \subset R$, ya que cada letra de «Mississippi» es una letra de «prisma». Como $M \subset R$ y $R \subset L$, podemos concluir $M \subset L$. Esto ilustra la *propiedad transitiva de la inclusión de conjuntos.*

Ejemplo ilustrativo 2. El conjunto $S = \{s, m, i, p\}$ está incluido en M; de hecho, $S = M$. Todo conjunto A puede considerarse como subconjunto de sí mismo y podemos escribir $A \subset A$ para todo A; lo cual representa la *propiedad reflexiva de la inclusión de conjuntos.*

En este ejemplo podemos decir que $S \subset M$ y $M \subset S$ y concluir que M y S tienen exactamente los mismos elementos. De modo más general, si $A \subset B$ y $B \subset A$, se sigue que $A = B$; esta condición se usa a menudo como definición de la igualdad de conjuntos.

Si $A \subset B$ pero $B \not\subset A$, entonces existe al menos un elemento de B que no está en A. En este caso diremos que A es *subconjunto propio* de B.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. M es subconjunto propio de R, puesto que $M \subset R$, pero $r \in R$ y $r \notin M$, luego $P \not\subset M$. El conjunto P de los naturales pares es subconjunto propio del conjunto N de los números naturales puesto que $1 \in N$ pero $1 \notin P$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4. El conjunto C = {estados de los Estados Unidos cuyos nombres comienzan con la letra «C»} = {California, Colorado, Connecticut} es subconjunto propio del conjunto EU de todos los estados de los Estados Unidos. B = {estados cuyo nombre comienza con «B»} es también subconjunto de EU, puesto que todo elemento de B lo es también de EU. Pero B es el conjunto vacío, puesto que ningún estado cumple con la condición que define a B. Este conjunto vacío aparece con frecuencia en el álgebra moderna y se le representa por el símbolo $\emptyset$ (léase «conjunto vacío»). Así $B = \emptyset$ y $\emptyset \subset EU$.

De modo más general, al conjunto vacío $\emptyset$ se le considera como subconjunto de todo conjunto A, puesto que todo elemento que estuviera en $\emptyset$, también estaría en A (no hay ningún elemento que deje de cumplir esta condición). En particular $\emptyset \subset \emptyset$.

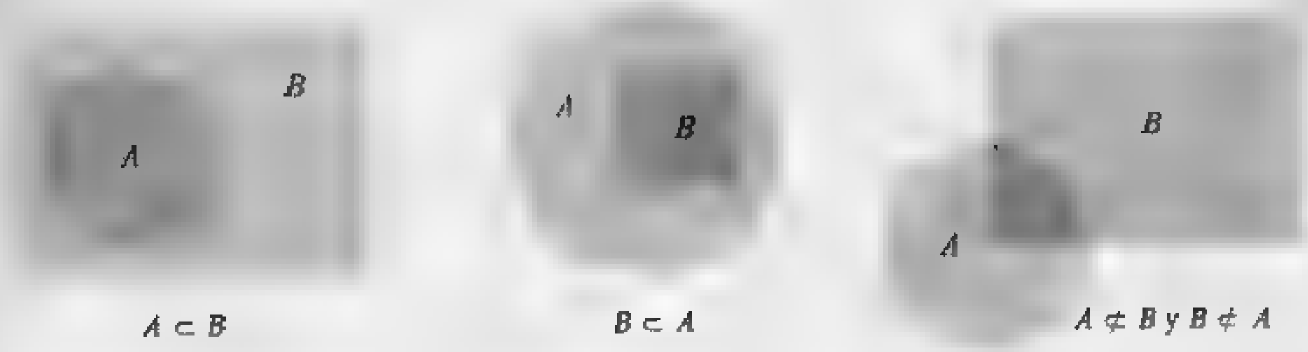
A veces resulta conveniente utilizar una representación gráfica mediante diagramas al analizar relaciones entre conjuntos. Tales diagramas se denominan *diagramas de Venn*, en honor del lógico inglés James Venn (1834-1883). Un conjunto se representa mediante una región del plano encerrada por una curva; así, el conjunto A se representa por los puntos en el interior de una circunferencia y el conjunto B por los puntos en el interior de un cuadrado. Colocando las curvas en diferentes posiciones, podemos ilustrar diversas relaciones entre los conjuntos, tal como en la fig. 1-1.

Los diagramas de Venn son muy útiles para ilustrar propiedades de los conjuntos. Por ejemplo, el diagrama de la fig. 1-2 ilustra la propiedad transitiva de la inclusión de conjuntos.

DEFINICIÓN 1.5. *Dos conjuntos A y B se dicen* disjuntos *si no tienen elementos en común. Para conjuntos disjuntos se tiene que si $x \in A$ entonces $x \notin B$ y si $x \in B$, entonces $x \notin A$.*

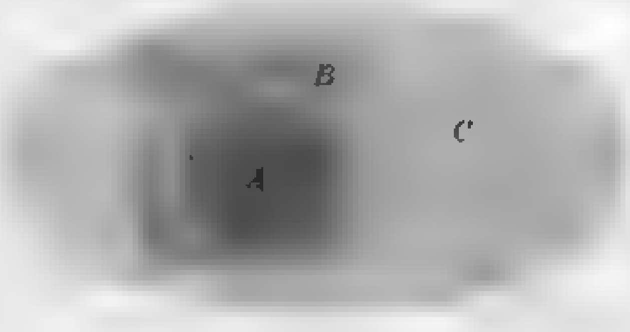
EJEMPLO ILUSTRATIVO 5. El conjunto P de los naturales pares es disjunto con el conjunto I de los naturales impares. También P es disjunto con L (letras del alfabeto). El conjunto vacío $\emptyset$ es disjunto con todo conjunto A, incluso consigo mismo.

Este concepto puede ilustrarse mediante los diagramas de Venn:



$A \subset B$ $B \subset A$ $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$

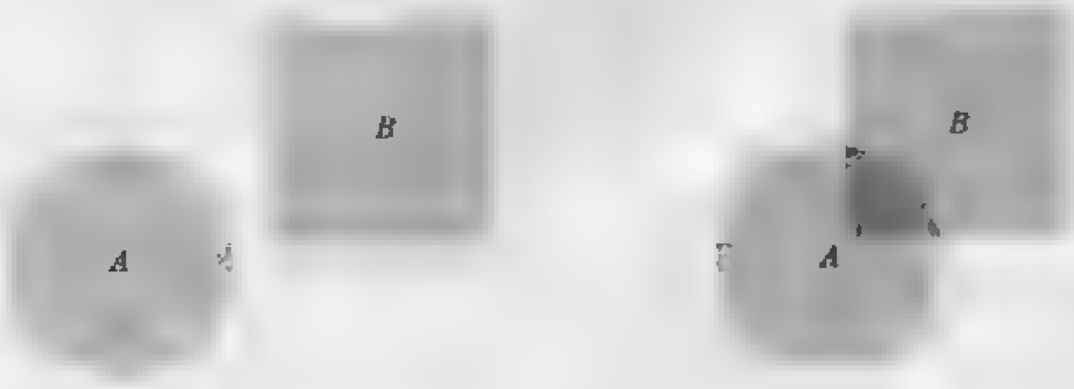
1-1



Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$ 1-2

En la sección 1.1 definimos la noción de equivalencia de dos conjuntos en función de la idea de correspondencia uno-a-uno. Si un conjunto es finito, entonces podemos enumerar sus elementos en algún orden, estableciendo así una correspondencia uno-a-uno entre los elementos del conjunto y los elementos de algún conjunto de la forma {números naturales desde 1 hasta n}.

DEFINICIÓN 1.6. *El* número cardinal *o la* cardinalidad *de un conjunto finito A es el número natural único n tal que los elementos de A están en correspondencia uno-a-uno con los elementos del conjunto {números naturales de 1 hasta n}. Designamos la cardinalidad de A mediante el símbolo $n(A)$ (léase «n de A» o «cardinalidad de A»). El cardinal de $\emptyset$ se define como igual a 0; esto es, $n(\emptyset) = 0$. Nótese que en el presente texto 0 no se considera número natural; esto es, $0 \notin N$.*



A disjunto con B A no disjunto con B 1-3

Ejemplo ilustrativo 6. Para los conjuntos definidos antes, $n(M) = 4$, $n(R) = 5$, $n(L) = 29$, $n(C) = 3$, $n(B) = 0$, $n(EU) = 50$.

Con frecuencia, en una determinada situación, estamos interesados en subconjuntos tomados de un *conjunto universal* determinado consistente de todos los elementos considerados. Por ejemplo, en el ejemplo ilustrativo 1 de esta sección consideramos los conjuntos M y R subconjuntos del conjunto universal L de todas las letras del alfabeto. En el ejemplo ilustrativo 4, el conjunto universal EU.

Definición 1.7. *Si A es un subconjunto de un conjunto universal U, entonces el* complemento de A *se define como el conjunto de los elementos de U que no están en A.*

Este complemento lo simbolizamos por A' (léase «A prima» o «complemento de A») y escribimos $A' = \{x|x \in U \text{ y } x \notin A\}$.

Ejemplo ilustrativo 7. Si el conjunto universal es L, entonces $M' = \{$letras que no están en la palabra «Mississippi»$\}$. Nótese que M y M' son disjuntos. En general, A y A' son disjuntos, cualquiera que sea el conjunto A. Nótese también que $n(M) = 4$ y $n(M') = 25$, de modo que $n(M) + n(M') = n(L)$.

Ejemplo ilustrativo 8. Si el conjunto universal es N, entonces $P' = \{$números naturales que no son pares$\} = \{$numeros naturales impares$\} = I$. Además, $I' = P$. En general, si $A' = B$, entonces $B' = A$, de modo que $(A')' = A$. En otras palabras, el complemento del complemento de un conjunto es el mismo conjunto.

Ejemplo ilustrativo 9. Si el conjunto universal es EU, $B' = \{$estados de los Estados Unidos cuyos nombres no comienzan con «B»$\}$. Pero entonces $B' = EU$, puesto que ningún estado tiene un nombre que comience con «B». De modo general, si U es el conjunto universal, entonces $\emptyset' = U$ y $U' = \{$elementos de U que no están en $U\} = \emptyset$

Problemas

1 Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ y $C = \{2, 4, 5\}$, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

(a) $A \subset B$ (b) $A \subset C$ (c) $B \subset A$
(d) $B \subset C$ (e) $C \subset A$ (f) $C \subset B$
(g) $C \subset C$? (h) $\emptyset \subset B$ (i) $B = C$

2 Para los conjuntos en el problema 1:

(a) ¿Cuál es el conjunto cuyos elementos están en B y C?
(b) ¿Cuál es el conjunto cuyos elementos están en B y $\{1, 5\}$?
(c) ¿Cuál es el conjunto cuyos elementos están en C y $\{1, 5\}$?

3 Encuéntrense todos los subconjuntos de $G = \{r, s, t\}$, que contienen a r pero no contienen a t.

Indicación: Hay dos subconjuntos de este tipo.

4 (a) Enumérense los subconjuntos del conjunto $\{a, b\}$ Obsérvese que hay $2^2 = 2 \times 2$ subconjuntos.
(b) Enumérense los subconjuntos del conjunto $\{a, b, c\}$. Obsérvese que hay $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ subconjuntos.

5 Para el conjunto $\{a, b, c, d\}$, enumérense los subconjuntos que contienen:
(a) cuatro elementos (b) tres elementos
(c) dos elementos (d) un elemento
(e) ningún elemento.

¿Cuántos subconjuntos hay en total? ¿Está esto de acuerdo con el modelo del Problema 4?

6 ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $\{a\}$? ¿Está esto de acuerdo con el modelo del problema 4?

7 ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $\emptyset$? ¿Qué se puede decir acerca de un conjunto A si sólo tiene un subconjunto?

8 Demuéstrese que si A es subconjunto propio de B y $B \subset C$, entonces A es subconjunto propio de C.

9 Si $D = \{0, 4, 7\}$, decimos que $7 \in D$ o $\{7\} \subset D$, pero no podemos decir $7 \subset D$ porque 7 no es un conjunto. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
(a) $4 \in D$ (b) $4 \subset D$ (c) $0 \in D$
(d) $\emptyset \in D$ (e) $\emptyset \subset D$ (f) $0 \subset D$
(g) $4 = \{4\}$ (h) $4 \in \{4\}$ (i) $0 = \emptyset$
(j) $0 \in \emptyset$

10 Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$, ¿cuáles de las expresiones siguientes son válidas?
(a) $A \in B$ (b) $A \subset B$ (c) $a \in A$
(d) $b \in B$ (e) $b \subset B$ (f) $\emptyset \in B$
(g) $\emptyset \subset A$ (h) $a \in B$ (i) $B \subset A$

11 Si $a \in X$, $b \in Y$, $X \subset Z$ e $Y \subset Z$:
(a) ¿Es cierto que $a \in Z$?
(b) ¿Es cierto que $b \in Z$?
(c) ¿Es cierto que $a \in Y$?
(d) ¿Puede existir un elemento en Z que sea elemento de X e Y?
(e) ¿Puede existir un elemento en Z que sea elemento de X pero no de Y?
(f) ¿Puede existir un elemento en Z que no sea elemento de X ni de Y?

12 Ilústrese el siguiente hecho mediante un diagrama de Venn: si $A \subset B$ y B es disjunto con C, entonces A es disjunto con C.

13 Explíquese por qué es finito todo subconjunto de un conjunto finito.

14 Si $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{$dígitos en nuestro sistema decimal$\}$ es el conjunto universal y $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$ y $D = \{6, 7, 8, 9\}$; ¿cuánto valen las cardinalidades siguientes?
(a) $n(A)$ (b) $n(B)$ (c) $n(C)$
(d) $n(D)$ (e) $n(U)$ (f) $n(\emptyset)$

15 Para los conjuntos del problema 14, indíquense los elementos de los conjuntos siguientes:

(a) A' (b) B' (c) C'
(d) D' (e) U' (f) $\emptyset$

16 ¿Cuáles son las cardinalidades de los seis conjuntos del problema 15?

17 Si en un diagrama de Venn el conjunto universal U se representa mediante los puntos dentro de un rectángulo y si A se representa mediante los puntos dentro de una circunferencia situada en el interior del rectángulo, ¿cómo queda representado A'?

18 Utilícese el diagrama del problema 17 para ilustrar el hecho de que A es disjunto con algún otro subconjunto B de U si y sólo si $B \subseteq A'$.

1.3. Operaciones con conjuntos

Si X = {números naturales desde 1 hasta 7}, Y = {números naturales pares desde 2 hasta 6} = $\{2, 4, 6\}$ y $Z = \{1, 3, 5, 7\}$, entonces podemos decir que X puede obtenerse «uniendo» los conjuntos Y y Z. Cada vez que dos clubes o grupos sociales se fusionan, tenemos un ejemplo de la operación de obtener un nuevo conjunto mediante la unión de dos conjuntos.

DEFINICIÓN 1.8. *La* unión *de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B.*

Esta unión la simbolizamos por $A \cup B$ (léase «A unión B») y escribimos:

$$A \cup B = \{x | x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}.$$

Al usar la palabra «o» en este sentido en matemáticas, no excluimos la posibilidad de que algún elemento de la unión puede estar en ambos conjuntos A y B, de modo que podríamos haber dicho que $A \cup B$ es el conjunto de los elementos que están en A o en B o en ambos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. Para los conjuntos X, Y y Z antes mencionados, podemos escribir $X = Y \cup Z$. También podemos escribir $X = Z \cup Y$, ya que el orden de los elementos de la unión no afecta al conjunto. Decimos entonces que la operación de unión de conjuntos es *conmutativa*. Obsérvese además que $n(Y) = 3$, $n(Z) = 4$ y $n(Y \cup Z) = 7 = n(Y) + n(Z)$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. Si M = {letras diferentes de «Mississippi»} y T = {letras diferentes de «Tennessee»}, entonces $M \cup T = \{m, i, s, p, t, e, n\}$. Nótese que $n(M) = 4$ y $n(T) = 4$, pero $n(M \cup T) = 7 \neq n(M) + n(T)$, puesto que hay un elemento, s, que está en ambos conjuntos pero se contabiliza sólo una vez en la unión. También $M \cup M = M$ y, en general, $A \cup A = A$, para todo conjunto A.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. Si $P = \{1, 2\}$, $Q = \{1, 3, 4\}$ y $R = \{1, 4, 5\}$, entonces $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4\}$; $Q \cup R = \{1, 3, 4, 5\}$ y $P \cup (Q \cup R) = \{1, 2, 3, 4, 5\} = (P \cup Q) \cup R$.

Si un club masculino de ajedrez y uno femenino acuerdan fusionarse, el número de miembros de la unión es igual a la suma del número de miembros de cada uno, pues aquí no hay posibilidad de traslapo. En general, si A y B son dos conjuntos finitos *disjuntos*, entonces la unión $A \cup B$ es también finita y $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Si un club de filatélicos se fusiona con un club de numismáticos para formar un club de coleccionistas, entonces el número de miembros de la unión puede ser estrictamente menor que la suma del número de miembros de los dos clubes componentes, ya que podría haber individuos que pertenecieran a ambos clubes.

DEFINICIÓN 1.9. *La* intersección *de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen tanto a A como a B*

Esta intersección la simbolizamos por $A \cap B$ (léase «A intersección B») y escribimos

$$A \cap B = \{x | x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}.$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Si M y T son los conjuntos del ejemplo ilustrativo 2, entonces $M \cap T = \{s\}$, puesto que s es el único elemento que esta en ambos conjuntos. Nótese que $M \cap T = T \cap M$. En general, para conjuntos cualesquiera A y B, se tiene $A \cap B = B \cap A$. Decimos que la operación de intersección es *conmutativa*. También $M \cap M = M$ y, en general, $A \cap A = A$ para todo conjunto A.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Si X, Y y Z son los conjuntos del ejemplo ilustrativo 1, entonces $Y = X \cap P$; siendo P el conjunto de los números naturales pares y $Z = X \cap I$, siendo I el conjunto de los naturales impares. Además, $Y \cap Z = \emptyset$, ya que no existen elementos que pertenezcan a ambos conjuntos Y y Z.

En general, podemos decir que dos conjuntos A y B son disjuntos si y sólo si $A \cap B = \emptyset$ (véase Definición 1.5).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6. Si P, Q y R son los conjuntos del ejemplo ilustrativo 3, entonces $P \cap Q = \{1\}$, $Q \cap R = \{1, 4\}$, y $(P \cap Q) \cap R = \{1\} = P \cap (Q \cap R)$.

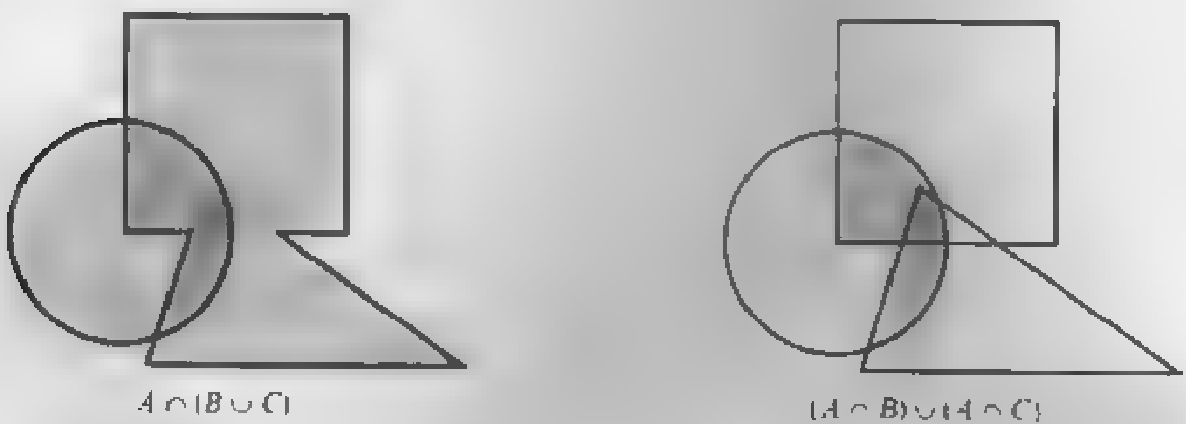
Los diagramas de Venn pueden ser de gran utilidad para ilustrar relaciones que incluyen uniones e intersecciones. Si A denota la región dentro de una circunferencia (sombreada horizontalmente) y B la región dentro de un cuadrado (sombreada verticalmente), entonces $A \cup B$ es la región de todos los puntos sombreados y $A \cap B$ la región de los puntos sombreados de ambos modos. Véase la fig. 1-4.

Estos mismos diagramas pueden utilizarse para ilustrar relaciones más complicadas entre conjuntos en las cuales intervienen uniones e intersecciones, tal como se hace en la fig. 1-5. Si A y B son finitos, entonces $A \cap B$ también es finito y $n(A \cap B)$ es el número de elementos que están tanto en A como en B. Se sigue que, en general, para conjuntos finitos A y B, se cumple la siguiente fórmula

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

SETS 1-3

1-4



1-5

Además de las operaciones de unión e intersección, existe una tercera operación, la de producto de conjuntos, que encontraremos bajo otra forma al estudiar sistemas de coordenadas bidimensionales en el capítulo 4.

En el menú de una cafetería aparecen dos clases de emparedados: de jamón o de huevo, y tres tipos de bebidas: café, té o leche; entonces hay exactamente seis combinaciones consistentes en un emparedado y una bebida, que pueden enumerarse en forma explícita como un conjunto de *pares ordenados* (el primer componente sería la clase de emparedado y el segundo el tipo de bebida):

(jamón, café)	(jamón, té)	(jamon, leche)
(huevo, café)	(huevo, té)	(huevo, leche)

Una situación similar ocurre cuando queremos enumerar los pares ordenados que dan todas las elecciones posibles, una del conjunto A y otra del conjunto B. Decimos que los pares ordenados (a, b) y (x, y) son iguales si $x = a$ e $y = b$. Así, $(1, 2) = (1, 2)$ pero $(1, 2) \neq (2, 1)$ y $(1, 2) \neq (1, 3)$.

DEFINICIÓN 1.10. *El conjunto producto o producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde a está en A y b está en B.*

Simbolizamos este conjunto por $A \times B$ y escribimos

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 7. Si $C = \{1, 2\}$ y $D = \{x, y\}$, entonces $C \times D = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$. También, $D \times C = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$, de modo que el orden de los factores es importante. (Entonces decimos que la operación del producto de conjuntos *no* es conmutativa.)

Si el conjunto A tiene un solo elemento a, entonces $A \times B = \{(a, b) | b \in B\}$ y hay exactamente un elemento en el producto por cada elemento de B. Si A es el conjunto vacío, entonces no hay pares ordenados con primer elemento en A, de modo que el producto también es vacío. Podemos entonces escribir $\emptyset \times B = \emptyset = B \times \emptyset$ para todo B. Si $C = \{1, 2\}$, entonces $C \times C = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

PROBLEMAS

1 Si $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ es el conjunto de los dígitos de nuestro sistema decimal y:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad C = \{4, 5, 6, 7\},$$
$$B = \{2, 3, 4, 5\}, \quad D = \{6, 7, 8, 9\},$$

determínese y represéntese gráficamente los conjuntos:

(a) $A \cup B$	(b) $B \cup C$	(c) $C \cap D$
(d) $D \cup A$	(e) $B \cap D$	(f) $B \cap C$
(g) $A \cup \emptyset$	(h) $B \cap \emptyset$	(i) $C \cup U$
(j) $D \cap U$	(k) $B' \cup D'$	(l) $A' \cap B'$
(m) $(A \cup B)'$	(n) $(B \cap D)'$	(o) $(U \cup \emptyset)'$

2 ¿Cuáles son las cardinalidades de los conjuntos del problema 1?

3 Si $U = \{x | x$ es una letra del alfabeto$\}$, $A = \{x | x$ es a o una de las cuatro letras siguientes del alfabeto$\}$, $E = \{x | x$ es e o una de las cuatro letras siguientes del alfabeto$\}$ e $I = \{x | x$ es i o una de las cuatro letras siguientes del alfabeto$\}$, determínense:

(a) $A \cap E$	(b) $E \cap I$	(c) $I \cap \emptyset$
(d) $\emptyset \cup A$	(e) $A \cap I$	(f) $E \cap U$.

4 ¿Cuáles son las cardinalidades de los conjuntos del problema 3?

5 Complétense las siguientes proposiciones, siendo X un subconjunto arbitrario del universo U.

(a) $X \cup U =$	(b) $X \cap U =$	(c) $X \cup \emptyset =$
(d) $X \cap \emptyset =$	(e) $X \cap X =$	(f) $X \cup X =$
(g) $X \cup X' =$	(h) $X \cap X' =$	(i) $\emptyset \cap U =$

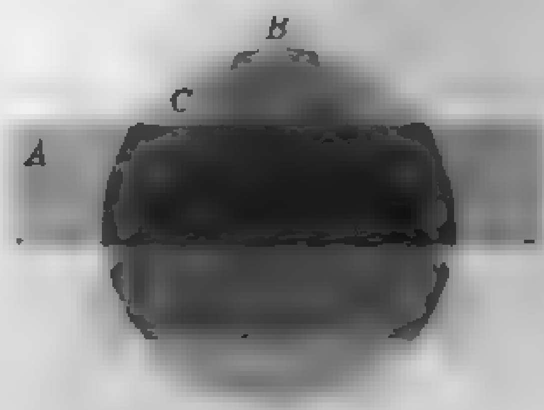
▶ *6 Para todo conjunto A, un conjunto de subconjuntos de A se dice exhaustivo si la unión de estos subconjuntos es A, y se dice disjunto (recuérdese la Definición 1.5) si no hay dos subconjuntos que tengan elementos comunes. Si $A = \{a, b, c\}$, determínese cuáles de los siguientes conjuntos de subconjuntos de A son exhaustivos y cuáles son disjuntos:

(a) $\{a\}, \{b\}$ (b) $\{a\}, \{b, c\}$ (c) $\{a, b\}, \{b, c\}$
(d) $\{a\}, \{a, b\}$ (e) $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

7 Demuéstrese que para todo conjunto universal U, todo par de subconjuntos X y X' es exhaustivo (según se definió en el problema 6).

8 Si en el diagrama de la fig. 1-6 el área interior al rectángulo representa un conjunto A, el triángulo un conjunto B y el círculo un conjunto C, determínese el área representada por:

(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \cap C$
(d) $B \cup C$ (e) $(A \cup B) \cap C'$ (f) $(A \cup B)' \cap C$



1-6

9 Utilizando los diagramas de Venn demuéstrese que:

(a) $A \cup B = A$ si y sólo si $B \subset A$ (b) $A \cap B = B$ si y sólo si $B \subset A$
(c) $B \subset A$ si y sólo si $A' \subset B'$ (d) $(A')' = A$

10 Indíquese qué condiciones deben cumplir los conjuntos A y B para que se verifiquen las igualdades siguientes:

(a) $A \cap B = \emptyset$ (b) $A \cap B = U$ (c) $A \cup B = U$
(d) $A \cup B = \emptyset$ (e) $A \cap B = A$ (f) $A \cup B = A$
(g) $A \cap \emptyset = \emptyset$ (h) $A \cap U = A$ (i) $A \cup U = U$
(j) $A \cup U = A$ (k) $A \cup \emptyset = U$ (l) $A \cup \emptyset = \emptyset$.

11 Indíquese para cada una de las proposiciones que siguen si es verdadera o falsa, siendo A y B conjuntos cualesquiera:

(a) A está siempre incluido en $A \cup B$ (c) A está siempre incluido en $A \cap B$.
(b) B siempre incluye a $A \cup B$. (d) B siempre incluye a $A \cap B$.

* Los problemas precedidos por un triángulo (▶) son fundamentales para la comprensión de temas posteriores del libro y, por tanto, deben ser asignados a todos los alumnos.

Si $A \supset B$, entonces,

(e) $A \cap B$ es siempre igual a A.

(f) $A \cap B$ es siempre igual a B.

(g) $A \cup B$ es siempre igual a A.

(h) $A \cup B$ es siempre igual a B.

12 El equipo de fútbol F, el equipo de basquetbol B y el equipo atlético A deciden formar un club deportivo D. ¿Cuántos miembros tendrá D si $n(F) = 25$, $n(B) = 12$, $n(A) = 30$ y ninguna persona pertenece simultáneamente a dos equipos?

13 Si en el problema 12 $n(F \cap A) = 6$ y no hay miembros de B que estén en F o A, entonces, ¿cuánto es $n(D)$?

14 Si en el problema 12 $n(F \cap A) = 6$, $n(A \cap B) = 4$ y $n(F \cap B) = 0$, entonces, ¿cuánto es $n(D)$?

15 Si en el problema 14 $n(F \cap A) = 6$, $n(A \cap B) = 4$, $n(F \cap B) = 3$ y hay dos personas que están en los tres equipos, esto es, $n(F \cap B \cap A) = 2$, entonces, ¿cuánto es $n(D)$?

16 Dibújese un diagrama de Venn que contenga tres conjuntos A, B y C tal que $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ y $C \cap A \neq \emptyset$, pero, $A \cap B \cap C = \emptyset$.

17 Si A, B y C son conjuntos finitos que satisfacen las condiciones del problema 12, determínese una fórmula que exprese $n(A \cup B \cup C)$ en términos de $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, $n(A \cap B)$, $n(B \cap C)$ y $n(C \cap A)$.

18 Si C y D son los conjuntos definidos en el ejemplo ilustrativo 7, ¿cuánto valen las cardinalidades siguientes?

(a) $n(C)$ (b) $n(D)$ (c) $n(C \times D)$

(d) $n(D \times C)$ (e) $n(C \times C)$ (f) $n(C \times \emptyset)$

19 Si $E = \{$jamón, huevo$\}$ y $B = \{$café, té, leche$\}$, entonces, ¿cuánto valen las cardinalidades siguientes?

(a) $n(E)$ (b) $n(B)$ (c) $n(E \times B)$

(d) $n(E \times E)$ (e) $n(B \times B)$ (f) $n(B \times E)$

20 Si $J = \{2\}$ y $K = \{a, b, c, d, e\}$, enumere los elementos de $J \times K$ y $K \times J$. ¿Cuánto valen $n(J)$, $n(K)$, $n(J \times K)$ y $n(K \times J)$?

21 Si A y B son conjuntos finitos no vacíos, ¿qué puede decirse de $n(A \times B)$?

22 Demuéstrese que si $A \cap B = \emptyset$, entonces $(A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset$, esto es, si A y B no tienen elementos en común, entonces no puede haber pares ordenados comunes en $A \times C$ y $B \times C$.

23 Explíquese por qué $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$; esto es, si un par ordenado (x, c) está en $A \times C$ y en $B \times C$; entonces (x, c) debe estar en $(A \cap B) \times C$ y recíprocamente.

24 Si A y B son disjuntos, explíquese por que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

25 Si $P = \{$números naturales pares$\}$ e $I = \{$números naturales impares$\}$, entonces, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

(a) $(2, 3) \in P \times I$ (b) $(1, 19) \in I \times I$ (c) $(2, 2) \in I \times P$

(d) $22 \in P \times P$ (e) $(2, 0) \in P \times \emptyset$ (f) $\{2\} \times I \subset P \times I$

2

El álgebra numérica

Este capítulo tiene dos propósitos. El primero es presentar un repaso de algunos de los hechos básicos acerca de las propiedades algebraicas de los números reales, la mayor parte de los cuales son familiares para el lector desde sus estudios secundarios. En este repaso también iremos estableciendo la terminología que se usa en el texto a medida que desarrollemos el álgebra de los números reales y estudiemos sistemas algebraicos más complicados.

El segundo propósito es organizar estos hechos básicos del álgebra de los números reales dentro de un sistema deductivo. Se acostumbra presentar la geometría de la escuela secundaria como un sistema deductivo, partiendo de unas pocas proposiciones o axiomas fundamentales y deduciendo mediante reglas lógicas, teoremas y corolarios. Sin embargo, es menos frecuente que el álgebra sea presentada de esta manera. En el presente capítulo presentaremos un conjunto de axiomas que servirán de base para la mayoría de los hechos algebraicos básicos de los números que utilizaremos en el libro. Construiremos el sistema algebraico de los números reales paso a paso, si bien nuestro tratamiento no será tan formal como en el caso de un curso de álgebra avanzada o teoría de números.

Los números reales se usan para contar y para medir. El conjunto de los números reales contiene no solo los números naturales que encontramos en el capítulo anterior al contar los conjuntos finitos, sino que también contiene otros números que miden la longitud de un segmento.

En el capítulo 4 estudiaremos con detalle los aspectos geométricos de los números reales y sólo entonces completaremos el sistema de axiomas que describe por completo el conjunto de los números reales.

En el presente capítulo estudiaremos principalmente las propiedades algebraicas del sistema de los números reales. La primera sección repasa los axiomas más familiares de los números reales, todos los cuales han sido ya verificados para los números naturales. En la sección 2.2, introducimos nuevos axiomas que garantizan que la substracción sea siempre posible y en la sección siguiente estudiamos el sistema de los enteros. En la sección 2.4, introducimos el axioma que garantiza la división por un número real no nulo y en la sección final estudiamos los números racionales y los irracionales.

Si bien enunciaremos cada uno de los axiomas para números reales, en el transcurso del desarrollo del tema se hará evidente que algunos de estos axiomas se cumplen también para otros sistemas en los que sea posible sumar y multiplicar. Un sistema algebraico que satisfaga todos los axiomas de este capítulo se denomina *cuerpo*. En el capítulo 7 estudiaremos el conjunto de los números complejos, el cual es un cuerpo, y en el capítulo 9 estudiaremos las propiedades algebraicas de las matrices, las cuales satisfacen algunos pero no todos los axiomas de un cuerpo

2.1 El álgebra de los números naturales

En esta sección enunciaremos de manera precisa diversas propiedades del sistema de los números reales R, las cuales resultan ser tan básicas que las utilizaremos como axiomas para justificar otras propiedades mas complicadas de los números reales. Una de las ventajas resultantes al describir los números reales mediante un conjunto de axiomas está en la comparación de las propiedades algebraicas de un sistema con las de otro. Por ejemplo, todos los axiomas que se estudian en esta primera sección se cumplen para el subconjunto de R que consta de los números naturales N, la mayor parte de cuyas propiedades ya hemos comentado en el capítulo anterior.

Los primeros tres axiomas que estudiaremos tienen una forma para la adición y una forma paralela para la multiplicación, lo cual indicaremos colocando una «A» o una «M» a continuación del número del axioma.

Los primeros axiomas para los números reales son tan familiares que generalmente no nos referiremos a ellos explícitamente, pero son importantes al estudiar otros sistemas algebraicos.

AXIOMA 1 A. Clausura de la adición. *Para todo a y b en R, la suma $a + b$ está en R*

AXIOMA 1 M Clausura de la multiplicacion. *Para todo a y b en R, el producto $a \cdot b$ está en R*

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. El subconjunto N de los números naturales también satisface las propiedades de clausura de la adición y de la multiplicación, ya que para todo n, m en N, la suma $n + m$ y el producto $n \cdot m$ están también en N. El subconjunto I de los números naturales impares no tiene la propiedad de clausura de la adición, ya que 3 y 5 están en I, pero su suma $3 + 5 = 8$ no está en I. Sin embargo, como demostraremos en la sección 2.3, el conjunto I es cerrado bajo la operación de multiplicación; esto es, el producto de dos numeros impares es también impar.

El siguiente conjunto de axiomas se refiere a la forma de agrupar los numeros reales mediante paréntesis cuando se suman o multiplican más de dos números reales.

Axioma 2 A. Asociatividad de la adición. *Para todo a, b y c en R*, $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Axioma 2 M. Asociatividad de la multiplicación. *Para todo a, b y c en R*, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

A causa de estos axiomas, escribimos simplemente $a + b + c$ o $a \cdot b \cdot c$, ya que no influye el lugar en que coloquemos los paréntesis cuando se trata de una sucesión de adiciones o multiplicaciones. Sin embargo, si una expresión incluye adiciones y multiplicaciones, la colocación de los paréntesis es importante. Por ejemplo, $(3 \cdot 4) + 2 = 14$ y $3 \cdot (4 + 2) = 18$.

El siguiente conjunto de axiomas se refiere al orden en que pueden sumarse o multiplicarse dos números reales.

Axioma 3 A. Conmutatividad de la adición. *Para todo a y b en R*, $a + b = b + a$.

Axioma 3 M. Conmutatividad de la multiplicación. *Para todo a y b en R*, $a \cdot b = b \cdot a$.

Cuando trabajamos con subconjuntos de los números reales (por ejemplo, con los naturales), entonces estos axiomas de asociatividad y conmutatividad de la adición y la multiplicación, se cumplen automáticamente. Más adelante en el capítulo estudiaremos otras operaciones como la substracción y la división de números reales, que no son ni asociativas ni conmutativas. En el capítulo 9 estudiaremos un sistema algebraico, las matrices de 2×2, que tienen la propiedad conmutativa para la adición pero no para la multiplicación.

El axioma que sigue relaciona las dos operaciones de adición y multiplicación de números reales. Daremos dos formas de él, una para multiplicación a izquierda y otra para multiplicación a derecha, ya que posteriormente consideraremos sistemas que no tienen la propiedad conmutativa para la multiplicación.

Axioma 4. Distributividad de la multiplicación respecto a la adición. *Para todo a, b y c en R*, $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ *y* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Hay un axioma adicional de los números reales que también se cumple para los naturales.

Axioma 5 M. Existencia de la identidad multiplicativa. *Existe un único número* 1 *en R tal que* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ *para todo a en R*.

Este axioma es satisfecho por N, ya que 1 es número natural. Obsérvese que, en particular, $1 \cdot 1 = 1$.

Para concluir esta sección, mencionamos cinco axiomas de igualdad que se usan constantemente en el álgebra moderna. Estos principios son tan básicos que rara vez nos referimos a ellos explícitamente en nuestras explicaciones en el

texto, pero deseamos puntualizar de manera precisa cuáles son las suposiciones que hacemos al tratar con igualdades de números reales.

AXIOMA I 1. Reflexividad de la igualdad. *Para todo a en R, $a = a$.*

AXIOMA I 2. Simetría de la igualdad *Para todo a y b en R, si $a = b$, entonces $b = a$.*

AXIOMA I 3. Transitividad de la igualdad. *Para todo a, b y c en R, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.*

Utilizamos implícitamente esta propiedad transitiva cada vez que escribimos una sucesión de igualdades y concluimos que el primer término es igual al último. Por ejemplo, podemos escribir $3 \cdot (2 + 4) + 5 = (3 \cdot 6) + 5 = 18 + 5 = 23$.

Los dos axiomas finales para igualdades se refieren a las operaciones de adición y de multiplicación.

AXIOMA I 4. Propiedad de adición para la igualdad. *Para todo a, b y c en R, si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.*

AXIOMA I 5. Propiedad de multiplicación para la igualdad *Para todo a, b y c en R, si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.*

Supondremos que si dos números reales son iguales, entonces uno puede ser sustituido por el otro en cualquier expresión algebraica. Por ejemplo, si $a = 2b$, entonces $3a + b + 7 = 3(2b) + b + 7$ y $a^2 = (2b)^2$.

PROBLEMAS

1 Indíquese cuál de los axiomas de los números reales justifica cada una de las proposiciones siguientes:

(a) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3 + 5)$
(b) $(10 + 5) + 3 = 10 + (5 + 3)$
(c) $2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = (2 + 3) \cdot 10$
(d) $10 + (4 + 10) = 10 + (10 + 4)$
(e) $(4 \cdot 10) \cdot 10 = 4 \cdot (10 \cdot 10)$
(f) $(10 \cdot 4) \cdot 10 = (4 \cdot 10) \cdot 10$
(g) $10 \cdot (4 \cdot 10) = (4 \cdot 10) \cdot 10$
(h) $(10 + 2) \cdot (20 + 3) = (10 + 2) \cdot 20 + (10 + 2) \cdot 3$.

2 En los ejercicios siguientes, supóngase que x representa un número real desconocido y supóngase que $x^2 = x \cdot x$. ¿Cuál de los axiomas justifica cada una de las proposiciones que siguen?

(a) $(x + 2) + 3 = x + (2 + 3)$
(b) $4 \cdot (10x) = (4 \cdot 10)x$
(c) $(2x)x = 2x^2$
(d) $4 \cdot (x + 3) = 4x + 4 \cdot 3$
(e) $(x + 3)x = x^2 + 3x$

3 Cada una de las proposiciones que siguen puede justificarse en dos pasos. En cada caso, complétese un paso central e indíquese qué axioma justifica cada paso.

(a) $(10 + 8) + 20 = 10 + (20 + 8)$
(b) $5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = (6 + 5) \cdot 2$

(c) $3 \cdot (4 \cdot 10 + 2) = (3 \cdot 4) \cdot 10 + 3 \cdot 2$
(d) $(10 + 2) \cdot (20 + 3) = (10 \cdot 20 + 2 \cdot 20) + (10 \cdot 3 + 2 \cdot 3)$
(e) $(40 + 3) \cdot (100 + 2) = (40 \cdot 100 + 3 \cdot 100) + (40 \cdot 2 + 3 \cdot 2)$
(f) $(2 + 3) \cdot 7 = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3$
(g) $20 \cdot (3 \cdot 10) = 3 \cdot (10 \cdot 20)$
(h) $(8 + 1) \cdot 4 = 8 \cdot 4 + 4$

4 Justifíquese cada uno de los pasos en las siguientes igualdades:

(a) $(x + 3) \cdot (x + 2) = (x + 3)x + (x + 3) \cdot 2 = (x^2 + 3x) + (2x + 3 \cdot 2)$
(b) $(x^2 + 3x) + (2x + 3 \cdot 2) = x^2 + (3x + (2x + 3 \cdot 2)) = x^2 + ((3x + 2x) + 3 \cdot 2)$
(c) $(3x^2 + 2) + (x^2 + 2x) = ((3x^2 + 2) + x^2) + 2x = (x^2 + (3x^2 + 2)) + 2x$
(d) $(x^2 + (3x^2 + 2)) + 2x = ((x^2 + 3x^2) + 2) + 2x = ((1 + 3)x^2 + 2) + 2x.$

5 En este problema eliminamos el uso de paréntesis cuando este paso se justifica por los axiomas de asociatividad. Así, escribimos $x^2 + 2x + 3$ en lugar de $(x^2 + 2x) + 3$ ó $x^2 + (2x + 3)$. Indíquese qué axiomas justifican cada una de las proposiciones que siguen:

(a) $(x^2 + 2x + 5) + (x^2 + 3x + 1) = (1 + 1)x^2 + (2 + 3)x + (5 + 1)$
(b) $5 \cdot (x^2 + 3x + 2) = 5x^2 + (5 \cdot 3)x + 5 \cdot 2$
(c) $(x + 2) \cdot (2x + 3) = 2x^2 + (2 \cdot 2 + 3)x + 2 \cdot 3$

6 Muéstrese por qué $(x + 1)^2 = x^2 + (1 + 1)x + 1$, e indíquese que axiomas justifican cada paso.

7 Muéstrese cuidadosamente por que $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ e indíquese que axiomas justifican cada paso.

8 Muéstrese cuidadosamente por que $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$. (Aquí usamos el hecho de que $1 + 1 = 2$.)

9 Hasta ahora no hemos utilizado nuestro conocimiento acerca de las tablas de adición y de multiplicación de numeros naturales. De ahora en adelante supondremos que conocemos estas tablas desde el 1 hasta el 9 y supondremos que conocemos también el valor posicional de las cifras en un número, de modo que $37 = 3 \cdot 10 + 7$ y $243 = 2 \cdot 10 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 3$. En la aritmética corriente utilizamos los axiomas del 1 hasta el 4 con tanta frecuencia y en forma tan mecánica que, en realidad, casi no percibimos el uso que estamos haciendo de ellos.

Para ilustrar el uso de estos axiomas podemos descomponer un cálculo corriente en sus pasos más simples. Indíquese qué axioma justifica cada paso.

$$\begin{aligned}
37 + 22 &= (3 \cdot 10 + 7) + (2 \cdot 10 + 2) && \text{valor posicional de las cifras}\\
&= ((3 \cdot 10 + 7) + 2 \cdot 10) + 2\\
&= (3 \cdot 10 + (7 + 2 \cdot 10)) + 2\\
&= (3 \cdot 10 + (2 \cdot 10 + 7)) + 2\\
&= ((3 \cdot 10 + 2 \cdot 10) + 7) + 2\\
&= ((3 + 2) \cdot 10 + 7) + 2\\
&= (3 + 2) \cdot 10 + (7 + 2)\\
&= 5 \cdot 10 + 9 && \text{tablas de adición}\\
&= 59
\end{aligned}$$

10 Desarróllese el mismo análisis del problema 9 para los cálculos siguientes:

(a) $5 + 37$ (b) $6 \cdot 17$
(c) $12 \cdot 16$ (d) $64 + 55$.

11 Explíquese qué significa la proposición de que los conjuntos sean cerrados bajo las operaciones de unión e intersección de conjuntos.

12 Los axiomas de asociatividad para los números reales corresponden a las siguientes proposiciones sobre conjuntos: para todos los conjuntos A, B y C se tiene $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Ilústrese cada proposición mediante un diagrama de Venn.

13 ¿Qué proposiciones acerca de unión e intersección de conjuntos corresponden a los axiomas de conmutatividad para la adición y la multiplicación de números reales?

14 En el capítulo anterior, en la fig. 1-5, utilizamos los diagramas de Venn para ilustrar una ley distributiva de la intersección respecto de la unión: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Utilícense diagramas de Venn para ilustrar la distributividad de la unión respecto de la intersección $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ obtenida intercambiando unión e intersección en la ley de distributividad anterior. ¿Se puede intercambiar la adición y la multiplicación en el Axioma 4?

2.2 Inversos aditivos y substracción

En la primera sección del presente capítulo examinamos un conjunto de axiomas que son satisfechos por el conjunto de los números naturales N. Este conjunto N no es lo suficientemente grande para nuestro trabajo en álgebra. Por ejemplo, si bien la ecuación $2 + x = 5$ tiene por solución el número natural $x = 3$, no existe número natural que sea solución de la ecuación $x + 5 = 2$, o incluso la ecuación $x + 2 = 2$. En la presente sección introduciremos dos nuevos axiomas que garantizarán soluciones para estas ecuaciones. En la sección 2.3 estudiaremos el conjunto Z de los enteros, que es el menor conjunto que incluye a N y que satisface estos dos nuevos axiomas, así como también los axiomas de la sección 2.1.

El primer axioma garantiza la existencia de una *identidad aditiva*; es decir, un elemento que, sumado a un número a, da el mismo a

---

AXIOMA 5 A. Existencia de una identidad aditiva. *Existe un único número* 0 *tal que* $a + 0 = a$ para todo número real a.

El número 0 es, por tanto, la solución única de la ecuación $a + x = a$, y 0 actúa respecto de la adición de la misma manera que la identidad multiplicativa 1 lo hace respecto de la multiplicación. Además, por el axioma de conmutatividad 3 A, $a + 0 = 0 + a = a$, para todo número a. Obsérvese que $0 \notin N$ y, en particular, $0 \neq 1$.

El axioma siguiente garantiza la existencia de un *inverso aditivo* para cada número a, esto es, un número que, sumado a a, da 0.

Axioma 6 A. Existencia de un inverso aditivo. *Para todo número a existe un único número* $-a$ *(léase «menos a» o «el negativo de a») tal que* $a + (-a) = 0$.

El número $-a$ es, por tanto, la solución única de la ecuación $a + x = 0$. Como $0 + 0 = 0$, se sigue que 0 es solución de $0 + x = 0$, de modo que $0 = -0$; esto es, 0 es su propio inverso aditivo.

Por el axioma de conmutatividad 3 A, $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Por tanto, a es la solución única de la ecuación $(-a) + x = 0$, y a es el negativo de $-a$. Escribimos este resultado en forma de teorema.

Teorema 2.1. *Para todo número a,* $-(-a) = a$, *esto es, el negativo del negativo de a es a.*

Mediante el Axioma 6 A podemos justificar otro resultado familiar muy útil:

Teorema 2.2 Ley de cancelación para la adición.—*Para todos los números a, b y c, si* $a + c = b + c$, *entonces* $a = b$

Demostración. Sumamos $-c$ a ambos miembros obteniendo $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$; usando luego el Axioma 2 A obtenemos $a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$. Utilizando el Axioma 6 A obtenemos $a + 0 = b + 0$ y, por el Axioma 5 A, $a = b$.

Como una aplicación de la ley de cancelacion, podemos probar una propiedad fundamental de la identidad aditiva 0 con respecto a la multiplicación.

Teorema 2.3. *Para todo número a tenemos* $a \cdot 0 = 0$.

Demostración. Partimos de $0 + 0 = 0$ y multiplicamos ambos miembros por a. Obtenemos $(0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a$. Por el Axioma 4, obtenemos $0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a$ y $0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0$. Por el Axioma 5 A y la ley de cancelación resulta $0 \cdot a = 0$.

A partir del Teorema 2.3, podemos justificar la mayoria de las propiedades algebraicas de los números signados, por ejemplo:

Teorema 2.4 *Para todos los números a y b,* $(-a) \cdot b = -(ab)$

Demostración. Sabemos que $-(ab)$ es la solución única de la ecuación $a \cdot b + x = 0$, de modo que es suficiente mostrar que $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$. Pero $a \cdot b + (-a) \cdot b = (a + (-a)) \cdot b$ por el Axioma 4 y $a + (-a) = 0$ por el Axioma 5, de modo que $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$ por el Teorema 2.3.

Corolario 2.5. *Para todo número b,* $(-1) \cdot b = -b$.

Demostración. Sea $a = -1$ en el teorema anterior; entonces, $(-1) \cdot b = -(1 \cdot b) = -b$ por el Axioma 5 M.

Corolario 2.6. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Demostración. Sea $b = -1$ en el corolario anterior; entonces $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$ y $-(-1) = 1$ por el Teorema 2.1. A.

Teorema 2.7. *Para todos los números a y b,* $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$.

Demostración. Por el Corolario 2.5, $-a = (-1)\cdot a$ y $-b = (-1)\cdot b$. Utilizando repetidamente el axioma de conmutatividad 3 M y el axioma de asociatividad 2 M, obtenemos $(-a)\cdot(-b) = (-1)\cdot a\cdot(-1)\cdot b = (-1)\cdot(-1)\cdot a\cdot b$; de modo que por el Corolario 2.6, $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$.

El teorema que sigue relaciona los inversos aditivos con la operación de adición.

Teorema 2.8. *Para todos los números a y b,* $-(a+b) = (-a)+(-b)$; *es decir, el negativo de la suma de dos números es la suma de los negativos de los números.*

Demostración. $-(a+b) = (-1)\cdot(a+b)$, por el Corolario 2.5, y $(-1)\cdot(a+b) = (-1)\cdot a + (-1)\cdot b = (-a)+(-b)$ por el Axioma de distributividad 4 y el Corolario 2.5.

Al comienzo de la sección analizamos la ecuación $5 + x = 2$; pero hasta el momento hemos trabajado solamente con ecuaciones de la forma $a + x = 0$. El Axioma 6 A garantiza la existencia de una solución única para cualquier ecuación de la forma $a + x = b$.

Teorema 2.9. *Para cada par de números a y b existe una solución única para la ecuación* $a + x = b$.

Demostración. Sumando $-a$ en ambos miembros, obtenemos $(-a) + (a + x) = (-a) + b$, de modo que $((-a) + a) + x = b + (-a)$ por los axiomas de asociatividad y de conmutatividad, de modo que $0 + x = x = b + (-a)$.

La solución única $x = b + (-a)$ para la ecuación $a + x = b$ se representa por $b - a$ (léase «b menos a» o «la diferencia entre b y a»). La operación que, dado un par de números b y a, da la diferencia $b - a$ es la operación de *substracción.*

Problemas

1 Explíquese qué significa la proposición «El conjunto vacío $\emptyset$ es la identidad respecto de la operación de unión de conjuntos».

2 Muéstrese que no hay un axioma para la unión de conjuntos que corresponda al Axioma 6 A de los números reales, demostrando que, en general, es imposible encontrar un conjunto X tal que $A \cup X = \emptyset$. ¿Cuál es el único conjunto que posee un inverso en este sentido?

3 Demuéstrese que $a(-b) = -ab$ para todos los números reales a y b

4 Demuéstrese que la operación de substracción no es conmutativa; es decir, es posible encontrar números reales a y b tales que $b - a \neq a - b$. ¿Qué puede decirse de a y b si $b - a = a - b$?

5 Demuéstrese que la operación de substracción no es asociativa; es decir, es posible encontrar números reales a, b y c tales que $(a - b) - c \neq a - (b - c)$.

▶ 6 Muéstrese por qué la operación de substracción satisface una ley de distributividad, es decir, para a, b y c en R, se tiene $c(b - a) = cb - ca$

Indicación. Escríbase $b - a$ como $b + (-a)$ y utilícese el Axioma 4

▶ 7 Demuéstrese que para a y b en R, $-(b - a) = (-b) + a$.

Indicación. Utilícese el problema 6. (Esta es la regla del cambio de signos para las cantidades entre paréntesis precedidas de signo menos.)

8 En esta sección demostramos la ley de cancelación a *derecha*. Muéstrese cómo puede probarse la ley de cancelación a *izquierda*, es decir, si $c + a = c + b$ entonces $a = b$.

9 Demuéstrese que el inverso aditivo de un número real es único, es decir, si $a + u = 0$, entonces $u = -a$.

Indicación. Súmese $-a$ en ambos miembros y simplifíquese usando los axiomas.

2.3 Enteros y factorizaciones

En la primera sección del capítulo examinamos aquellos axiomas del sistema de los números reales que son satisfechos por el conjunto N de los números naturales. El conjunto N no satisface los Axiomas 5 A y 6 A puesto que, por ejemplo, los números 0 y -1 no están en N. En esta sección consideraremos el sistema de los *enteros*, que es el menor subconjunto de R que incluye a N y satisface todos los axiomas de los números reales estudiados en las secciones 2.1 y 2.2.

Todo conjunto que incluya a N y que satisface los Axiomas 5 A y 6 A debe contener el 0 y los inversos aditivos de todos los elementos de N.

DEFINICIÓN 2.1. *Un* entero *es un número real que es o un número natural, ó* 0, *o el negativo de un número natural. Designamos por Z al conjunto de los enteros y escribimos $Z = \{x | x \in N \text{ ó } x = 0 \text{ o } x = -n \text{ para algún } n \text{ en } N\}$. Los números naturales se llaman enteros* positivos *y sus inversos aditivos se llaman enteros* negativos. *El entero* 0 *no se considera positivo ni negativo.*

Como $-(-n) = n$ por el Teorema 2.1, el inverso aditivo de un entero negativo es un entero positivo. Asimismo, 0 es su propio inverso aditivo y el inverso aditivo de todo entero positivo es un entero negativo por definición; por tanto, el inverso aditivo de todo entero es un entero, de modo que Z satisface el Axioma 6 A.

El conjunto Z de los enteros es cerrado respecto de la adición y de la multiplicación (véanse problemas 1 a 6 más adelante) y como Z satisface el Axioma 6 A, es cerrado también respecto a la substracción.

Examinamos a continuación el proceso de factorización para enteros.

DEFINICIÓN 2.2. *Si n, m y k son enteros y $n \cdot m = k$, entonces se dice que n y m son* factores *o* divisores *de k y se dice que k es múltiplo de n y de m.*

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. $35 = 5 \cdot 7$ de modo que 5 y 7 son factores de 35 y 35 es múltiplo de 5 y de 7. Otros factores de 35 son -5 y -7 (puesto que $35 =$

$(-5)\cdot(-7)$) y 1 y 35 (puesto que $35 = 1 \cdot 35$). De modo más general, si n es factor de k, entonces $-n$ es también factor de k, ya que si $n \cdot m = k$, entonces $(-n)\cdot(-m) = k$. Asimismo, 1 es factor de todo entero, ya que $1 \cdot k = k$ y todo entero k es divisor de sí mismo

Ejemplo ilustrativo 2. 4 es divisor de 12, ya que $4 \cdot 3 = 12$ y 12 es divisor de 60 ya que $12 \cdot 5 = 60$; entonces 4 es divisor de 60 ya que $4\cdot(3 \cdot 5) = 60$. De modo más general, si n es divisor de k y k es divisor de s, entonces n es divisor de s, ya que si $n \cdot m = k$ y $k \cdot r = s$, entonces $n \cdot (m \cdot r) = (n \cdot m) \cdot r = s$.

Ejemplo ilustrativo 3. El entero 0 es múltiplo de todo entero n, ya que $n \cdot 0 = 0$. Sin embargo, 0 es el único entero que tiene un número infinito de divisores

Todos los enteros positivos, a excepción del número uno, pueden clasificarse ya sea como *números compuestos* o como *primos* Un entero positivo se llama *compuesto* si es distinto de uno y puede ser expresado como el producto de dos o más enteros positivos, los cuales son sus factores. En ciertos casos, algunos de estos factores pueden repetirse. Por ejemplo, 6, 9, 12 y 24 son compuestos, porque $6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3 \cdot 3$, $12 = 4 \cdot 3$ y $24 = 6 \cdot 4$.

Un número entero positivo se llama *primo* si es distinto de uno y no es compuesto: en otras palabras, la única forma en que podemos expresar un primo p como el producto de dos enteros positivos es $p = p \cdot 1$ ó $p = 1 \cdot p$. Los cuatro primeros números primos son 2, 3, 5 y 7.

Todo entero positivo par distinto de 2 se puede expresar como $2k$, siendo k un número natural distinto de 1, de modo que todo entero positivo par distinto de 2 es compuesto. Todo entero compuesto puede descomponerse en un producto de primos, puesto que cada factor compuesto puede a su vez descomponerse en factores menores hasta que, en último término, todos los factores sean primos. Por ejemplo, $60 = 12 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ ó $60 = 10 \cdot 6 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$. Un hecho importante es que los primos que aparecen en tales descomposiciones serán siempre los mismos y cada uno aparecerá siempre el mismo numero de veces en cada descomposición, si bien el orden puede variar, como en el ejemplo anterior. La demostración de esta propiedad de descomposición única no nos concierne en esta explicación.

Se dice que dos enteros son *relativamente primos* si no tienen factores primos comunes, de modo que sus únicos factores comunes son 1 y -1. Por ejemplo, 15 y 21 no son relativamente primos, ya que 3 es factor de ambos; pero 15 y 22 lo son. En la sección 3.5 consideraremos la factorización en forma más general.

Problemas

1 Demuéstrese que si $-n$ y $-m$ son dos enteros negativos, entonces su producto es un entero positivo. ¿Qué hecho de la sección 2.2 se utiliza para justificar esto?

2 Demuéstrese que el producto de un entero negativo y un entero positivo es un entero negativo.

3 ¿Qué hecho de la sección 2.2 garantiza que el producto del entero 0 por otro entero es un entero?

4 Utilizando los resultados de los tres problemas anteriores, explíquese por qué el conjunto de los enteros es cerrado respecto a la multiplicación.

5 Demuéstrese que si $-n$ y $-m$ son dos enteros negativos, entonces su suma es un entero negativo.

6 Dénse ejemplos para mostrar que la suma de un entero positivo y un entero negativo puede ser un entero positivo, un entero negativo o 0 (en el capítulo 4 se verá un tratamiento más completo de la adición de números signados).

7 Muéstrese que 15 y 91 son ambos de la forma $p \cdot q$, siendo p y q números primos distintos. Enumérense todos los enteros positivos que sean divisores de 15. Hágase lo mismo para 91. ¿Qué puede decirse en general acerca de los divisores de un entero de la forma $p \cdot q$ donde p y q son primos diferentes?

8 Enumérense los factores de 8 y de 27. ¿Qué puede decirse en general acerca de los divisores de un entero de la forma $p^3 = p \cdot p \cdot p$, para un primo p?

9 Sea J = {divisores de 48} y K = {divisores de 80}. Enumérense todos los elementos de $K \cap J$ = (el conjunto de los *divisores comunes* de 48 y 80). ¿Cuál es el *máximo* divisor común de 48 y 80?

10 Sea G = {enteros positivos que son múltiplos de 4} y H = {enteros positivos que son múltiplos de 6}. Enumérense cinco de los elementos de $G \cap H$ = (el conjunto de los *múltiplos comunes* de 4 y 6). ¿Cuál es el *mínimo* múltiplo común de 4 y 6?

11 Demuéstrese que si k es un múltiplo de n y r es un múltiplo de k, entonces r es un múltiplo de n.

12 Demuéstrese que el conjunto de los números compuestos es cerrado respecto de la multiplicación; es decir, el producto de enteros compuestos es un entero compuesto. ¿Es cerrado el conjunto de los enteros compuestos respecto de la adición?

13 ¿Es cerrado el conjunto de los primos respecto de la multiplicación?, ¿y respecto de la adición?

14 Sea Zp el conjunto de los enteros pares (Zp incluye a P, el conjunto de los naturales pares). Demuéstrese que el conjunto Zp es cerrado respecto de la adición, esto es, si $n = 2r$ y $m = 2s$ son dos enteros pares, entonces su suma es par. ¿Qué axioma se puede utilizar para justificar este hecho?

15 Demuéstrese que el conjunto Zp definido en el problema 14 es cerrado respecto de la multiplicación, esto es, si n y m son pares, entonces $n \cdot m = 2t$ para algún t en Z. ¿Qué axioma se usa para justificar este hecho?

16 Explíquese por qué el conjunto Zp definido en el problema 14 satisface los Axiomas 5 A y 6 A; esto es, 0 está en Zp y si $n = 2r$ está en Zp, entonces $-n$ puede escribirse como $n = 2u$ para algún entero u.

17 ¿Cuál es el único axioma de las secciones 2.1 y 2.2 que *no* es satisfecho por el conjunto Zp de los enteros pares?

18 Sea Z_i el conjunto de los enteros impares; esto es, $Z_i = \{x | x = 2r + 1$ para algún r en $Z\}$.

Demuéstrese que la suma de dos impares es par; esto es, si $x = 2r + 1$, $y = 2s + 1$, siendo r y s enteros, entonces $x + y = 2t$ para algún entero t

19 Demuéstrese que el conjunto Z_I definido en el problema 18 es cerrado respecto de la multiplicación; esto es, si x e y son impares, entonces $x \cdot y = 2u + 1$ para algun u en Z

▶ 20 Utilizando los resultados de los problemas 18 y 19, demuéstrese que si n es un entero tal que $n^2 = n \cdot n$ es par, entonces n es par.

21 Expliquese por qué el cuadrado de un entero es un entero positivo o cero

22 Demuéstrese que el producto de tres enteros negativos es un entero negativo.

23 Enumérense todos los primos menores que 100.

24 Enumérense todos los números compuestos menores que 25

25 Enumérense todos los enteros menores que 30 que sean relativamente primos con 30.

2.4 Inversos multiplicativos y división

En las dos secciones precedentes hemos examinado los axiomas que garantizan la existencia de soluciones para todas las ecuaciones de la forma $a + x = 0$ y, más en general, de la forma $a + x = b$, y hemos estudiado el sistema Z de los enteros que es el menor conjunto que contiene los números naturales N y que satisface estos axiomas. El conjunto Z tampoco es lo suficientemente grande para nuestro trabajo en álgebra; por ejemplo, si bien la ecuación $2x = 6$ tiene al entero 3 como solución, no existe un entero que sea solución de la ecuación $2x = 5$ ó de $6x = 2$ ó incluso de $3x = 1$. En esta sección introduciremos un nuevo axioma que garantizará soluciones para ecuaciones como éstas. En la sección 2 5 estudiaremos el sistema Q de los números racionales, que es el menor conjunto que incluye a Z y satisface todos los axiomas de este capítulo.

Hemos demostrado en el Teorema 2 3 que $0 \cdot a = 0$ para todo número a, de modo que no podemos encontrar un número que sea solución de la ecuación $0 \cdot x = 1$. Sin embargo, el axioma que sigue garantiza la existencia de un *inverso multiplicativo* para todo número no nulo a; esto es, un número que multiplicado por a dé la identidad multiplicativa.

AXIOMA 6 M Existencia de inversos multiplicativos. *Para todo número a diferente de* 0, *existe un número único* $1/a$ *(léase «recíproco de a» o «uno dividido por a») tal que* $a \cdot (1/a) = 1$.

El número $1/a$ es, por tanto, la solución única de la ecuación $a \cdot x = 1$. Como $1 \cdot 1 = 1$, se sigue que 1 es una solución de $1 \cdot x = 1$, de modo que $1 = 1/1$; es decir, 1 es su propio inverso multiplicativo. Asimismo, $(-1) \cdot (-1) = 1$ por el Corolario 2.6, de modo que -1 es una solución de $(-1) \cdot x = 1$ y $-1 = 1/(-1)$, por tanto, -1 es también su propio inverso multiplicativo.

Por el Axioma de conmutatividad 3 M, $a \cdot (1/a) \cdot a = 1$; por tanto, a es la

solución única de la ecuación $(1/a) \cdot x = 1$, de lo cual se sigue que a es el recíproco de $1/a$. Enunciamos este resultado en forma de teorema:

TEOREMA 2.10 *Para todo número a diferente de cero, $1/(1/a) = a$, esto es, el recíproco del recíproco de a es a.*

El Axioma 6 M puede usarse para justificar otra propiedad familiar y de mucha utilidad.

TEOREMA 2.11. Ley de cancelación para la multiplicación. *Para números a y b cualesquiera y para todo número c diferente de cero, si $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$.*

Demostración. Multipliquemos ambos miembros por $1/c$ y obtenemos $(a \cdot c) \cdot (1/c) = b \cdot c(1/c)$; en seguida, utilizando el Axioma de asociatividad 3 M, obtenemos $a \cdot (c \cdot (1/c)) = b \cdot (c \cdot (1/c))$. Por el Axioma 6 M $a \cdot 1 = b \cdot 1$ y por el Axioma 5 M, $a = b$.

Hasta este punto, nuestra labor en esta sección ha seguido en forma casi paralela el comienzo de la sección 2.3, habiendo demostrado una fuerte analogía entre las propiedades de los inversos aditivos y las de los inversos multiplicativos. Sin embargo; en algún momento esta analogía debe quebrarse, pues hemos demostrado en el Teorema 2.3 que la identidad aditiva 0 tiene la propiedad de que $a \cdot 0 = 0$ para todo número a y la identidad multiplicativa 1 no tiene una propiedad comparable. Podemos, sin embargo, utilizar la ley de cancelación para demostrar un importante recíproco del Teorema 2.3

TEOREMA 2.12. *Si a y c son números tales que $a \cdot c = 0$, entonces, o bien $a = 0$, o bien $c = 0$.*

Demostración. Como $0 \cdot c = 0$ por el Teorema 2.3, tenemos $a \cdot c = 0 \cdot c$, de modo que si $c \neq 0$, utilizando la ley de cancelación concluimos que $a = 0$; por tanto, o bien $c = 0$, o bien $a = 0$. Esta última propiedad se usa al considerar ecuaciones de la forma $(x - a) \cdot (x - b) = 0$. La única forma en que un producto puede ser 0 es que uno de los factores sea 0, de modo que, o bien $x - a = 0$, o bien $x - b = 0$, esto es, $x = a$ o $x = b$.

En el Teorema 2.8, demostramos que el inverso aditivo de una suma es la suma de los inversos aditivos. Demostraremos ahora que el inverso multiplicativo del producto de dos números diferentes de cero es el producto de sus inversos multiplicativos.

TEOREMA 2.13. *Si a y b son números diferentes de cero, entonces $1/(a \cdot b) = (1/a) \cdot (1/b)$*

Demostración. Sabemos que $1/(a \cdot b)$ es la solución única de la ecuación $(a \cdot b) \cdot x = 1$, de modo que es suficiente demostrar que $(a \cdot b) \cdot ((1/a) \cdot (1/b)) = 1$. Pero $(1/a) \cdot (1/b) = (1/b) \cdot (1/a)$ por el Axioma de conmutatividad 3 M y utilizando repetidamente el Axioma de asociatividad 2 M, obtenemos $(a \cdot b) \cdot ((1/b) \cdot (1/a)) =$

$a \cdot b \cdot (1/b) \cdot (1/a) = a \cdot 1 \cdot (1/a)$ por el Axioma 6 M y $a \cdot 1 \cdot (1/a) = a \cdot (1/a) = 1$ por los Axiomas 5 M y 6 M.

Al comienzo de la sección estudiamos ecuaciones del tipo $2x = 5$ y $6x = 2$, pero hasta el momento hemos trabajado solamente con ecuaciones de la forma $a \cdot x = 1$. Sin embargo, el Axioma 6 M garantiza la existencia de una solución única para cada ecuación de la forma $a \cdot x = b$, si a no es igual a cero.

TEOREMA 2.14. *Para todo número b y todo número a diferente de cero existe una solución única de la ecuación* $a \cdot x = b$.

Demostración. Multipliquemos ambos miembros por $1/a$ obteniendo $(1/a) \cdot x \cdot a = (1/a) \cdot b$, y $((1/a) \cdot a) \cdot x = b \cdot (1/a)$ por los axiomas de conmutatividad y de asociatividad; por tanto, $1 \cdot x = x = b \cdot (1/a)$.

La solución única $x = b \cdot (1/a)$ de la ecuación $a \cdot x = b$ con $a \neq 0$ se simboliza por b/a (léase «b dividido por a» o «el cuociente de b por a»). La operación que, dados un par de números b y a, da el cuociente b/a se llama operación de *división*. El cuociente de b por 0 no se define y, en particular, el cuociente de 0 por 0 es indefinido.

Podemos identificar dos tipos especiales de cuocientes:

TEOREMA 2.15. *Para todo número b,* $b/1 = b$.

Demostración. $b/1$ es la solución única de la ecuación $1 \cdot x = b$; pero $x = b$ es solución de esta ecuación.

TEOREMA 2.16. *Si c es un número diferente de cero,* $c/c = 1$.

Demostración. c/c es por definición la solución única de la ecuación $c \cdot x = c$; pero, $x = 1$ es una solución de esta ecuación.

A continuación daremos una lista de varias propiedades de las operaciones aplicadas a los cuocientes, dejando los detalles de las demostraciones como ejercicios.

TEOREMA 2.17. Productos de cuocientes. $(b/a) \cdot (d/c) = (b \cdot d)/(a \cdot c)$

TEOREMA 2.18. *Si c es un número diferente de cero, entonces* $b/a = (b \cdot c)/(a \cdot c)$.

TEOREMA 2.19. Igualdad de cuocientes. *Si* $b/a = d/a$, *entonces* $b = d$ *y si* $b/a = d/c$, *entonces* $b \cdot c = a \cdot d$.

TEOREMA 2.20. Recíprocos de cuocientes. *Si* $b/a \neq 0$, *entonces* $1/(b/a) = a/b$.

TEOREMA 2.21. Cuocientes de cuocientes. *Si* $b/a \neq 0$; *entonces* $(d/c)/(b/a) = (d \cdot a)/(c \cdot b)$.

TEOREMA 2.22. Cuocientes de negativos. $(-b)/a = -(b/a)$ y $(-b)/(-a) = b/a$.

TEOREMA 2.23. Sumas de cuocientes. $(b/a) + (d/c) = (b \cdot c + a \cdot d)/(a \cdot c)$.

PROBLEMAS

1 Explíquese por qué 0 es el único número real que es su propio inverso aditivo; esto es, demuéstrese que si $a = (-a)$, entonces $a = 0$.

2 Demuéstrese que $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$, donde $a^2 = a \cdot a$.

3 Usando el resultado del problema 2, demuéstrese que si a es un número real que es su propio inverso multiplicativo, entonces a es 1 ó -1.

4 Demuéstrese que la operación de división no es conmutativa; esto es, es posible encontrar números reales a y b diferentes de cero, tales que $b/a \neq a/b$. ¿Qué puede decirse acerca de a y b si $b/a = a/b$?

Indicación: Esta situación puede ocurrir de dos maneras.

5 Demuéstrese que la operación de división no es asociativa; esto es, es posible encontrar números reales a, b y c diferentes de cero, tales que $(a/b)/c \neq a/(b/c)$.

6 Demuéstrese que si $c \neq 0$, entonces $(a + b)/c = (a/c) + (b/c)$.

Indicación: Escríbase $(a + b)/c = (a + b)(1/c)$ y úsese el Axioma 4.

7 Demuéstrese que si $a \cdot (b \cdot c) = 0$, entonces se tiene $a = 0$ ó $b = 0$ ó $c = 0$.

8 Si $(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) = 0$, ¿qué puede concluirse acerca de x?

9 En esta sección hemos demostrado la ley de cancelación a la *derecha* para la multiplicación. Demuéstrese la ley de cancelación a la *izquierda*; es decir, si $ca = cb$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$.

10 Muéstrese por qué $0/a = 0$ para todo número real a diferente de cero.

Indicación: Escríbase $0/a = 0 \cdot (1/a)$.

11 Demuéstrese que $(a + c)/(b + c) = a/b$ sólo si $a = b$ ó si $c = 0$.

Indicación: Utilícese el hecho de que $a/b = x/y$ sólo si $ay = bx$ y aplíquense las leyes de cancelación.

12 Muéstrese por qué el inverso multiplicativo de un número real diferente de cero es único; esto es, si $a \cdot u = 1$, entonces $u = 1/a$.

13 Demuéstrese que si a y b son números reales diferentes de cero, entonces $1/a + 1/b = (b + a)/ab$.

14 Demuéstrese el Teorema 2.17; es decir, $(b/a) \cdot (d/c) = (b \cdot d)/(a \cdot c)$.

Indicación: Escríbase $b/a = b \cdot (1/a)$.

15 Demuéstrese el Corolario 2.18 del Teorema 2.17.

Indicación: Utilícese el Teorema 2.16.

16 Demuéstrese el Teorema 2.19.

Indicación: Multiplíquense ambos miembros de la ecuación por un mismo número.

17 Demuéstrese el Teorema 2.20.

Indicación: Para demostrar que a/b es el recíproco de b/a, es suficiente demostrar que su producto es 1.

18 Demuéstrese el Teorema 2.21.

Indicación: Utilícense los Teoremas 2.17 y 2.21.

19 Demuéstrese el Teorema 2.22.

Indicación: Para demostrar que $(-b)\,a$ es el negativo de $b\,a$, es suficiente demostrar que su suma es 0.

20 Demuéstrese el Teorema 2.23. Utilícese el Corolario 2.18 dos veces y aplíquese en seguida el problema 6.

21 Demuéstrese que si $a \neq 0$ y $b = ac + d$, entonces $b/a = c + d/a$.

2.5 Números reales racionales e irracionales

En la sección anterior examinamos el último de un conjunto de seis axiomas que describen las propiedades algebraicas del sistema de los números reales. Un sistema que satisface todos estos axiomas se llama *cuerpo* en álgebra moderna. Sin embargo, estos axiomas no son suficientes para caracterizar en forma única el sistema de los números reales. En esta sección, veremos que existe un subconjunto de los reales, el sistema de los números *racionales*, que ya es un cuerpo. Demostraremos, sin embargo, que este sistema de los números racionales no es suficiente para el trabajo que deseamos hacer en el álgebra, ya que hay problemas algebraicos asociados con situaciones geométricas familiares que no tienen solución en el sistema de los racionales. En el capítulo 4 examinaremos en detalle la geometría del sistema de los números reales, pero de todos modos presentaremos en esta sección algunos aspectos de las propiedades algebraicas de los números reales no-racionales

Al comienzo del capítulo mencionamos el sistema Z de los enteros que era el mínimo subconjunto del sistema de los números reales R que incluye al conjunto de los naturales N y satisface todos los axiomas con la excepción de este último Axioma 6 A. Trataremos ahora el mínimo subconjunto de los números reales que incluye a Z y que satisface todos los axiomas de un cuerpo.

DEFINICIÓN 2.3. *Un número real x que puede expresarse como el cuociente de un entero n por un entero m diferente de cero, se llama* número racional. *Designamos el conjunto de los números racionales por Q y escribimos*

$$Q = \{x | x = n/m \text{ con } n \text{ y } m \text{ en } Z \text{ y } m \neq 0\}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. $\frac{5}{3}$ y $(-13)/2$ son números racionales. Todo número decimal exacto, esto es, cuyo desarrollo decimal «termina», como 0,25 ó 1,414, representa un número racional, ya que $0{,}25 = 25/100$ y $1{,}414 = 1414/1000$. Los números 5 y -4 son racionales, ya que $5 = 5/1$ y $-4 = (-4)/1 = 4/(-1)$. De modo más general, todo entero n es un número racional, ya que $n = n/1$. En particular, 0 es un número racional, ya que $0 = 0/1$ y, de hecho, $0 = 0/n$ para todo entero n diferente de cero. Podemos entonces escribir $Z \subset Q$ y, como $N \subset I$, por la transitividad de la inclusión de conjuntos, $N \subset Q$.

Si n/m es un número racional diferente de cero, entonces su recíproco está dado por $1/(n/m) = m/n$, y éste es también un número racional. Por tanto, el inverso multiplicativo de un racional es también racional, de modo que Q satisface el Axioma 6 M. Los axiomas de asociatividad, conmutatividad y distributividad se cumplen automáticamente para Q, puesto que $Q \subset R$. Como 0 y 1 están ambos en Q, el conjunto Q satisface también los Axiomas 5 A y 5 M. El conjunto Q también satisface el Axioma 6 A y es cerrado respecto de la adición y de la multiplicación (véanse los problemas 8, 9 y 10 más adelante), luego Q satisface todos los axiomas considerados en este capítulo y podemos, por tanto, decir que Q es un *cuerpo* incluido en el cuerpo de los números reales R.

Mencionaremos ahora una propiedad muy importante de los números racionales, que resulta crucial al estudiar los números reales *no* racionales. Sabemos que un número racional puede expresarse como cuociente de enteros de diversas maneras, por ejemplo, $6/8 = 60/80 = 12/18$. De hecho, si k es un entero diferente de cero, entonces $n/m = (km)/(km)$; por ejemplo, si los enteros n y m son ambos pares, entonces $n = 2r$ y $m = 2s$ con r y s enteros y, por tanto, $n/m = (2r)/(2s) = r/s$. Similarmente, si n y m tienen otros factores comunes, podemos simplificar hasta expresar en último término n/m como cuociente de dos enteros relativamente primos, esto es, que no tienen factores primos comunes. Este es el proceso familiar de «reducir una fracción a su forma más simple». Por la propiedad de descomposición única analizada en la sección 2.3, se deduce que esta reducción puede efectuarse esencialmente de una sola manera (nótese que no interesan los factores de 1 ó -1 al hacer esta reducción). Por ejemplo, $60/80 = 3/4 = (-3)/(-4)$ y $(-15)/51 = (-5)/17 = 5/(-17)$.

Dentro del sistema de los números racionales Q podemos encontrar solución para cada ecuación de la forma $ax + b = c$ siendo a, b y c números racionales y $a \neq 0$. (Véase el problema 15.) Sin embargo, hay algunos problemas algebraicos que resultan en la medición de segmentos, que no tienen solución en el sistema de los racionales, si bien debe haber un número real que sea solución, pues se supone que el sistema de los reales debe ser suficiente para medir la longitud de cualquier segmento.

Como un ejemplo de este problema, consideremos un cuadrado cuya área sea de 2 unidades cuadradas. La longitud del lado de este cuadrado es un número real x tal que $x^2 = 2$. Veremos que es imposible encontrar un número racional cuyo cuadrado sea 2.

Supongamos que n/m es un número racional cuyo cuadrado es 2. Elijamos para n/m la forma más simple, de modo que, en particular, n y m no son ambos pares. De la suposición $(n/m)^2 = 2$, deduciremos la contradicción de que n y m deben ser ambos pares, puesto que si $(n/m)^2 = n^2/m^2 = 2$, entonces $n^2 = 2m^2$, de modo que n^2 es par y, por tanto, n también es par (véase el problema 20 de la sección 2.3). Luego, $n = 2k$ para algún entero k y $2m^2 = n^2 = (2k)^2 = (2k) \cdot (2k) = 2 \cdot (2k^2)$. Aplicando la ley de cancelación, $m^2 = 2k^2$, de modo que m^2 es par y

también lo es m. Hemos llegado a la conclusión de que n y m son ambos pares, contradiciendo nuestra elección de n/m. Por tanto, es imposible encontrar un número racional n/m cuyo cuadrado sea 2.

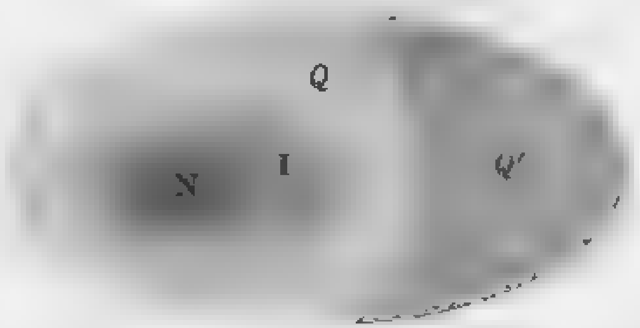
Tal como lo mencionamos antes, debe haber un número real x que represente esta longitud; denotamos este número con el símbolo $\sqrt{2}$ (léase «raíz cuadrada de 2»). Nuestro razonamiento anterior muestra que $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional.

DEFINICIÓN 2.4. *Un número real que no es racional se llama número* irracional. *Designamos al conjunto de los números irracionales por Q' (léase «Q prima» o «el complemento de Q en R»).*

Se tiene $\sqrt{2} \in Q'$ pero $0 \notin Q'$ y $\sqrt{2}/\sqrt{2} - 1 \notin Q'$. Hay muchos números importantes que son irracionales, tales como 2π, la longitud de la circunferencia de radio 1, o log 2, el logaritmo de 2 en base 10 (como se describe en el capítulo 13), pero es bastante difícil demostrar que estos números no son racionales. Podemos, sin embargo, construir ilimitadamente muchos otros números irracionales a partir del número irracional $\sqrt{2}$; por ejemplo, el número real $3\sqrt{2}$ no puede ser racional, puesto que si $3\sqrt{2} = n/m$ con n y m enteros, entonces dividiendo por 3 obtenemos $\sqrt{2} = n/(3m)$, contradiciendo el hecho de que $\sqrt{2}$ es irracional. De manera similar, podemos demostrar que el número real $\sqrt{2} + 1$ no puede ser un número racional n/m, ya que $(n/m) - 1$ es racional y $(\sqrt{2} + 1) - 1 = \sqrt{2}$ no lo es.

Obsérvese que no existe número racional cuyo cuadrado sea -1, pero tampoco hay un número real con esa propiedad; luego no decimos que $\sqrt{-1}$ sea un número irracional. En el capítulo 7 estudiaremos el sistema algebraico de los números *complejos*, que satisface todos los axiomas del presente capítulo (pero no los del capítulo 4) y en el cual hay una solución para la ecuación $x^2 = -1$.

Las diversas relaciones entre los conjuntos estudiados en este capítulo pueden ilustrarse en el diagrama de Venn de la fig. 2-1, en el cual el conjunto universal se toma como el de los números reales.



2-1

PROBLEMAS

1 Demuéstrese que los siguientes números son racionales; esto es, pueden expresarse como cuociente de dos números enteros.

(a) 0,6 (b) $7\frac{1}{4}$
(c) $-14{,}73$ (d) $-3\frac{1}{4}$

2 Demuéstrese que los siguientes son numeros racionales, expresandolos como cuocientes de enteros.

(a) $-6 + (3/5)$ (b) $(3/4)\cdot(5/7)$
(c) $(2/5)/5$ (d) $2/3 - 3/5$

3 Demuéstrese que los siguientes números reales son racionales

(a) $(3 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})$ (b) $(\sqrt{2} + 1)\cdot(\sqrt{2} - 1)$
(c) $(3\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2})$ (d) $(3\sqrt{2})/(2\sqrt{2})$

4 Explíquese por qué los siguientes números reales son irracionales

(a) $(3 + \sqrt{2}) + (-3 + \sqrt{2})$ (b) $4(\sqrt{2} + 1)$
(c) $\sqrt{2}(3 + \sqrt{2})$ (d) $(\sqrt{2} + 1)^2$

5 Demuéstrese que la suma de los números decimales exactos 0,34 y 0,283 es también un decimal exacto. Explíquese por que la suma de dos decimales exactos es tambien un decimal exacto.

6 Demuéstrese que el producto de los numeros decimales exactos 0,34 y 0,283 es también un decimal exacto. Explíquese por qué el producto de dos decimales exactos es también un decimal exacto.

7 Demuestrese que el cuociente de dos decimales exactos no es necesariamente un decimal exacto

Indicación: Los números 1 y 3 son decimales exactos.

8 Demuéstrese que el conjunto Q de los números racionales es cerrado respecto de la multiplicación, esto es, si $x = n/m$ e $y = p/q$ con n, m, p y q enteros, entonces xy puede expresarse como cuociente de dos enteros. ¿Qué teoremas de las secciones 2.3 y 2.4 justifican este resultado?

9 Demuéstrese que el inverso aditivo de un número racional es un numero racional; es decir, si $x = n/m$ con n y m enteros, entonces $-x$ puede expresarse como cuociente de dos enteros.

10 Demuéstrese que el conjunto Q es cerrado respecto de la adición, es decir, si $x = n/m$ e $y = p/q$, con n, m, p, q enteros y además m y q diferentes de cero, entonces $x + y$ puede expresarse como cuociente de un entero por un entero diferente de cero. ¿Qué proposiciones de las secciones 2.3 y 2.4 justifican este resultado?

11 Demuéstrese que si $x \in Q'$, entonces $-x$ y $1/x$ estan en Q'. Por otra parte, dénse ejemplos para mostrar que Q' no es cerrado respecto de la adición ni de la multiplicacion; esto es, es posible que la suma o el producto de dos números irracionales sea un número racional.

12 Demuéstrese que si $x \in Q$ e $y \in Q'$, entonces $x + y \in Q'$ y si $x \neq 0$, entonces $x \cdot y \in Q'$.

Indicación: Supóngase que $x + y$ o $x \cdot y$ están en Q y apliquense los resultados de los problemas 8, 9 y 10 precedentes.

13 Bosquéjese una demostración del hecho de que no existe un numero racional cuyo cubo sea 2; esto es, es imposible encontrar enteros n y m tales que $(n/m)^3 = 2$.

14 Bosquéjese una demostración del hecho de que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 3

15 Demuéstrese que si a, b y c son elementos de Q y si $a \neq 0$, entonces existe un número racional único x que es solución de la ecuación $ax + b = c$.

16 Demuéstrese que si p, q y r son enteros diferentes de cero, entonces el número real $(p + q\sqrt{2})/r$ es irracional.

Indicación: Supóngase que el número se puede escribir como n/m con n y m enteros y obténgase una contradicción.

3

Expresiones algebraicas

En este capítulo continuaremos nuestra explicación sobre nociones y procesos fundamentales. A medida que construyamos la estructura algebraica para la mayor parte de nuestras matemáticas, utilizaremos muchas de las propiedades de los números reales del capítulo anterior. Las ideas que consideraremos volverán a aparecer a lo largo de todo el libro, debiendo, por tanto, ser comprendidas en su integridad.

3.1 Adición de expresiones algebraicas

Se llama expresión algebraica a toda combinación de símbolos y letras ligados por las operaciones fundamentales del álgebra

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. $5a + 6b$, $2ax^2$, y $(6x + 5y)2x$ son expresiones algebraicas.

Toda expresión algebraica consistente de partes distintas ligadas por signos más o menos se llama *suma algebraica*. Cada una de las partes distintas, junto con su signo, se llama *término* de la expresion

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. En la suma algebraica $2x^2 - 3y^2 - 5$, $2x^2$ es un término; $-3y^2$, otro término, y -5, un tercer término

En un determinado término consistente de dos o más factores, cualquiera de estos factores o el producto de un número cualquiera de ellos puede ser llamado el *coeficiente* del producto de los otros factores. Por ejemplo, en el término $2x^2y$, 2 es el coeficiente de x^2y, $2x^2$ es el coeficiente de y y $2y$ es el coeficiente de x^2. A menudo es conveniente hacer diferencia entre coeficientes numéricos y coeficientes compuestos de letras o símbolos. Para determinar la suma o diferencia de dos expresiones algebraicas reduciendo términos semejantes, utilizamos los coeficientes y en seguida aplicamos los axiomas de asociatividad.

Usamos el símbolo «$\equiv$» para indicar una *identidad*, es decir. una proposición que es válida para todos los valores de x e y para los cuales la proposición tiene sentido.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. La suma de $2x - 3y + 5$ y $x + 2y - 1$ es

$$\begin{aligned}(2x - 3y + 5) + (x + 2y - 1) &\equiv 2x + x - 3y + 2y + 5 - 1\\ &\equiv 3x - y + 4.\end{aligned}$$

La eliminación de paréntesis (u otro símbolo de agrupamiento) precedido por un signo menos exige cambiar el signo de cada término en el interior del paréntesis, pero los paréntesis precedidos por un signo más pueden eliminarse sin cambiar la expresión entre paréntesis (véase el Teorema 2.8 y el problema 7 de la sección 2.2).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4. La diferencia entre $2x - 3y + 5$ y $x + 2y - 1$ es

$$\begin{aligned}(2x - 3y + 5) - (x + 2y - 1) &\equiv 2x - 3y + 5 - x - 2y + 1\\ &\equiv x - 5y + 6.\end{aligned}$$

EJEMPLO 1. Simplifíquese la expresión $4x - [2x - 3y - (x + 4y)] + (x - 8)$ eliminando los paréntesis y reduciendo términos semejantes.

Solución:

$$\begin{aligned}4x - [2x - 3y - (x + 4y)] + (x - 8) &\equiv 4x - [2x - 3y - x - 4y] + x - 8\\ &\equiv 4x - 2x + 3y + x + 4y + x - 8\\ &\equiv 4x + 7y - 8.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Determínese el valor de $-2xy + 3x - 4y$ para $x = 3$ e $y = -2$.

Solución. Substituyendo x por 3 e y por -2:

$$-2(3)(-2) + 3(3) - 4(-2) = 12 + 9 + 8 = 29.$$

Hemos mencionado que las expresiones algebraicas se llaman sumas algebraicas, sea que ellas comprendan las operaciones de adición o substracción. Si la expresión consiste de un solo término se llama *monomio;* la suma algebraica de dos términos se llama *binomio* y, en general, una expresión algebraica consistente de un número cualquiera de términos se llama «*multinomio*». La expresión $2x/3y^2$ es un monomio, en tanto que $3x^2 - 2y$ es un binomio.

PROBLEMAS

En cada uno de los siguientes problemas: (a) determínese la suma de las expresiones; (b) réstese la segunda expresión de la primera.

1 $2a + 3b - 4$ y $a - 2b + 3$ 2 $a - 2b + 3c$ y $2a + 4b - c$

3 $4x + 3y + z$ y $2x + 3y - 2z$ 4 $2x + y + 5$ y $3y - 2z - 4$

5 $2(x - 3y)$ y $-5(2x + y)$ 6 $-(x + 2y - z)$ y $3(x - y + 2z)$

En cada uno de los siguientes problemas, elimínense todos los símbolos de agrupamiento y redúzcanse términos semejantes.

7 $x - (2y + 3x) - 2y$

8 $3x - (2y - 4x) + 6y$

9 $(2x - 3y) - (8x + 6y + 4)$

10 $(2x - 3y) + (y - 4z) - (z - 3x)$

11 $8x + [(3x - 2y) + (6x - 9) - (x + y)]$

12 $3y - [2y + 3x - (2x - 3y)] + 4x$

13 $2x - \{3y - [5x - (7y - 6x)]\}$

14 $9x - (2y - 3x) - \{y - (2y - x)\} - [2y + (4x - 3y)]$

En cada una de las expresiones siguientes, enciérrense los tres últimos términos entre paréntesis precedido por el signo menos.

15 $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

16 $16 - x^2 + 2xy - y^2$

17 $4x^2 - 4y^2 - 4y - 1$

18 $9x^2 - 9y^2 - 6xy - x^2$

En cada una de las expresiones siguientes, enciérrense los coeficientes de x entre paréntesis precedido por (a) el signo más; (b) el signo menos.

19 $cx + dy - ax - by$

20 $5x - ax + 3 - 4x$

21 $ax - by + bx - ay$

22 $6x^2 - 8x + 3y - 7y^2 + 6x - 4$

Encuéntrese el valor de cada una de las expresiones siguientes para los valores dados de las letras.

23 $3x + 4$ y $x = 1$

24 $x^2 - 7x + 10$ y $x = 2$

25 $3x^2 - 2x + 1$ y $x = -2$

26 $-3x^2 - 4x + 3$ y $x = -4$

27 $2x + 3y$ y $x = -2, y = 3$

28 $4x - 3y$ y $x = -1, y = 3$

29 $2x^2 - 3xy + y^2$ y $x = 2, y = -3$

30 $3x^2 + 2xy - 4y^2$ $(x = -3, y = 1)$

Una expresión en x seguida por el símbolo:

$$\Big|_a^b$$

representa el valor de la expresión cuando x es reemplazado por b menos el valor de la expresión cuando x es reemplazado por a. Por ejemplo:

$$2x^2 - 5x\Big|_2^3 = 2(3^2) - 5(3) - [2(2^2) - 5(2)] = 18 - 15 - (8 - 10) = 5.$$

Encuéntrese el valor de cada una de las expresiones siguientes.

31 $2x + 5\Big|_{1}^{2}$ 32 $4x - 7\Big|_{0}^{1}$

33 $x^2 - 6x + 9\Big|_{1}^{3}$ 34 $5x^2 - 4x + 6\Big|_{-2}^{1}$

35 $x^2 - a^2\Big|_{0}^{a}$ 36 $3x^2 - 4a\Big|_{0}^{a}$

37 $a^2x - 2ax^2 + 3a^3\Big|_{0}^{a}$ 38 $x^4 + x^2\Big|_{-a}^{a}$

39 $x^3 - x\Big|_{a}^{a}$ 40 $2(x^3 - x)\Big|_{0}^{a}$

3.2 Multiplicación de expresiones algebraicas

Cuando los factores de un producto son iguales, el producto se llama una *potencia* del factor repetido. Introduciremos un símbolo para representar un producto de este tipo. El símbolo a^2 representa el producto de $a \cdot a$; análogamente, $a \cdot a \cdot a$ puede ser representado por a^3, y, en general, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.1. *Si n es un entero positivo, el símbolo a^n, potencia n-ésima de a, es el producto de n factores* cada uno igual a *a. Así*

$$a^n \equiv \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a.}_{n \text{ factores } a} \tag{3.1}$$

En el símbolo a^n, a se llama *base* y n, *exponente* de la potencia.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

De esta definición se deducen algunos teoremas sobre exponentes.

TEOREMA 3.1. *Si n y m son enteros positivos y $a \in R$,*

$$a^n a^m \equiv a^{n+m}. \tag{3.2}$$

Demostración:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores } a} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n + m \text{ factores } a} = a^{n+m}.$$

El lector deberá demostrar también los dos teoremas siguientes.

TEOREMA 3.2. *Si n y m son enteros positivos y $a \in R$,*

$$(a^n)^m \equiv a^{nm}. \tag{3.3}$$

TEOREMA 3.3. *Si n es un entero positivo y $a, b \in R$,*

$$(ab)^n \equiv a^n b^n. \tag{3.4}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. $3^2 \cdot 3^4 = 3^6 = 729$.
$a^4 \cdot a^7 = a^{11}$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.
$(a^5)^3 = a^{15}$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4. $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$.

Cuando no se escribe exponente, debe entenderse que éste es la unidad.

Utilizando estos teoremas y recordando el axioma de distributividad podemos ahora efectuar la multiplicación de dos expresiones algebraicas.

EJEMPLO 1. Multiplíquese $2x - 3y$ por $3x + 4y$.

Solución. Cada término del segundo binomio debe ser multiplicado por el primer binomio. (Recuérdese el problema 5, sección 2.1.)

$$(2x - 3y)(3x + 4y) \equiv [(2x - 3y) \cdot 3x] + [(2x - 3y) \cdot 4y]$$

Cada uno de los productos del segundo miembro debe desarrollarse utilizando el axioma de distributividad a derecha, de modo que el resultado es

$$6x^2 - 9xy + 8xy - 12y^2.$$

Reduciendo términos semejantes, tenemos

$$(2x - 3y)(3x + 4y) \equiv 6x^2 - xy - 12y^2.$$

En problemas de este tipo, es a veces conveniente ordenar ambos «multinomios» según potencias ascendentes (o descendentes) de una letra, utilizando el axioma de asociatividad, escribir un «multinomio» bajo el otro, efectuar la multiplicación y sumar los productos. Considérese el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2. Multiplíquese $x^2 - 2y^2 + xy$ por $2x - y$.

Solución.

$$\begin{array}{rrrr}
x^2 + & xy & - 2y^2 & \\
2x - & y & & \\
\hline
2x^3 + & 2x^2y & - 4xy^2 & \\
 - & x^2y & - xy^2 & + 2y^3 \\
\hline
2x^3 + & x^2y & - 5xy^2 & + 2y^3
\end{array}$$

PROBLEMAS

Efectúense las operaciones indicadas aplicando los teoremas sobre exponentes.

1 $a^2 \cdot a^7$

2 $3x^4 \cdot 2x^3$

3 $3x^3 \cdot x^4 \cdot x^5$

4 $(-3)^4 \cdot (-3)^5$

5 $y^{13} \cdot y^{11}$

6 $(2^3)^4$

7 $(a^5)^4$

8 $(3b)^5$

9 $(5c)^3$

10 $(3a)^4$

11 $(2a^3)^5$

12 $(x^4)^n$

13 $(a^r \cdot a^s)^t$

14 $(x^{2m} \cdot x^{3n})^4$

15 $(2x^n)^n$

Efectúense las multiplicaciones indicadas y redúzcanse términos semejantes. Nótese que cada uno de los Axiomas 1 a 4 es utilizado en la mayoría de estos problemas.

16 $(4x-3)(3x+6)$

17 $(x+3)(2x-5)$

18 $(5a+2b)(5a-2b)$

19 $(4x+2y)(4x-2y)$

20 $(3x-2)(2x+5)$

21 $(r^2-s^2)(r-s)$

22 $(x-2y)^2$

23 $(x^2-xy+y^2)(x+y)$

24 $(a+b-c)^2$

25 $(x-2y+3)^2$

26 $(x-2y+z)^2$

27 $(a+b)^3$

28 $(a-2b)^3$

29 $(a^2-b)^3$

30 $(2x+3x^2-1)(3x-2)$

31 $(x^2-2x-2)(x+2x^2-4)$

32 $(-xy+2x^2-3y^2)(x^2-4y^2+xy)$

33 $(x-1)(x+2)(x-3)$

34 $(x-2)(x+3)(x+2)$

35 $(x^4+2x^2y^2+4y^4)(x^2-2y^2)$

36 $(a^{2n}-7a^n+10)(a^n-1)$

37 $(a^{2n}-7a^n+10)(a-1)$

38 $(x-2x^2+5-x^3)(3x-4+x^2)$

39 $(x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n})(x^{2n}-2x^ny^n+y^{2n})$

40 $(x^n-y^n)^3$

41 $(x-y)^4$

42 $(a+b)^4$

43 $(a^3+3a^2+3a+1)(a+1)$

44 $(a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)$

45 $(x-2)^4$

3.3 División de expresiones algebraicas

Antes de poder dividir una expresión algebraica por otra, debemos establecer un teorema adicional sobre exponentes.

TEOREMA 3.4. *Si $a \in R(a \neq 0)$, y n y m son enteros positivos,*

$$\frac{a^n}{a^m} \equiv \begin{cases} a^{n-m} & \text{si } n \text{ es mayor que } m, \quad (3.5) \\ \dfrac{1}{a^{m-n}} & \text{si } m \text{ es mayor que } n. \quad (3.6) \\ 1 & \text{si } m = n. \quad (3.7) \end{cases}$$

Demostración. El resultado se obtiene escribiendo

$$\frac{a^n}{a^m} \equiv \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n \text{ factores } a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores } a}}.$$

y recordando el Teorema 2.17.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. $\dfrac{x^8}{x^3} \equiv x^5$; $\dfrac{x^4}{x^{11}} \equiv \dfrac{1}{x^7}$; $\dfrac{x^6}{x^6} \equiv 1$.

Estamos ahora preparados para dividir un «multinomio» cualquiera por un monomio. Para esto dividimos cada término del «multinomio» por el monomio y sumamos algebraicamente los cuocientes resultantes (Recuérdese problema 6, sección 2.4.)

EJEMPLO 1. Divídase $12x^3y^4 + 18x^4y^2 - 36xy^3$ por $3x^2y^2$.

Solución. Utilizando la propiedad enunciada en el problema 6, sección 2.4, obtenemos

$$\frac{12x^3y^4 + 18x^4y^2 - 36xy^3}{3x^2y^2} \equiv \frac{12x^3y^4}{3x^2y^2} + \frac{18x^4y^2}{3x^2y^2} - \frac{36xy^3}{3x^2y^2}$$

$$\equiv 4xy^2 + 6x^2 - \frac{12y}{x}.$$

Hemos definido una expresión algebraica como la suma de términos algebraicos (sección 3.1) Todo término algebraico es un término *racional entero* en determinadas letras que representan números si consiste del producto de potencias positivas enteras de estas letras y de un factor que no las contiene Por ejemplo, ax^2y y $3x^4y^{3/4}$ son términos racionales enteros en x, y ax^2y y $3x^4y^3$ son términos racionales enteros en y. El término $by^{1/2}$ es también racional entero

en x, dado que satisface la definición. Todo «multinomio» en el cual cada término es racional entero se llama una *expresión racional entera* o *polinomio*.

Ejemplo ilustrativo 2. El multinomio $3 - 5x^3 + \frac{3}{5}xy^2$ es un polinomio en x e y; en cambio, $-5/x^3$ no es entero en x y $5\sqrt{x}$ no es ni entero ni racional en x.

El grado de un término que es *entero racional* en una determinada letra se define como el *exponente* de esa letra. Así, ax^2y y $3x^4y^3$ son términos de segundo y cuarto grado en x pero primero y tercer grado en y. *El grado de un término racional entero en dos o más letras* se define como la suma de los exponentes de esas letras. Así, el grado de ax^2y en x e y es $2 + 1 = 3$, en tanto que el grado de $3x^4y^3$ en x e y es 7. *El grado de un polinomio* en determinadas letras es el de su término (o términos) de más alto grado en esas letras.

Ejemplo ilustrativo 3. (a) $2x + 1$, $x^2 - 7x + 10$ y $3x^3 + 5x^2 - 6$ son polinomios de primero, segundo y tercer grado en x, respectivamente. (b) $3x^2y5 + 4xy^3 - 7x^3y^2$ es un polinomio de tercer grado en x, quinto grado en y y séptimo grado en x e y.

Consideremos ahora la división de un polinomio por otro. Nuestro método seguirá al empleado en aritmética. Las propiedades que utilizaremos están expuestas en el problema 21 de la sección 2.4. Si dividimos 28 por 9, el cuociente es 3 y el residuo 1, y escribimos

Para dividir un polinomio por otro:

1 Ordénese cada polinomio según potencias descendentes de una letra común.

2. Divídase el primer término del dividendo (polinomio a dividirse) por el primer término del divisor. Esto da el primer término del cuociente.

3. Multiplíquese el divisor por el primer término del cuociente y réstese del dividendo el producto.

4. Utilizando el residuo así obtenido como nuevo dividendo, repítase el proceso, determinando así el segundo término del cuociente.

5. Continúese el proceso hasta obtener un residuo que sea igual a cero o de grado inferior en la letra común al del divisor. Si el residuo es cero, la división es exacta y la división es una aplicación del Teorema 2.14. Si el residuo no es cero, la división no es exacta, siendo en este caso aplicación del problema 21, sección 2.4.

La operación debe disponerse en la forma indicada en el ejemplo.

Ejemplo 2. Divídase $3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 + 6y^3$ por $x^2 - 2xy + 3y^2$.

Solución:

$$
\begin{array}{lr|ll}
\text{(Dividendo)} & 3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 + 6y^3 & x^2 - 2xy + 3y^2 & \text{(Divisor)} \\
 & \underline{3x^3 - 6x^2y + 9xy^2} & \overline{3x + 2y} & \text{(Cuociente)} \\
 & 2x^2y - 4xy^2 + 6y^3 & & \\
 & \underline{2x^2y - 4xy^2 + 6y^3} & & \\
 & 0 & \text{(Residuo)} &
\end{array}
$$

Este resultado puede expresarse en la forma

$$\frac{3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 + 6y^3}{x^2 - 2xy + 3y^2} \equiv 3x + 2y.$$

EJEMPLO 3. Divídase $5x^3 - 14x + 3$ por $x - 2$.

Solución. Como no aparece término en x^2 en el dividendo, el coeficiente de ese término es cero, y tenemos

$$\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & +\ 0x^2 & -\ 14x & +\ 3 & \ x - 2 \\
\cline{5-5}
5x^3 & -\ 10x^2 & & & 5x^2 + 10x + 6 \\
\cline{1-2}
 & 10x^2 & -\ 14x & +\ 3 & \\
 & 10x^2 & -\ 20x & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x & +\ 3 & \\
 & & 6x & -\ 12 & \\
\cline{3-4}
 & & & 15 &
\end{array}$$

Esto da

$$\frac{5x^3 - 14x + 3}{x - 2} \equiv 5x^2 + 10x + 6 + \frac{15}{x - 2}.$$

Obsérvese que no podemos poner $x = 2$ en esta expresión, ya que no podemos dividir por 0.

Una notación que se emplea con frecuencia para designar un polinomio en x es la expresión $P(x)$, que se lee «P de x» (esta expresión no significa P multiplicado por x); asimismo, un polinomio en x e y podría simbolizarse como $Q(x, y)$. Con esta notación, si $P(x)$ designa al dividendo, $D(x)$ al divisor, $Q(x)$ al cuociente y $R(x)$ al residuo de la división de dos polinomios en x, nuestro resultado podría expresarse

$$\frac{P(x)}{D(x)} \equiv Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \tag{3.8}$$

si $D(x)$ no es igual a cero, o

$$P(x) \equiv Q(x) \cdot D(x) + R(x). \tag{3.9}$$

(Nótese la semejanza entre esta igualdad y la proposición en el problema 21, sección 2.4. Análogamente, para la división de dos polinomios en x e y,

$$P(x, y) \equiv Q(x, y) \cdot D(x, y) + R(x, y). \tag{3.10}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4. En el ejemplo 2 de esta sección,

$$P(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 5xy^2 + 6y^3, \qquad D(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2,$$
$$Q(x, y) = 3x + 2y, \qquad R(x, y) = 0.$$

En el ejemplo 3,

$$P(x) = 5x^3 - 14x + 3, \qquad D(x) = x - 2, \ldots$$
$$Q(x) = 5x^2 + 10x + 6, \qquad R(x) = 15.$$

PROBLEMAS

Divídase:

1 $9xy^2 - 6x^3$ por $3x$

2 $4x^2y^3 - 24xy^4$ por $2xy^2$

3 $6x^3 - 9x^4y$ por $3xy$

4 $-15x^2y^3 + 20x^3y^2$ por $-5x^2y^2$

5 $3x^2y - 4xy^2 + 6x^3y^3$ por xy

6 $7x^3y^2 - 14x^5y^3 + 28x^8y^5 - 21x^7y^6$ por $7x^3y^2$.

Divídase, determinándose cuociente y residuo, y escríbase el resultado de cada problema en la forma de la ec. (3·9) ó (3.10)

7 $x^2 - 7x + 10$ por $x - 5$

8 $2y^2 - 5y - 6$ por $2y - 1$

9 $3x^2 - 13x + 4$ por $x - 4$

10 $2x^2 - 5x - 12$ por $2x + 3$

11 $2x^3 - 7x^2 + 11x - 4$ por $2x - 1$

12 $y^3 - 4y^2 - 2 + 5y$ por $y - 1$

13 $x^2y - 6x^3 - 12xy^2 - 6y^3$ por $2x - 3y$

14 $2x^3 - 11x^2y + 13xy^2 - 4y^3$ por $x - 4y$

15 $4x^3 + 5 + 4x^2 - 13x$ por $2x + 5$

16 $4x^3 + 5x - 6$ por $2x - 3$

17 $5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ por $x^2 - 2x + 1$

18 $4x^2 + x - 6x^3 + 3$ por $3x^2 + 5$

19 $x^6 - y^6$ por $x - y$

20 $x^7 - y^7$ por $x - y$

El proceso de división de polinomios en x (o cualquier letra) puede simplificarse notablemente cuando el divisor es de la forma $x - a$. Este proceso, conocido como *división abreviada** (*método de Ruffini-Horner*), se ilustrará con el problema del ejemplo 3. Escribiendo sólo los coeficientes, tenemos

$$\begin{array}{llll|l}
5 + & 0 - & 14 & 3 & 1 - 2 \\ \hline
\underline{5 - 10} & & & & 5 \quad 10 \quad 6 \\
 & 10 - & 14 & & \\
 & \underline{10 - 20} & & & \\
 & & 6 & 3 & \\
 & & \underline{6 -} & \underline{12} & \\
 & & & 15 &
\end{array}$$

* Conocida también como «división sintética». (*N. del T.*)

Omitimos en seguida aquellos coeficientes que son evidentes repeticiones; primer término en las líneas 2.ª, 4.ª, 6.ª, ... y el segundo término en las líneas 3.ª, 5.ª, 7.ª Si condensamos los términos restantes, escribimos el primer coeficiente, 5, en la tercera línea y observamos que el 1 del divisor puede omitirse, tenemos

$$\begin{array}{rrrr|l}
5 & +0 & -14 & 3 & \underline{-2} \\
 & -10 & -20 & -12 & \\
\hline
5 & 10 & 6 & 15 &
\end{array}$$

Los coeficientes del cuociente también se omiten, puesto que aparecen como los primeros tres coeficientes en la tercera línea, en tanto que el residuo, 15, aparece como el último número.

El último paso de simplificación es reemplazar las substracciones por sumas, esto es, cambiar los signos del divisor (-2 por 2) y en la segunda línea. Así,

$$\begin{array}{rrrr|l}
5 & +0 & -14 & 3 & \underline{2} \\
 & 10 & 20 & 12 & \\
\hline
5 & 10 & 6 & 15 &
\end{array}$$

Esta disposición representa la división abreviada de $5x^3 - 14x + 3$ por $x - 2$. Da como cuociente $5x^2 + 10x + 6$ y, como residuo, 15.

Resumamos el proceso de división abreviada Para dividir un polinomio $P(x)$ por un binomio $(x - a)$, dispóngase en una línea (en orden de potencias descendentes) los coeficientes de $P(x)$, colocando cero como coeficiente de toda potencia de x que falte y escríbase a a la derecha. Bájese el primer coeficiente de $P(x)$ al primer lugar de la tercera línea. Multiplíquese este primer coeficiente por a, escribiendo el producto en la segunda línea, bajo el segundo coeficiente de $P(x)$. La suma de este producto y el segundo coeficiente se coloca en la tercera línea. Multiplíquese esta suma por a, súmese el producto al coeficiente siguiente de x, escribiendo otra vez la nueva suma en la tercera línea y así, sucesivamente, hasta sumar un producto al último coeficiente de $P(x)$.

La última suma en la tercera línea es el residuo. Los números que preceden a ésta representan los coeficientes de las potencias de x, dispuestas en orden decreciente El cuociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al de $P(x)$. El proceso de división abreviada nos será muy útil más adelante.

EJEMPLO 4 Mediante división abreviada, determínese el cuociente y el residuo de $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ dividido por $x + 3$.

Solución. En este ejemplo $x - a = x - (-3)$, de modo que $a = -3$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & +3 & -4 & +5 & +6 & \underline{-3} \\
 & -6 & +9 & -15 & +30 & \\
\hline
2 & -3 & 5 & -10 & 36 &
\end{array}$$

El cuociente es entonces $2x^3 - 3x^2 + 5x - 10$ y el residuo, 36.

PROBLEMAS

Por medio de la división abreviada, determínese el cuociente y el residuo en cada una de las divisiones siguientes:

1 $3x^2 - 2x - 4$ por $x - 3$

2 $2x^3 + 3x^2 - 7$ por $x + 1$

3 $x^3 - 2x^2 + 9$ por $x + 2$

4 $x^3 + 4x - 7$ por $x - 3$

5 $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 8$ por (a) $x - 2$, (b) $x + 1$

6 $2x^4 - x^3 - 18x^2 - 7$ por (a) $x + 3$, (b) $x - 3$

7 $3x^4 - 7x - 20$ por (a) $x - 2$, (b) $x + 2$

8 $2x^4 - 3x^3 - 20x^2 - 6$ por (a) $x - 4$, (b) $x + 3$

Utilícese la división abreviada para determinar el cuociente y el residuo en las divisiones siguientes y exprésese el resultado en la forma de la ec. (3.9).

9 $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ por $x - 3$

10 $2x^3 + x^2 - x + 4$ por $x + 1$

11 $x^4 - 5x^3 + x^2 - 6$ por $x - 1$

12 $x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ por $x + 2$

13 Encuéntrese el valor de $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ en $x = 3$

14 Encuéntrese el valor de $2x^3 + x^2 - x + 4$ en $x = -1$

15 Encuéntrese el valor de $x^4 - 5x^3 + x^2 - 6$ en $x = 1$

16 Encuéntrese el valor de $x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ en $x = -2$

17 Compárense los valores obtenidos en los problemas 13 a 16 con los residuos en los problemas 9 a 12.

18 (a) Evalúese $ax^2 + bx + c$ en $x = p$
(b) Divídase $ax^2 + bx + c$ por $x - p$.
(c) Compárese el residuo encontrado en (b) con el valor obtenido en (a)
(d) ¿Podría esperarse el mismo tipo de resultado para un polinomio de cualquier grado?

3.4 Productos especiales

Existen ciertos productos especiales que ocurren en álgebra con tanta frecuencia que han sido clasificados. Están dados a continuación y cada uno de ellos es consecuencia directa de los axiomas del capítulo 2. *Las letras en las fórmulas pueden representar cualquier expresión algebraica.* El lector deberá no sólo verificar cada uno de ellos, efectuando las diferentes operaciones y dando las razones correspondientes, sino que también deberá memorizarlos en forma tal que pueda reconocer tanto el producto a partir de los factores como los factores a partir del producto.

$$a(x + y) \equiv ax + ay. \tag{3.11}$$

$$(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2. \tag{3.12}$$

$$(x \pm y)^2 \equiv x^2 \pm 2xy + y^2. \tag{3.13}^*$$

$$(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab. \tag{3.14}$$

$$(ax + b)(cx + d) \equiv acx^2 + (ad + bc)x + bd. \tag{3.15}$$

$$(x \pm y)^3 \equiv x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3. \tag{3.16}$$

$$(x \pm y)(x^2 \pm xy + y^2) \equiv x^3 \pm y^3. \tag{3.17}$$

El lector deberá determinar cuáles de las fórmulas precedentes son usadas en los ejemplos ilustrativos siguientes.

Ejemplo ilustrativo 1. $(2x^2 - 3y)(2x^2 + 3y) \equiv (2x^2)^2 - (3y)^2$
$\equiv 4x^4 - 9y^2.$

Ejemplo ilustrativo 2. $(x + 2)(x + 5) \equiv x^2 + (2 + 5)x + 10$
$\equiv x^2 + 7x + 10.$

Ejemplo ilustrativo 3. $(3x + 4y)(2x - 3y) \equiv 6x^2 + (-9 + 8)xy - 12y^2$
$\equiv 6x^2 - xy - 12y^2.$

Ejemplo ilustrativo 4.

$$\begin{aligned}(x + y - 1)^3 &\equiv [(x + y) - 1]^3\\ &\equiv (x + y)^3 - 3(x + y)^2 + 3(x + y) - 1\\ &\equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 + 3x + 3y - 1.\end{aligned}$$

$(x + y)$ es considerado primeramente como un solo término.

Ejemplo ilustrativo 5.

$$\begin{aligned}(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2) &\equiv (3x + 2y)[(3x)^2 - (3x)(2y) + (2y)^2]\\ &\equiv (3x)^3 + (2y)^3\\ &\equiv 27x^3 + 8y^3.\end{aligned}$$

Problemas

Determínense los productos siguientes:

1 $2a(3x - 4y)$

2 $-3x(2x + 7y)$

3 $-7xy(3x^2 + 4y)$

4 $4x^2yz(z^2 + xy + yz)$

5 $(2x - 3y)(2x + 3y)$

6 $(7x + 5y^2)(7x - 5y^2)$

---

* El signo $\pm$ se lee «más o menos». Si en el primer miembro se emplea el signo superior (inferior), debe usarse el correspondiente en el segundo miembro, de modo que $(x \pm y)^2 \equiv x^2 \pm 2xy + y^2$ significa $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$ y $(x - y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2$.

7 $(x + 2y)(x - 2y)(x^2 + 4y^2)$

8 $(x - 3)^2$

9 $(2x + 7y)^2$

10 $(3x^2y - 5z^2)^2$

11 $(x - 2)(x - 5)$

12 $(2x + 3)(x - 5)$

13 $(xy^2 - z^2w)^2$

14 $(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y)^2$

15 $(4x - 3y)(7x + 3y)$

16 $[(x + 1) - z][(x + 1) + z]$

17 $(2x + 3y + 3)(2x + 3y - 3)$

18 $(2x + 3y + 4z)^2$

19 $(x - 2y - z)^2$

20 $(2a + b)^3$

21 $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

22 $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

23 $(x + 3y + 2z - 4w)(x + 3y - 2z + 4w)$

24 $(4x - 2y - 3z + 3w)(4x + 2y + 3z + 3w)$

25 $(a - b + c - d)^2$

26 $(2a + 3b - c - 4d)^2$

27 $[2(x + 2y) - 3][2(x + 2y) + 4]$

28 $[2(x - 3y) + 5][3(x - 3y) - 2]$

29 $(2x + 3y)^3$

30 $(5x - 3y)^3$

3.5 Factores y descomposición en factores

El proceso de descomponer en sus factores una expresión algebraica es similar al de determinar los factores de un número compuesto. Recuérdese la explicación sobre números primos y compuestos en la sección 2.3. Este proceso, que a este nivel elemental se limita, por lo general, solo a la descomposición de polinomios con coeficientes racionales y factores totalmente libres de números irracionales, se efectúa corrientemente invirtiendo el proceso considerado en la sección 3.4. Tal descomposición es considerada completa cuando cada factor algebraico es un *factor primo*; esto es, una expresión algebraica que no puede a su vez descomponerse sin violar las restricciones precedentes.

A continuación, se ilustran los tipos de descomposición más comunes. Obsérvese la importancia y aplicación que tienen en esta discusión los axiomas de distributividad.

Ejemplo 1. Descompóngase en factores $2ax^2 - 4ay^2 + 8a^2x$.

Solución. El polinomio tiene como factor común $2a$.

$$2ax^2 - 4ay^2 + 8a^2x \equiv 2a(x^2 - 2y^2 + 4ax)$$

Ejemplo 2. Descompóngase $x(a + 2b) - 3y(a + 2b)$.

Solución. Cada una de las dos expresiones tiene el factor $(a + 2b)$. Por tanto,

$$x(a + 2b) - 3y(a + 2b) \equiv (x - 3y)(a + 2b).$$

EJEMPLO 3. Descompóngase $(4x^2//y^2) - (9a - b)2$.

Solución. Esta expresión es la diferencia de dos cuadrados perfectos.

$$\frac{4x^2}{y^2} - (9a - b)^2 \equiv \left(\frac{2x}{y}\right)^2 - (9a - b)^2$$
$$\equiv \left[\frac{2x}{y} + (9a - b)\right]\left[\frac{2x}{y} - (9a - b)\right]$$
$$\equiv \left(\frac{2x}{y} + 9a - b\right)\left(\frac{2x}{y}\ 9a + b\right)$$

EJEMPLO 4. Descompóngase $9x^2 - 30xy + 25y^2$.

Solución. Esta expresión es un cuadrado perfecto.

$$9x^2 - 30xy + 25y^2 \equiv (3x - 5y)^2.$$

EJEMPLO 5. Descompóngase $27x^3 + (8/y^3)$.

Solución. Esta expresión es la suma de dos cubos. Por consiguiente,

$$27x^3 + \frac{8}{y^3} = \left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(9x^2 - \frac{6x}{y} + \frac{4}{y^2}\right).$$

EJEMPLO 6. Descompóngase $12x^2 + 7xy - 10y^2$.

Solución. Este trinomio es de la forma de la ec. (3.15) y puede descomponerse por aproximación sucesiva. El resultado será de la forma $(ax + by)\cdot(cx + dy)$, donde $ac = 12$, $bd = -10$ y $ad + bc = 7$; a y c tienen ambos signos más, en tanto que b y d son de signos opuestos. La combinación correcta es $12x^2 + 7xy - 10y^2 \equiv (4x + 5y)(3x - 2y)$.

EJEMPLO 7. Descompóngase $6x^4 + 7x^2y^2 - 3y^4$.

Solución. Este ejemplo es similar al anterior.

$$6x^4 + 7x^2y^2 - 3y^4 \equiv (3x^2 - y^2)(2x^2 + 3y^2).$$

Aun cuando el primer factor del segundo miembro es la diferencia de dos cuadrados, no puede descomponerse en factores, pues ello acarrearía la introducción de cantidades irracionales.

PROBLEMAS

Descompónganse por completo en factores las expresiones siguientes

1 $4x - 20$

2 $10x + 15yz$

3 $3y^2 - 9y$

4 $4x^3y^2 + 6x^2y^3$

5 $xy^2z^3 - 3x^2yz^2 + 5xy^3z^2$

6 $a^2b^3c^4 - a^3b^4c^3 + 2a^2b^4c^4$

7 $3y(2x + 5) - 4x(2x + 5)$

8 $3y(4 - y) + 6x^2(4 - y)$

9 $2z^2(x + 3y) - 6xz(x + 3y)$

10 $3x(3 - 2y) - 2xy(3 - 2y)$

11 $9 - a^2$

12 $16x^2 - 9y^2$

13 $225a^8 - 64b^2$

14 $(c^6/d^6) - 121$

15 $x^3y^4 - 25xd^6$

16 $0{,}01x^4 - 196y^6$

17 $(x + 2y)^2 - z^2$

18 $(3x - 2y)^2 - 25z^2$

19 $(a + b)^2 - (c + d)^2$

20 $9(2x - y)^2 - 4(2a + b)^2$

21 $81(4x - 3y)^2 - 25(3z + w)^2$

22 $x^2 + 6x + 9 - (y^2 + 4y + 4)$

23 $x^2 - 8x + 16$

24 $4a^2 - 12ab + 9b^2$

25 $66xy + 9x^2y^2 + 121$

26 $2x^3 - 28x^2 + 98x$

27 $5z^2 - 30wz + 45w^2$

28 $x^{2n} + 2x^ny^n + y^{2n}$

29 $(3 - x)^2 + 8(3 - x) + 16$

30 $25 - 30(2x - 3y) + 9(2x - 3y)^2$

31 $a^3 - 8$

32 $1 + (8/x^9)$

33 $8x^{6n} + 27y^{3m}$

34 $x^3 - (y^3/64)$

35 $27(x - y)^3 - 8(x + y)^3$

36 $5(a - 2b)^3 - 625(a - 2b)^3$

37 $x^2 - 7x + 12$

38 $y^2 - 2y - 8$

39 $a^2b^2 - ab - 20$

40 $2x^2 + 8x + 6$

41 $35x^2 - 24x + 4$

42 $3y^2 - y - 10$

43 $6a^2 + 7a - 20$

44 $2x^2 - 23xy - 39y^2$

45 $(x + y)^2 - 7(x + y) + 10$

46 $(y + z)^2 + (y + z) - 42$

47 $2(2x + y)^2 - (2x + y) - 10$

48 $6(x + y)^2 + 5(x + y)(y + z) - 6(y + z)^2$

49 $12(a + b)^2 - 14(a + b)(c + d) - 10(c + d)^2$

50 $4(x - 2)^2 + 5(x - 2)(y + 4) - 21(y + 4)^2$

Existen muchas expresiones algebraicas que, mediante un agrupamiento adecuado, pueden reducirse a una de las formas de los ejemplos precedentes y luego descomponerse en factores.

EJEMPLO 8. Descompóngase en factores $ax - ay - bx + by$.

Solución. Si, aplicando el axioma de asociatividad, reunimos el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto y sacamos factor común (aplicando el axioma de distributividad), transformamos la expresión en la forma del ejemplo 2.

$$\begin{aligned} ax - ay - bx + by &\equiv a(x - y) - b(x - y) \\ &\equiv (x - y)(a - b). \end{aligned}$$

EJEMPLO 9. Descompóngase $4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Solución. Repitiendo la operación del ejemplo anterior,

$$\begin{aligned} 4x^3 - 12x^2 - x + 3 &\equiv 4x^2(x - 3) - (x - 3) \\ &\equiv (x - 3)(4x^2 - 1) \\ &\equiv (x - 3)(2x + 1)(2x - 1). \end{aligned}$$

En ambos ejemplos podríamos haber reunido el primer término con el tercero y el segundo con el cuarto, obteniendo el mismo resultado.

EJEMPLO 10. Descompóngase $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y - 3$.

Solución. Agrupando los primeros tres términos, la solución se ve claramente

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y - 3 &\equiv (2x - 3y)^2 + 2(2x - 3y) - 3 \\ &\equiv [(2x - 3y) + 3][(2x - 3y) - 1] \\ &\equiv (2x - 3y + 3)(2x - 3y - 1). \end{aligned}$$

EJEMPLO 11. Descompóngase $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$.

Solución. Si el coeficiente del segundo término fuera 6, la expresión sería un cuadrado perfecto; por tanto, sumando y restando $4x^2y^2$, la solución resulta evidente.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4 &\equiv x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4 - 4x^2y^2 \\ &\equiv (x^2 + 3y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &\equiv (x^2 + 3y^2 + 2xy)(x^2 + 3y^2 - 2xy). \end{aligned}$$

PROBLEMAS

Descompónganse en factores las expresiones siguientes:

1 $ax - ay - by + bx$

2 $ax - 2ay - 6by + 3bx$

3 $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

4 $y^3 - 2y^2 + 5y - 10$

5 $2a - 6 - ab^2 + 3b^2$

6 $x^3 + 3x^2 - 9x - 27$

7 $x^3 - 2x + 1 - y^2$

8 $xy^3 + 2y^2 - xy - 2$

9 $4x^2 - y^2 + 4y - 4$

10 $x^6 - 7x^3 - 8$

11 $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2zw - w^2$

12 $4a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - 4ab - 2xy$

13 $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y - 6$

14 $x^3 - 5x^2 - x + 5$

15 $x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4$

16 $y^4 + y^2 + 25$

17 $a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$

18 $x^4 + 5x^2 + 9$

19 $b^4 + 6b^2c^2 + 25c^2$

20 $25x^2 + 30xy + 9y^2 + 15x + 9y + 2$

21 $3ax - 6ay + 4bx - 8by + cx - 2cy$

22 $20xy + 7zw - 5yz - 28xw$

23 $z^4 + 4z^3 - 2z - 8$

24 $x^4 + 4y^4$

25 $a^8 - b^8$

26 $x^6 + 1$

27 $x^2 + 2xy - z^2 - 2yz$

28 $(x^2 + 2x - 3)^2 - 4$

29 $(x - y - 2z)^2 - (2x + y - z)^2$

30 $2(x + 2)^2(x - 3) + 3(x + 2)(x - 3)^2$

3.6 Simplificación de fracciones

Un principio básico sobre fracciones, tanto aritméticas como algebraicas, expresa que el valor de una fracción no cambia si el numerador y el denominador se multiplican o dividen por la misma cantidad (distinta de cero). Este principio fue enunciado en el Corolario 2.18. En consecuencia, la simplificación o reducción de una fracción a sus términos más simples es siempre posible. Para ello, bastará descomponer numerador y denominador en sus factores primos, y utilizando este principio básico, dividir numerador y denominador por el producto de sus factores comunes.

EJEMPLO 1. Redúzcase $(8x^4y^7)/(12x^6y^3)$ a sus términos más simples.

Solución

$$\frac{8x^4y^7}{12x^6y^3} \equiv \frac{2^3x^4y^7}{2^2 \cdot 3x^6y^3} \equiv \frac{2^2x^4y^3 \cdot 2y^4}{2^2x^4y^3 \cdot 3x^2}$$

Dividiendo numerador y denominador por $2^2x^4y^3$, tenemos

$$\frac{8x^4y^5}{12x^6y^3} \equiv \frac{2y^4}{3x^2}.$$

EJEMPLO 2. Redúzcase $(x^2 - 7x + 10)/(2x^2 - x - 6)$ a sus términos más simples.

Solución. Descomponiendo en factores numerador y denominador tenemos

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 - x - 6} \equiv \frac{(x - 5)(x - 2)}{(2x + 3)(x - 2)}.$$

y, dividiendo numerador y denominador por $x - 2$, esto es, aplicando el Corolario 2.18, obtenemos

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 - x - 6} \equiv \frac{x - 5}{2x + 3}.$$

La eliminación de un factor común, mediante la división del numerador y denominador de una fracción por este factor, se llama *cancelación multiplicativa o simplificativa*. Este proceso debe efectuarse con precaución, ya que el Corolario 2.18 es verdadero sólo cuando $x \neq 0$. En este caso, la identidad vale para todo valor de x a excepción de $x = 2$ ó $x = -\frac{3}{2}$, que no son valores permisibles.

Ejemplo 3. Redúzcase $(12x^2 + 30x - 72)/(52x - 8x^2 - 60)$ a sus términos más simples.

Solución:
$$\frac{12x^2 + 30x - 72}{52x - 8x^2 - 60} \equiv \frac{6(2x - 3)(x + 4)}{4(3 - 2x)(x - 5)} \equiv \frac{3(x + 4)}{2(5 - x)}.$$

Esta identidad se desprende del hecho de que $2x - 3 = -(3 - 2x)$. (Recuérdese el problema 7, sección 2.2.)

Problemas

Redúzcanse a sus términos más simples:

1 $\dfrac{28}{63}$

2 $\dfrac{27x^3}{225x^5}$

3 $\dfrac{a^4x^3y}{a^2xy^3}$

4 $\dfrac{a^2 + ab}{3a + 2a^3}$

5 $\dfrac{a^2x - a^2y}{ax^2 - ay^2}$ $a^2(x-y$

6 $\dfrac{24a^2}{6a^2 - 9a}$

7 $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

8 $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

9 $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16}$

10 $\dfrac{a^2 - 3a - 4}{a^2 - a - 12}$

11 $\dfrac{y^2 - y - 6}{y^2 + 2y - 15}$

12 $\dfrac{2x^2 + 5x - 12}{4x^2 - 4x - 3}$

13 $\dfrac{6a^2 - 7a - 3}{4a^2 - 8a + 3}$

14 $\dfrac{ax + ay - bx - by}{am - bm - an + bn}$

15 $\dfrac{14x - 24 - 2x^2}{x^2 + x - 20}$

16 $\dfrac{(4x^2 - 9y^2)(18x - 12)}{(2x - 3y)(12x - 8)}$

17 $\dfrac{x^2 - 36}{x^3 - 216}$

18 $\dfrac{2x^2 - 14x + 20}{7x - 2x^2 - 6}$

19 $\dfrac{2(x^2 - y^2)xy + x^4 - y^4}{x^4 - y^4}$

20 $\dfrac{y^6 + 64}{y^4 - 4y^2 + 16}$

21 $\dfrac{4a^2 - 1}{12a^2 + a - 4a^3 - 3}$

22 $\dfrac{a^2 - 2ab + 3b^2}{a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4}$

23 $\dfrac{(x^2 - 16)(x^2 - 4x + 16)}{x^3 + 64}$

24 $\dfrac{15ab - 20a - 21b + 28}{21 - a - 10a^2}$.

3.7 Adición de fracciones

La suma algebraica de dos o más fracciones con el mismo denominador es una fracción con este denominador común y cuyo numerador es la suma algebraica de los numeradores de las fracciones sumadas. Esto fue demostrado en el problema 1, sección 2.4.

$$\frac{2x^2}{x-4} - \frac{3x}{x-4} + \frac{5}{x-4} \equiv \frac{2x^2 - 3x + 5}{x-4}$$

Para determinar la suma algebraica de dos o más fracciones de distinto denominador, debemos substituir las fracciones por fracciones equivalentes que tengan todas el mismo denominador, siendo preferible, en este caso, emplear el *mínimo común denominador* (MCD). El MCD de dos o más fracciones es el producto de los factores primos de los denominadores, cada uno con exponente igual al máximo exponente al que el factor aparece elevado. Esta proposición es, en realidad, el resultado del siguiente importante teorema.

TEOREMA 3.5. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \equiv \dfrac{ad + bc}{bd} \quad (b, d \neq 0)$.

Demostración. Tenemos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \equiv \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd},$$

por el Corolario 2.18. Si aplicamos ahora el problema 6, sección 2.4, tenemos

$$\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \equiv \frac{ad + bc}{bd}.$$

que es el resultado pedido.

EJEMPLO 1. Determínese el MCD de las fracciones

$$\frac{3x}{x^2 - 4x + 4},$$

$$\frac{5x^2}{3(x^2 - 4)},$$

$$\frac{2}{2x^2 - x - 6}.$$

Solución. Descomponiendo cada denominador en factores, tenemos,

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &\equiv (x - 2)^2, \\ 3(x^2 - 4) &\equiv 3(x + 2)(x - 2), \\ 2x^2 - x - 6 &\equiv (2x + 3)(x - 2). \end{aligned}$$

El MCD es $3(x + 2)(x - 2)^2(2x + 3)$.

Después que el MCD ha sido determinado, las fracciones equivalentes pueden formarse dividiendo el MCD por el denominador de cada fraccion y en seguida multiplicando el numerador y el denominador de cada fracción por el resultado respectivo. Las fracciones equivalentes pueden entonces sumarse como en el ejemplo ilustrativo anterior.

EJEMPLO 2. Transfórmense las fracciones siguientes en fracciones equivalentes con el MCD como denominador, y determínese su suma.

$$\frac{4}{x + 2}, \quad \frac{x + 3}{x^2 - 4}, \quad \frac{2x + 1}{x - 2}.$$

Solución. El MCD es $(x + 2)(x - 2)$. Por tanto,

$$\frac{4}{x + 2} \equiv \frac{4(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)}, \quad \frac{x + 3}{x^2 - 4} \equiv \frac{x + 3}{(x + 2)(x - 2)},$$

$$\frac{2x + 1}{x - 2} \equiv \frac{(2x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)}.$$

y

$$\begin{aligned} &\frac{4}{x + 2} + \frac{x + 3}{x^2 - 4} + \frac{2x + 1}{x - 2} \\ &\equiv \frac{4(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{x + 3}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{(2x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} \\ &\equiv \frac{(4x - 8) + (x + 3) + (2x^2 + 5x + 2)}{x^2 - 4} \\ &\frac{2x^2 + 10x - 3}{x^2 - 4}. \end{aligned}$$

Problemas

Redúzcase cada una de las expresiones siguientes a una fracción única y simplifíquese.

1 $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{3}{10}$ $= \frac{72}{60}$

2 $5 - \frac{4}{9} - \frac{7}{15}$

3 $\dfrac{3x}{4y} - \dfrac{4y}{3x}$

4 $\dfrac{a^2}{b} - \dfrac{b^2}{a}$

5 $\dfrac{2x+3}{6} - \dfrac{4x-7}{9}$

6 $\dfrac{3x-1}{5} + \dfrac{4-5x}{6}$

7 $x + y + \dfrac{x^2}{x-y}$

8 $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{x+3}{x}$

9 $\dfrac{3x-2y}{5x-3} + \dfrac{2x-y}{3-5x}$

10 $\dfrac{2}{12x^2-3} + \dfrac{3}{2x-4x^2}$

11 $\dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{3}{z}$

12 $\dfrac{4}{x^2-4x-5} + \dfrac{2}{x^2-1}$

13 $\dfrac{2x-1}{4-x} + \dfrac{x+2}{3x-12}$

14 $\dfrac{x+5}{x^2+7x+10} - \dfrac{x-1}{x^2+5x+6}$

15 $\dfrac{x-1}{2x^2-13x+15} + \dfrac{x+3}{2x^2-15x+18}$

16 $\dfrac{2x+3}{3x^2+x-2} - \dfrac{3x-4}{2x^2-3x-5}$

17 $\dfrac{3}{a-3} + \dfrac{a^2+2}{a^3-27}$

18 $\dfrac{2xy}{x^3+y^3} - \dfrac{x}{x^2-xy+y^2}$

19 $\dfrac{2}{x^2+3x+2} - \dfrac{3}{x^2+5x+6} - \dfrac{4}{x^2+4x+3}$

20 $x + 6 + \dfrac{5x+1}{12x^2+5x-2} - \dfrac{x}{3x+2}$

21 $2y - 3 + \dfrac{y-2}{4y^2-12y+9} + \dfrac{y+2}{2y^2-y-3}$

22 $\dfrac{1}{(x-y)(y-z)} + \dfrac{1}{(y-z)(z-x)} + \dfrac{1}{(z-x)(x-y)}$

23 $\dfrac{x}{(x-y)(y-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(z-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(x-y)}$

24 $\dfrac{2x-1}{2x^2-x-6} + \dfrac{x+3}{6x^2+x-12} - \dfrac{2x-3}{3x^2-10x+8}$

3.8 Multiplicación y división de fracciones

En álgebra como en aritmética, el producto de dos o más fracciones es una fracción cuyo numerador es el producto de todos los numeradores y cuyo denominador es el producto de todos los denominadores. El resultado debe reducirse

a su forma más simple dividiendo numerador y denominador de la fracción producto por sus factores comunes. Nótese en el ejemplo ilustrativo 1 que este método es una aplicación directa del Teorema 2.17, seguida de una aplicación del Corolario 2.18.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1.

$$\frac{x-4}{2x+8}\cdot\frac{4x+8}{x^2-16}\equiv\frac{(x-4)\cdot 2^2\cdot(x+2)}{2(x+4)(x+4)(x-4)}$$

$$=\frac{2(x+2)}{(x+4)^2}.$$

Necesitamos ahora un teorema que nos proporcione un método para dividir dos fracciones.

TEOREMA 3.6. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\equiv\frac{a/b}{c/d}\equiv\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\qquad(b, c, d\neq 0).$

Demostración. (Dense las razones de cada paso.)

$$\frac{a/b}{c/d}\equiv\frac{(a/b)\cdot(d/c)}{(c/d)\cdot(d/c)}\equiv\frac{(a/b)\cdot(d/c)}{(cd)/(cd)}\equiv\frac{(a/b)\cdot(d/c)}{1}\equiv\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Como consecuencia de este teorema, podemos enunciar la regla siguiente: el cuociente de dos fracciones es la fracción obtenida multiplicando el dividendo por el divisor invertido.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. $\frac{3x-15}{x+3}\div\frac{12x+18}{4x+12}\equiv\frac{3x-15}{x+3}\cdot\frac{4x+12}{12x+18}$

$$\equiv\frac{3(x-5)}{x+3}\cdot\frac{4(x+3)}{6(2x+3)}$$

$$\equiv\frac{2(x-5)}{2x+3}.$$

PROBLEMAS

Efectúense las operaciones que se indican en las siguientes fracciones simples, reduciendo cada resultado a su forma más simple.

1 $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{7}$

2 $\frac{3}{4}\div\frac{13}{11}$

3 $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{15}$

4 $\frac{4}{7}\div\frac{16}{21}$

5 $\frac{7}{22}\cdot\frac{33}{35}$

6 $\frac{6}{7}\div\frac{8}{9}$

7 $\frac{3x^3}{4y^2}\cdot\frac{5y}{x^2}$

8 $\frac{7a}{12b^3}\cdot\frac{20b^5}{35a^3}$

9 $\dfrac{40x^3y^2}{24xy^4} \div \dfrac{27xy}{8x^2y^3}$

10 $\dfrac{xy^3}{yz} \div x^2z$

11 $\dfrac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3} \div \dfrac{x + y}{x}$

12 $\dfrac{x^2 - 2x + y^2}{x^3 - y^3} \cdot \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x - y}$

13 $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12} \cdot \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9x - 36}{x^4 - 81}$

14 $\dfrac{y^2 - 2y - 15}{y^2 - 9} \div \dfrac{12 - 4y}{y^2 - 6y + 9}$

15 $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 7x + 12} \cdot \dfrac{x + 1}{x^2 + 4x - 5}$

16 $\dfrac{2x^2 - 3x - 14}{2x^2 - 3x - 5} \cdot \dfrac{2x^2 - x - 10}{2x^2 - 5x - 7}$

17 $\dfrac{y + 1}{x - 2} \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{6} \cdot \dfrac{y - 1}{xy^2 - x}$

18 $\dfrac{ab + ac}{ab - ac} \cdot \dfrac{b}{b + c} \div \dfrac{b}{b - c}$

19 $\dfrac{x^4 - y^4}{(x - y)^2} \cdot \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \dfrac{x - y}{xy + y^2}$

20 $(a^2 - b^2) \div \left[\dfrac{a^2 + ab}{b^2 + ab} \div \dfrac{a^2 - ab}{b^2 - ab}\right]$

21 $\dfrac{9x^2 + 6x - 8}{6x^2 + 5x - 4} \cdot \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{2x^2 - 5x - 12} \cdot \dfrac{4x^2 + 4x - 3}{6x^2 - x - 2}$

22 $\left[\dfrac{y^3 + 4y^2 - 5y}{y^2 - 2y + 1} \div \dfrac{y^2 + y - 2}{y^4 + 8y}\right] \cdot \dfrac{y - 4}{y^2 - 2y + 4}$

23 $\left[\dfrac{2x}{x - 1} + \dfrac{x^2}{x^2 - 1}\right] \div \dfrac{x^3}{1 - x}$

24 $\left[\dfrac{3x}{x - 3} - \dfrac{3x + 2}{x^2 - 6x + 9}\right] \cdot \left[\dfrac{x + 2}{x + 3} - \dfrac{x}{x^2 + 6x + 9}\right]$

La mayor parte de las fracciones consideradas hasta aquí han sido fracciones simples. Toda fracción que contiene una o más fracciones en su numerador o denominador, o en ambos, se llama fracción *compuesta*. Puede simplificarse reduciendo numerador y denominador a fracciones simples y en seguida efectuando la división.

EJEMPLO. Simplifíquese $\dfrac{a - \dfrac{1}{a}}{a - \dfrac{1}{a^2}}$

Solución.

$$\frac{a - \dfrac{1}{a}}{a - \dfrac{1}{a^2}} = \frac{a^2 - 1}{a} \div \frac{a^3 - 1}{a^2}$$

$$= \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} \cdot \frac{a^2}{(a - 1)(a^2 + a + 1)}$$

$$= \frac{a(a + 1)}{a^2 + a + 1}.$$

PROBLEMAS

Redúzcase cada una de las expresiones siguientes a una fracción en su forma más simple.

1 $\dfrac{3 + \dfrac{4}{5}}{\dfrac{2}{3} - 1}$

2 $\dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}}{ab + ac}$

3 $\dfrac{x - \dfrac{x}{y}}{z - \dfrac{z}{y}}$

4 $\dfrac{\dfrac{4x}{5} + \dfrac{2y}{3}}{\dfrac{3x}{5} - \dfrac{3y}{4}}$

5 $\dfrac{\dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y}}{\dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y}}$

6 $\dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}}$

7 $\dfrac{x^2 - \dfrac{1}{x}}{x + 1 + \dfrac{1}{x}}$

8 $\dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2x}}$

9 $\dfrac{9x^2 - 4y^2}{\dfrac{x - y}{y - 2x} - 1}$

10 $\dfrac{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}$

11 $\dfrac{x + \dfrac{y}{x + y}}{x + y - \dfrac{x}{x + y}}$

12 $\dfrac{a}{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{a - 1}}}$

3.9 Exponentes enteros y exponente cero

En la Sección 3.2 analizamos el significado de $a^n (a \neq 0)$ donde n es un entero positivo. Para definir a^n donde n es un entero cualquiera, positivo, negativo o nulo ($n \in I$), podemos utilizar los teoremas sobre exponentes [ecs. (3.2) a (3.7)]. Recordemos por la ec. (3.7) que $a^n/a^n \equiv 1$ Si la ec. (3.5) fuera permisible, tendríamos $a^{n-n} = a^0 = 1$. Esto es permisible, puesto que m no puede ser igual a n, pero podemos usar esta relación y la ec. (3.6) para justificar las definiciones siguientes:

DEFINICIÓN 3.2. *Para todo $a \in R (a \neq 0)$,*

$$a^0 \equiv 1. \tag{3.18}$$

DEFINICIÓN 3.3. *Para todo $a \in R (a \neq 0)$ y para todo entero positivo n,*

$$a^{-n} \equiv \frac{1}{a^n}. \tag{3.19}$$

De aquí resultan los siguientes teoremas.

TEOREMA 3.7. *Para todo* $a \in R(a \neq 0)$ *y todo* $n, m \in I$,

$$a^n a^m \equiv a^{n+m}, \tag{3.20}$$

$$(ab)^n \equiv a^n b^n, \tag{3.21}$$

$$(a^n)^m \equiv a^{nm}, \tag{3.22}$$

y

$$\frac{a^n}{a^m} \equiv a^{n-m}. \tag{3.23}$$

Demostraciones Las demostraciones se siguen directamente de las definiciones precedentes y se dejan como ejercicios.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS $5^0 = 1, \quad 2x^0 \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2, \quad (2x^2y)^0 \equiv 1,$

$$x^{-2} \equiv \frac{1}{x^2}, \quad (x^3)^4 \equiv x^{12}, \quad \frac{x^3}{x^5} \equiv x^{-2} \equiv \frac{1}{x^2}.$$

PROBLEMAS

Elimínense los exponentes negativos y nulos y simplifíquense las expresiones siguientes:

1 $8x^0$

2 $(8x)^0$

3 $3x^{-2}y^4$

4 $5y^{-2}x^3z^0$

5 $\dfrac{2x^3y^{-2}}{3x^{-2}y^3}$

6 $\dfrac{4x^{-2}y^4}{6x^{-5}y^{-2}}$

7 $\dfrac{a^{-1} + b^{-1}}{(cd)^{-1}}$

8 $\dfrac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}$

9 $\dfrac{a^{-1} + b^{-1}}{(a + b)^{-1}}$

10 $(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$

11 $(x^n y^3)^m$

12 $(-1)^n(-1)^m(-1)^t$

13 Demuéstrese el Teorema 3.7, (a) ec. (3.20), (b) ec. (3.21).

14 Demuéstrese el Teorema 3.7, (a) ec. (3.22), (b) ec. (3.23).

3.10 Exponentes racionales

En la sección anterior generalizamos nuestras definiciones sobre exponentes a exponentes negativos y cero; ahora las generalizaremos a exponentes racionales.

Definición 3.4. *Todo número a cuya potencia de exponente (n es un entero positivo) es igual a b y que satisface la ecuación $a^n = b$ se llama* raíz n-ésima de b.

Recordemos que, por ejemplo, tanto 2 como -2 son raíces cuadradas de 4, puesto que $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$. Análogamente, como $(-2)^3 = -8$, -2 es una raíz cúbica de -8. En general, todo número a excepción de cero tiene exactamente n raíces n-ésimas, si bien la mayoría o todas pueden ser números complejos.* En muchos casos es conveniente definir una raíz n-ésima principal. *La raíz n-ésima principal de un número positivo* es la raíz positiva. *La raíz n-ésima principal de un número negativo* es la raíz negativa si n es impar. Si n es par y el número es negativo, la raíz principal no se define porque no existe ningún valor real. (Considérese por ejemplo, la ecuación $x^2 = -4$) El símbolo $\sqrt[n]{b}$ significa raíz n-ésima principal de b, n se llama *índice* y b *cantidad subradical* de la raíz o *radical*.

Ejemplo ilustrativo 1. $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ y $\sqrt[4]{81} = 3$ son las raíces principales de índices 2 (cuadrada), 3 (cúbica), 4 (cuarta) de 9, -8 y 81, respectivamente.

Ahora podemos generalizar los teoremas sobre exponentes al caso $n \in Q$. Consideremos un número racional cualquiera p/q, donde p y q son enteros positivos primos entre sí. Si $n = 1/q$ donde q es un entero positivo cualquiera y queremos tener un resultado compatible con la ec. (3.2), esto es, queremos tener

$$\underbrace{b^{1/q} \cdot b^{1/q} \cdot b^{1/q} \ldots b^{1/q}}_{q \text{ factores } b^{1/q}} \equiv b^{q/q} \equiv b, \tag{3.24}$$

debemos definir $b^{1/q}$ como una raíz q-ésima de b; más precisamente, lo definimos como la raíz principal. Asimismo, para satisfacer la ec. (3.3) debemos definir

Definición 3.5. $(b^{1/q})^p \equiv b^{p/q}$ (3.25)

Esta identidad expresa que $b^{1/q}$ es una raíz p-ésima de $b^{p/q}$ y que $b^{p/q}$ es la potencia de exponente p de la raíz q-ésima principal de b. Además, usando la ec. (3.25), podemos demostrar que

$$\underbrace{b^{p/q} \cdot b^{p/q} \cdot b^{p/q} \cdots b^{p/q}}_{q \text{ factores } b^{p/q}} \equiv b^p, \tag{3.26}$$

de modo que $b^{p/q}$ es también la raíz q-ésima principal de b^p. Por tanto, tenemos por las ecs. (3.25) y (3.26) y la notación precedente

$$b^{p/q} \equiv (b^p)^{1/q} \equiv \sqrt[q]{b^p}, \qquad (3.27)†$$

* Véase capítulo 7.

† Debemos excluir el caso en que b es negativo y q es par, analogamente a como lo hicimos en la definición de valor principal.

y también

$$b^{p/q} \equiv (b^{1/q})^p \equiv (\sqrt[q]{b})^p. \tag{3.28}$$

Puede demostrarse ahora que los cinco teoremas sobre exponentes, ecs. (3.19) a (3.23), son válidos tanto para exponentes racionales (elementos de Q) como para enteros (elementos de Z).

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, ó
$= (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4.$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. $81^{-3/4} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}.$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4. $x^{1/4} \cdot x^{2/3} \equiv x^{1/4 + 2/3} \equiv x^{11/12} \equiv \sqrt[12]{x^{11}}.$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5. $x^{1/4} \div x^{2/3} \equiv x^{1/4 - 2/3} \equiv x^{-5/12} \equiv \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^5}}.$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6. $(x^{-4})^{-3/4} \equiv x^3.$

PROBLEMAS

Todas las letras que aparecen en los problemas 10 a 30 representan números reales positivos. Determínense los valores numéricos de las expresiones siguientes:

1 $25^{1/2}$ 2 $81^{3/4}$

3 $(\frac{16}{49})^{1/2}$ 4 $(\frac{8}{125})^{-1/3}$

5 $(\frac{64}{27})^{2/3}$ 6 $32^{-4/5}$

7 $(2^{10})^{-3/5}$ 8 $(2^{-6})^{2/3}$

9 $3^{7/2} \cdot 3^{1/2}$.

Elimínense los exponentes negativos, simplifíquese y exprésese el resultado en forma de radical.

10 $x^{1/4} \cdot x^{1/5}$ 11 $x^{1/4} \div x^{1/5}$

12 $(x^{1/4})^{1/5}$ 13 $x^{1/4} \cdot x^{-1/5}$

14 $(x^{1/4})^{-1/5}$ 15 $(x^{-1/4})^{-1/5}$

Elimínense los exponentes negativos y nulos y simplifíquese.

16 $(9x^{-4}y^2)^{1/2}$ 17 $(2x^{1/6}y^{5/6})^{-6}$

18 $(2x^{-3}y^4)^3$ 19 $\left(\dfrac{125x^4y^3}{27x^{-2}y^6}\right)^{1/3}$

20 $\left(\dfrac{5^0x^4y^3z}{16x^{-6}yz^5}\right)^{-1/2}$ 21 $(a^{1/2} + b^{1/2})^2$

22 $(a^{1/2} + b^{1/2})(a^{1/2} - b^{1/2})$

23 $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

24 $(x + y)^{-2}(x^{-2} - y^{-2})$

25 $(x + y^{-1})^2$

26 $\dfrac{a^2 - a^{1/2}}{a^{3/2}}$

27 $\dfrac{a^2 + 2a^{-1} - a^{-1/2}}{a^{1/2}}$

28 $(x^2 + 6x + 9)^{1/2}$

29 (a) Encuéntrese el valor de:

$$(x^2 - 2x + 1)^{1/2} + (x^2 + 2x + 1)^{1/2}.$$

(b) Muéstrese mediante un ejemplo que $2x$ no es siempre el resultado correcto.

30 (a) Encuéntrese el valor de:

$$(x^2 + 10x + 25)^{1/2} - (x^2 - 10x + 25)^{1/2}.$$

(b) Muéstrese mediante un ejemplo que 10 no es siempre el resultado correcto.

3.11 Radicales

En muchos casos es más ventajoso expresar una cantidad en función de radicales que en función de exponentes fraccionarios. Las leyes de los radicales se desprenden directamente de las definiciones anteriores y de los teoremas sobre exponentes. Si m y n son enteros positivos y uno de ellos es par, y a y b son positivos,

$$(\sqrt[n]{a})^n \equiv a, \tag{3.29}$$

$$\sqrt[n]{ab} \equiv (ab)^{1/n} \equiv a^{1/n} \cdot b^{1/n} \equiv \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \tag{3.30}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \equiv \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} \equiv \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} \equiv \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \tag{3.31}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \equiv (a^{1/n})^{1/m} \equiv a^{1/mn} \equiv \sqrt[mn]{a} \tag{3.32}$$

Ejemplo ilustrativo 1. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$

Ejemplo ilustrativo 2. $\sqrt[3]{\dfrac{4}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}.$

Ejemplo ilustrativo 3. $\sqrt[6]{27} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3}.$

Utilizando estas leyes diremos que un radical ha sido simplificado completamente cuando: (1) ningún factor que sea potencia n-ésima perfecta aparece bajo un radical de índice n, (2) no hay fracciones bajo el signo radical, (3) el radical tiene el mínimo índice posible.

Todo radical que satisface estas condiciones se dice estar en su *forma más*

simple. Además de los tres ejemplos ilustrativos precedentes que están en sus formas más simples, daremos los siguientes.

Ejemplo 1. Simplifíquese $\sqrt[3]{81x^5y^7}$.

Solución. Debemos eliminar en la cantidad subradical todos los factores que son cubos perfectos.

$$\sqrt[3]{81x^5y^7} \equiv \sqrt[3]{27x^3y^6 \cdot 3x^2y} \equiv \sqrt[3]{27x^3y^6} \cdot \sqrt[3]{3x^2y} \equiv 3xy^2\sqrt[3]{3x^2y}.$$

Ejemplo 2. Simplifíquese $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Solución. Por conveniencia de cálculo, es importante eliminar toda fracción que aparezca como cantidad subradical; en esa forma, el radical puede aproximarse mediante una sola extracción de raíz y una división sencilla en lugar de dos extracciones de raíz y una división mas complicada Transformando el denominador en cuadrado perfecto podemos eliminarlo de la cantidad subradical.

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ejemplo 3. Simplifíquese $\sqrt[4]{64x^2y^4/z^2}$.

Solución. Los problemas de este tipo se resuelven en forma más conveniente si se introducen exponentes fraccionarios. En esa forma, para eliminar el denominador de la cantidad subradical, tenemos

$$\sqrt[4]{\frac{64x^2y^4}{z^2}} = \left(\frac{2^6x^2y^4}{z^2}\right)^{1/4} \equiv \frac{2^{3/2}x^{1/2}y}{z^{1/2}} \cdot \frac{z^{1/2}}{z^{1/2}} \equiv \frac{2y}{z}\sqrt{2xz}.$$

Problemas

Simplifíquese cada una de las expresiones siguientes, siendo a, b, x, y y z cantidades positivas.

1 $\sqrt{8}$

2 $\sqrt{98}$

3 $\sqrt{\frac{75}{12}}$

4 $\sqrt[3]{40}$

5 $\sqrt[3]{-625}$

6 $\sqrt[4]{32}$

7 $\sqrt{27x^3y^5}$

8 $\sqrt{192a^3b^7}$

9 $\sqrt[3]{81z^4x^6y^5}$

10 $\sqrt{\frac{3}{5}}$

11 $\sqrt{\frac{125}{63}}$

12 $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}}$

13 $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2}$

14 $\sqrt{a^{-2} + b^{-2}}$

15 $\sqrt{\frac{3x}{y^3}}$

16 $\sqrt{\frac{6}{24}}$

17 $\sqrt[3]{\frac{3}{16}}$

18 $\sqrt{\dfrac{2x}{3y^3}}$

19 $\sqrt[3]{\dfrac{27x^4}{2y^2}}$

20 $\sqrt[4]{\dfrac{4x^5y}{81z^3}}$

21 $\sqrt{x + 6 + \dfrac{9}{x}}$

22 $\sqrt[3]{\dfrac{x^4y}{z^2}}$

23 $\sqrt[4]{\dfrac{x^7y^6}{243}}$

24 $\sqrt{x - 2 + \dfrac{1}{x}}$

25 $\sqrt[4]{25}$

26 $\sqrt[6]{49x^4}$

27 $\sqrt[3]{\dfrac{5}{3x^2}}$

28 $\sqrt[6]{\frac{9}{16}}$

29 $\sqrt[4]{\dfrac{169x^6z^2}{y^4}}$

30 $\sqrt[4]{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}}$

3.12 Adición y substracción de radicales

Al sumar o restar radicales, todos los radicales semejantes (esto es, que tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical) se combinan en un solo término. Considérese el ejemplo.

Ejemplo. Simplifíquese, reduciendo términos semejantes.

$$4\sqrt{12} + 5\sqrt{8} - \sqrt{50} - 7\sqrt{48}.$$

Solución:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{12} + 5\sqrt{8} - \sqrt{50} - 7\sqrt{48} &= 4\sqrt{4\cdot 3} + 5\sqrt{4\cdot 2} - \sqrt{25\cdot 2} - 7\sqrt{16\cdot 3} \\ &= 8\sqrt{3} - 28\sqrt{3} + 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} - 20\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Problemas

Simplifíquese, reduciendo términos semejantes.

1 $4\sqrt{3} - 5\sqrt{12} + 2\sqrt{75}$

2 $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54}$

3 $5\sqrt{2} - \sqrt[4]{64} + 2\sqrt{32}$

4 $\sqrt{x^3} + \sqrt{25x^3} + \sqrt{9x}$

5 $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

6 $2\sqrt{2} - \sqrt{50} + 3\sqrt{32}$

7 $2\sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{243}$

8 $2\sqrt{5} - \sqrt{125}$

9 $\sqrt{450} + \sqrt{8} - \sqrt{98}$

10 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{4}{\sqrt{27}} + 2\sqrt{3}$

11 $\sqrt[3]{a^4b} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2}} + 3\sqrt[3]{ab^4}$

12 $\sqrt[3]{27a^4} + \sqrt[3]{-64a^7} + 7\sqrt[3]{a}$

13 $\sqrt{4(x+y)} - 2\sqrt{9(x+y)} + 3\sqrt{x+y}$

14 $3\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + 3\sqrt{12} - 3\sqrt{3}$

15 $\sqrt{a^3bc^5} + \sqrt{ab^7c^3} + \sqrt{a^9b^5c}$

16 $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} \quad \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\dfrac{a^2}{a^2-b^2}}$

17 $8\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\sqrt{108} - \sqrt[4]{9}$

18 $\sqrt{\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right)\dfrac{1}{xy}} - \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

19 $\dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 10}}{2}$

20 $\dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 2}}{2}$

3.13 Multiplicación y división de radicales

Para multiplicar dos o más radicales se aplica la regla establecida en la ec. (3.30). Si los radicales tienen el mismo índice, el resultado es inmediato. Si, en cambio, son de distinto índice, deben convertirse previamente en radicales con el mismo índice. Esto es siempre posible y puede efectuarse con el empleo de expresiones equivalentes que tengan exponentes fraccionarios.

EJEMPLO 1. Determínese el producto de $\sqrt{15ax^3}$ y $\sqrt{45a^2xy^3}$ y simplifíquese.

Solución. Puesto que ambos radicales tienen el mismo índice, 2, podemos aplicar de inmediato la ec. (3.30).

$$\sqrt{15ax^3}\cdot\sqrt{45a^2xy^3} \equiv \sqrt{15^2\cdot 3a^3x^4y^3} \equiv 15ax^2y\sqrt{3ay}.$$

EJEMPLO 2. Multiplíquese $\sqrt{6x^3}$ por $\sqrt[3]{4x^4y^2}$ y simplifíquese.

Solución. Expresando los radicales como potencias de exponentes fraccionarios, tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{6x^3}\cdot\sqrt[3]{4x^4y^2} &\equiv (3\cdot 2x^3)^{1/2}\cdot(2^2x^4y^2)^{1/3}\\ &\equiv (3\cdot 2x^3)^{3/6}\cdot(2^2x^4y^2)^{2/6} \equiv (3^3\cdot 2^3\cdot x^9\cdot 2^4x^8y^4)^{1/6}\\ &\equiv \sqrt[6]{3^3\cdot 2\cdot 2^6x^{12}\cdot x^5y^4} \equiv 2x^2\sqrt[6]{54x^5y^4}.\end{aligned}$$

La división de dos radicales se efectúa en forma análoga, utilizando la ec. (3.31). Si los radicales tienen distintos índices, deben reducirse primero a un índice común.

EJEMPLO 3. Divídase $6\sqrt[3]{5}$ por $2\sqrt{3}$ y simplifíquese.

Solución. Como $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$ y $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$, tenemos

$$\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt[6]{\frac{25}{27}}$$

Recordando que un radical en su forma más simple debe tener el denominador libre de radicales, debemos multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[6]{27}$. De este modo,

$$\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt[6]{\frac{25\cdot 27}{27\cdot 27}} = 3\sqrt[6]{\frac{25\cdot 27}{3^6}} = \frac{3}{3}\sqrt[6]{25\cdot 27} = \sqrt[6]{675}.$$

El proceso de eliminar radicales del denominador, ilustrado en el ejemplo 3, y ejemplo 2, sección 3.11, se llama *racionalizar el denominador*. Cuando se trata de eliminar todos los radicales de un denominador, el problema puede ser bastante complicado.

EJEMPLO 4. Racionalizar el denominador de $(2 + \sqrt{3})/(\sqrt{5} - \sqrt{3})$.

Solución. Puesto que queremos eliminar los dos radicales del denominador, debemos encontrar una expresión (*factor racionalizador*) que, multiplicado por $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, dé un resultado sin radicales. Como

$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 5 - 3,$$

multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{15} + 2\sqrt{3} + 3}{5 - 3}$$

$$= \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{15} + 2\sqrt{3} + 3}{2}.$$

PROBLEMAS

Efectúense las multiplicaciones siguientes, expresando el resultado en su forma más simple:

1. $\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}$
2. $\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}$
3. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{26}$
4. $\sqrt[3]{3x^2}\cdot\sqrt{2x}$
5. $\sqrt{x^2 - y^2}\cdot\sqrt{x - y}$
6. $\sqrt{3x^2y^3}\cdot\sqrt{12x^5y}$
7. $\sqrt{x^3 + y^3}\cdot\sqrt{x + y}$
8. $\sqrt[3]{9x}\cdot\sqrt[6]{27x^4}$
9. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}$
10. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$
11. $\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{14})$
12. $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$
13. $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$
14. $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2$
15. $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$
16. $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
17. $\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2$
18. $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2$

Efectúense las divisiones siguientes, expresando el resultado en su forma más simple:

19 $4\sqrt{28} \div 3\sqrt{7}$

20 $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{108}{25}}$

21 $\sqrt[6]{12} \div \sqrt{3}\sqrt[3]{2}$

22 $(2\sqrt{6} + 3\sqrt{14}) \div \sqrt{2}$

23 $\sqrt[4]{24a^3b} \div \sqrt[4]{8ab^3}$

24 $\sqrt{xy^2} \div \sqrt[3]{x^2y}$.

Racionalícese el denominador de cada una de las fracciones siguientes:

25 $\dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}$

26 $\dfrac{2\sqrt[3]{3}}{4\sqrt[3]{5}}$

27 $\dfrac{4}{\sqrt[3]{16}}$

28 $\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

29 $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

30 $\dfrac{3}{2+\sqrt{3}}$

31 $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

32 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

33 $\dfrac{x}{x+\sqrt{y}}$

34 $\dfrac{y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

35 $\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{3\sqrt{7}-5\sqrt{3}}$

36 $\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{-x+2}}$

37 $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+3}}$

38 $\dfrac{y}{\sqrt{y^2-16}-y}$

39 $\dfrac{x-\sqrt{x^2-9}}{x+\sqrt{x^2-9}}$

40 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$

41 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2-1}}$

42 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

Indicación: $x^3 + y^3 \equiv (x+y)(x^2 - xy + y^2)$.

43 $\dfrac{2}{2-\sqrt[3]{3}}$

44 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

45 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Indicación: Multiplíquense numerador y denominador por $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) - \sqrt{5}$.

En los problemas 46 a 50 usamos la tabla de raíces cuadradas (tabla I) para calcular cada expresión con tres cifras decimales.

46 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

47 $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$

48 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

49 $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

50 $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{5}}$

PROBLEMAS

1 $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$, donde $h \neq 0$, es idéntica a:

(a) h (b) $2x$ (c) $2x + h$

(d) $\dfrac{2x+h}{h}$ (e) ninguna de éstas.

2 $x^4 - y^4$ es identica a:

(a) $(x-y)^4$ (b) $(x+y)(x-y)(x^2 - y^2)$

(c) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$ (d) $(x^2 - y^2)^2$

(e) ninguna de éstas.

3 $(x^{1/2} + a^{1/2})^2$ es idéntica a:

(a) $x + a$ (b) $x + \sqrt{2ax} + a$ (c) $x + 2\sqrt{ax} + a$

(d) $(x^2 + a^2)^{1/2}$ (e) ninguna de éstas

4 $\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $x > 0$, es idéntica a:

(a) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$ (b) $x^2\sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$ (c) $x\sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

(d) $\dfrac{1}{x}\sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$ (e) $\dfrac{1}{x}\sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

5 $3 \cdot 10^n$ es idéntica a:

(a) 10^{n+3} (b) 30^n (c) $3^n \cdot 10^n$

(d) 10^{3n} (e) ninguna de éstas.

6 $\dfrac{\sqrt{2x}}{x+4}$ es idéntica a:

(a) $\sqrt{\dfrac{2}{x}} + \dfrac{\sqrt{2x}}{\text{[illegible]}}$ (b) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

(c) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+4}$ (d) ninguna de éstas.

¿Cuáles de las siguientes proposiciones (problemas 7 a 14) son identidades?

7 $\dfrac{x}{1+x^4} \equiv x + \dfrac{1}{x^3}$

8 $(a^{2/3} - x^{2/3})^3 \equiv a^2 - x^2$

9 $4x^2 - 12x + 13 \equiv 4[(x - \frac{3}{2})^2 + 1]$

10 $\dfrac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \equiv \dfrac{x}{a^3 + x^3}$

11 $\dfrac{1 + x^4}{x} \equiv \dfrac{1}{x} + x^3$

12 $\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}} \equiv -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

13 $\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2}} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$

14 $\dfrac{x^4 + 4x^2 - 4}{(x - 1)(x^2 + 4)} = x + 1 + \dfrac{x^2}{(x - 1)(x^2 + 4)}$

15 Simplifíquese $\dfrac{x^2}{(1 - x^2)^{3/2}} + \dfrac{2}{(1 - x^2)^{1/2}}$.

16 Simplifíquese $[4t(1 + t^2)^{-1/2} - 2t^3(1 + t^2)^{-3/2}] \div \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$.

17 Demuéstrese que $\sqrt{\left(x - \dfrac{1}{4x}\right)^2 + 1} = x + \dfrac{1}{4x}$ si $x > 0$. ¿Es verdadera si $x < 0$?

18 Si $3x^2 + 3y^2z - 3ay - 3axz = 0$, y $6x - 6az + 6yz^2 + 3y^2w - 3axw = 0$, encuéntrese w en términos de x, y y a.

19 Si $10x^2 - 6xz - 6y + 10xz = 0$, encuéntrese z si $x = y = 4\sqrt{2}$.

20 Si $x = \dfrac{1}{t + 1}$, e $y = t^2$, demuéstrese que $y = \dfrac{(1 - x)^2}{x^2}$.

21 Si $y = \dfrac{x}{\sqrt{32 - x^2}}$, exprésese $\sqrt{1 + y^2}$ en función de x.

22 Si $x = \dfrac{3\sqrt{y}}{2\sqrt{3}}$, exprésese $\sqrt{1 + x^2}$ en función de y.

23 Si $y = (ax^2 + bx + c)^{1/2}$, y si

$$z = -\frac{(2ax + b)^2}{4}(ax^2 + bx + c)^{-3/2} + a(ax^2 + bx + c)^{-1/2},$$

demuéstrese que $4y^3z = 4ac - b^2$.

24 Demuéstrese que si $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$, y $a^2 = b^2 + c^2$, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

25 Si $x = \dfrac{2t}{1 - t^2}$, e $y = \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2}$, encuéntrese $y^2 - x^2$.

4
Geometría de los números reales

En el capítulo 2 examinamos seis grupos de axiomas relacionados con adición y multiplicación de números, y estudiamos el conjunto Q de los números racionales, el cual es el menor conjunto que incluye a los números naturales N y satisface estos axiomas. Tal como observamos al final del capítulo, el sistema de los números racionales no es suficiente para medir las longitudes de todos los segmentos lineales; el sistema de los números reales contiene además otros números, de modo que la totalidad de los números reales puede ponerse en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta.

En el presente capítulo examinaremos dos tipos adicionales de axiomas que completarán nuestra descripción de los números reales. El primer grupo de axiomas se refiere al *ordenamiento* de los números reales y conduce al estudio de las desigualdades. Veremos en seguida la forma en que los números reales se corresponden con los puntos de una recta en un sistema unidimensional de coordenadas y continuaremos estudiando la geometría de los sistemas bidimensionales de coordenadas. Finalmente, concluiremos el capítulo enunciando en forma precisa el axioma de plenitud, el cual se utiliza en forma implícita al establecerse un sistema de coordenadas; mostraremos también cómo puede utilizarse esto para definir la longitud de un arco de circunferencia.

4.1 Axiomas de orden para los números reales

En el capítulo 2 examinamos los axiomas de un cuerpo, los cuales son satisfechos por diversos sistemas matemáticos. En esta sección queremos estudiar un conjunto de axiomas que se relacionan de modo más específico con el hecho de que podemos asociar los números reales con los puntos de una recta, esto es, los *axiomas de orden*. En el capítulo 2 consideramos sólo igualdades entre elementos. Ahora estudiaremos propiedades de las *desigualdades*, o sea, estudiaremos la relación «b es mayor que a», simbolizada por $b > a$.

AXIOMA 01. Axioma de tricotomía. *Para todo a y b en R, una y sólo una de las proposiciones siguientes es válida:* $a > b$, $a = b$ ó $b > a$.

Este axioma se usa al definir lo que queremos significar por números reales positivos y negativos.

DEFINICIÓN 4.1. *Un número real a es* positivo *si $a > 0$ y* negativo *si $0 > a$. El número 0 no es ni positivo ni negativo.*

Del Axioma de tricotomía 01, se sigue que cada número real es positivo, negativo o cero.

AXIOMA 02. Axioma de transitividad. *Si a, b y c están en R y si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.*

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. Si $a > b$ y b es positivo, entonces a es positivo, ya que $a > b$ y $b > 0$ implican $a > 0$.

Utilizamos el axioma de transitividad cada vez que escribimos una cadena de desigualdades y concluimos que el primer término es mayor que el último. Por ejemplo, de $a > b > c > d$, concluimos que $a > d$.

AXIOMA 03. Axioma de adición. *Si a, b y c están en R y si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.*

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. Si a es positivo, entonces $a + c > c$, ya que $a > 0$, y podemos en seguida usar el axioma de adición.

Aunque siempre podemos sumar una misma cantidad a una desigualdad sin alterarla, no sucede lo mismo cada vez que multiplicamos ambos miembros por un mismo número. Por ejemplo, si $a > b$, entonces $a \cdot 0 = b \cdot 0$, de modo que la multiplicación por 0 transforma la desigualdad en una igualdad. Sin embargo, si sólo multiplicamos por números positivos, la desigualdad se conserva.

AXIOMA 04. Axioma de multiplicación. *Si a, b y c están en R y si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.*

Puesto que la adición y la multiplicación son ambas operaciones conmutativas, el resultado del Axioma 03 puede también expresarse $c + a > c + b$ y el del Axioma 04, $ca > cb$. En el Axioma 04 debe tenerse presente la condición de que debe ser $c > 0$.

A menudo es conveniente decir que un número «es menor que» otro, en lugar de utilizar siempre la expresión «es mayor que»; en consecuencia, daremos la siguiente definición de la relación (es menor que) en el conjunto R.

DEFINICIÓN 4.2. *Si $a, b \in R$, decimos $a < b$ (léase «a es menor que b») si y sólo si $b > a$.*

A consecuencia de esta definición, $a > b$ puede leerse tanto «a es mayor que b» como «b es menor que a». En toda demostración en que aparezcan estas relaciones (desigualdades) supondremos que cualquier cantidad puede ser substituida por otra igual a ella; por ejemplo, si $a > b$ y $b = c$, entonces $a > c$ Además, definiremos $\geq$ como $>$ o $=$ y análogamente, $\leq$ como $<$ o $=$.

Los axiomas de adición y de multiplicación pueden utilizarse para demostrar dos importantes propiedades del conjunto de los números reales positivos.

TEOREMA 4.1. *El conjunto de los números reales positivos es cerrado respecto a la adición, es decir, la suma de dos números reales positivos es un número real positivo.*

Demostración. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0 + b$, por el axioma de adición, y $0 + b = b > 0$, de modo que $a + b > 0$ por el axioma de transitividad.

En forma similar podemos demostrar:

TEOREMA 4.2. *El conjunto de los números reales positivos es cerrado respecto a la multiplicación.*

Al inverso aditivo de un número real a lo hemos llamado «el negativo de a». Veremos en seguida que esta terminología está efectivamente relacionada con los conceptos de números positivos y negativos.

TEOREMA 4.3. *Si a es un número real positivo, entonces $-a$ es negativo y si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.*

Demostración. Si $a > 0$, entonces sumando $-a$ en ambos miembros y usando el axioma de adición obtenemos $a + (-a) > 0 + (-a)$ de modo que $0 > -a$. Análogamente, si $0 > a$, sumando $-a$ en ambos miembros, obtenemos $-a = (-a) + 0 > (-a) + a = 0$ de modo que $-a > 0$. De modo más general, podemos probar en forma similar:

TEOREMA 4.4. *Si $a > b$, entonces $-b > -a$.*

Probaremos a continuación una importante propiedad de todo sistema numérico, que satisface los axiomas de orden:

TEOREMA 4.5. *Para todo número real a, o bien $a^2 = 0$ ó $a^2 > 0$.*

Demostración. Si $a = 0$, entonces $a^2 = 0$. Si $a > 0$, entonces $a^2 > 0$ por el Teorema 4.2. Si $0 > a$, entonces $-a > 0$ y $(-a)^2 > 0$; pero $(-a)^2 = a^2$ por el Teorema 2.7, de modo que $a^2 > 0$.

COROLARIO 4.6. $1 > 0$.

Demostración. Como 0 no es número natural, $0 \neq 1$. Ahora, $1 = 1^2$ de modo que por el Teorema 4.5, $1 > 0$. Este corolario justifica el hecho de que nos hayamos referido al 1 como «un entero positivo». De manera más general, como 1 es positivo, se sigue que $2 = 1 + 1$ es positivo, $3 = 2 + 1$ es positivo y así sucesivamente. Por tanto, todos los números naturales son números reales positivos, lo cual justifica el nombre «enteros positivos» que usamos en el capítulo 2. Además, por el Teorema 4.3, como los naturales son números reales positivos, sus inversos aditivos serán números reales negativos, hecho que justifica a su vez el nombre «enteros negativos» usado en el capítulo 2.

Mencionamos anteriormente que si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número real positivo, la desigualdad se conserva, y que si se multiplican por cero, se transforma en igualdad. Demostraremos ahora que la multiplicación por un número real negativo invierte la desigualdad.

TEOREMA 4.7. *Si a, b y c están en R y $a > b$ y $0 > c$, entonces $b \cdot c > a \cdot c$.*

Demostración. Si $0 > c$, entonces $-c > 0$ por el Teorema 4.3, de modo que $a \cdot (-c) > b \cdot (-c)$ por el axioma de multiplicación. Por tanto, $-(a \cdot c) > -(b \cdot c)$ y $b \cdot c > a \cdot c$ por el Teorema 4.4. Obsérvese que el Teorema 4.4 puede considerarse como un caso especial de este resultado, ya que si $a > b$, entonces $b \cdot (-1) > a \cdot (-1)$ dado que $0 > -1$.

Demostraremos antes que el inverso aditivo de un número real positivo es negativo. Concluiremos esta sección demostrando que el inverso multiplicativo de un número real positivo es también positivo.

TEOREMA 4.8. *Si $a > 0$, entonces $1/a > 0$.*

Demostración. Si $1/a$ fuera negativo, entonces se tendría $0 \cdot (1/a) > a \cdot (1/a)$ por el Teorema 4.7, lo cual lleva a la contradicción de que $0 > 1$. Por la misma razón $1/a \neq 0$; luego, por el axioma de tricotomía, la única posibilidad remanente es que $1/a$ sea positivo. De modo más general, si a y b son positivos, entonces b/a es también positivo.

PROBLEMAS

1 Ilústrese cada uno de los axiomas y teoremas de esta sección mediante una selección adecuada de números reales. Por ejemplo, en el Axioma 01, si $a = 2$ y $b = -3$, entonces $a > b$, ya que $2 > -3$.

2 Demuéstrese que $a > b$ si y sólo si $a - b$ es positivo. (En algunos libros se define primero el concepto de número positivo y en seguida se define la relación $a > b$ utilizando la proposición del presente problema.)

3 Demuéstrese que si $a + c > b + c$, entonces $a > b$. ¿Qué axiomas debe usar?

4 Demuéstrese que si c es positivo y $a > b$, entonces $a + c > b$.

5 Demuéstrese que la suma de dos números negativos es negativa.

6 Demuéstrese el Teorema 4.2, utilizando como modelo la demostración del Teorema 4.1.

7 Demuéstrese que el producto de dos números negativos es positivo y que el producto de un número negativo por uno positivo es negativo.

8 Demuéstrese que si a y b son números positivos y $a > b$, entonces $a^2 > b^2$.

Indicación: Demuéstrese primero que $a^2 > a \cdot b$.

9 Demuéstrese que si a y b son positivos y $a^2 > b^2$, entonces $a > b$.

Indicación. Por el axioma de tricotomía se cumple una y sólo una de $a > b$, $a = b$

o $b > a$. Demuéstrese que dos de estas proposiciones no pueden cumplirse si $a^2 > b^2$, siendo a y b positivos.

10 Demuéstrese que si $a > 1$, entonces $a^2 > a$, y si a es positivo y $a > a$, entonces $a > a^2$. Ilústrese cada caso con selección adecuada de a.

11 Demuéstrese que si a y b son positivos y $a > b$, entonces $a^3 > b^3$.

12 Demuéstrese que si a y b son negativos y $a > b$, entonces $a^3 > b^3$

13 Utilizando los resultados de los problemas 11 y 12, demuéstrese que si a y b son números reales arbitrarios y $a > b$, entonces $a^3 > b^3$.

14 Demuéstrese el Teorema 4.4, utilizando como modelo la demostración del Teorema 4.3.

15 Demuéstrese que si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

Indicación: Demuéstrese primero que $a + c > b + c$.

16 Demuéstrese que si a, b, c y d son números reales positivos $a > b$ y $c > d$, entonces $a \cdot c > b \cdot d$.

Indicación: Demuéstrese primero que $a \cdot c > b \cdot c$.

17 Demuéstrese que si $a > b$ y c es positivo, entonces $a/c > b/c$.

18 Demuéstrese que si a y b son números positivos y $a > b$, entonces $1/b > 1/a$.

Indicación: Recuérdese que $a/(a\ b) = 1/b$ y utilícese el resultado del problema 17.

19 Demuéstrese que si $a > b$, entonces

$$a > \frac{a+b}{2} > b.$$

Utilícese este resultado para mostrar por qué $1 > \frac{1}{2} > 0$ y $1 > \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

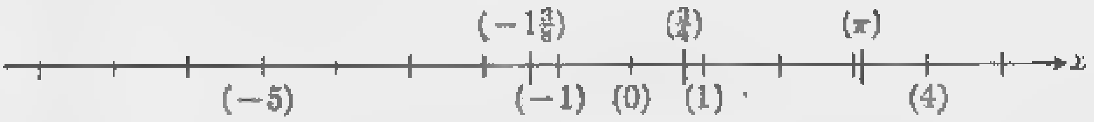
20 Demuéstrese que si a y b son números positivos y $a > b$, entonces $a > \sqrt{a \cdot b} > b$

Indicación: Utilícese el problema 9.

4.2. Un sistema de coordenadas de una dimensión o unidimensional

El metodo de asociar números con puntos de una línea es de gran utilidad en matemáticas, y ha resultado en un gran progreso en la aplicación de las matemáticas a las ciencias. Toda escala que mide cantidades, por ejemplo, una regla graduada o un termómetro, hace uso de una asociación de esta especie. A cada valor numérico que toma la cantidad física le corresponde una posición en la escala y, viceversa, a cada posición de la escala le corresponde un número real. Una correspondencia de este tipo establece un sistema de coordenadas. El sistema de coordenadas a una dimensión más simple y útil utiliza la correspondencia

uno-a-uno entre el conjunto R de los números reales y el conjunto de puntos de una línea recta. Consideraremos a continuación un sistema de este tipo.



4-1

Sobre una recta fija de longitud ilimitada, elegimos un punto arbitrario O, que llamamos el origen, y en ambos sentidos a partir de O, marcamos divisiones iguales* de longitud arbitraria. Asociamos el cero con el origen, los enteros positivos con los puntos de división sucesivos de un lado y los enteros negativos con los del otro lado (véase fig. 4-1). La convención habitual en una recta horizontal es considerar los enteros hacia la derecha como positivos y los de la izquierda como negativos.

El punto asociado con un número racional cualquiera puede determinarse mediante la construcción geométrica utilizada para dividir un segmento en b partes iguales; así, el número $\frac{3}{4}$ queda representado por el punto situado a tres cuartos de la distancia de 0 al punto correspondiente al 1. Análogamente, $-1\frac{3}{8}$ queda representado por el punto situado a $1\frac{3}{8}$ unidades a la izquierda de 0.

Mediante construcciones geométricas es también posible determinar los puntos asociados con ciertos números irracionales; por ejemplo, el punto correspondiente a $\sqrt{2}$ puede ubicarse considerando que $\sqrt{2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos unitarios. Si bien no existe una construcción geométrica para todos los números reales, *supondremos que la correspondencia puede extenderse a todos los números reales:* esto se logra asociando cada segmento rectilíneo con un número real, el cual representa su longitud. En esta forma, hemos asociado con cada número real un punto de la recta, y viceversa, con cada punto de la recta, asociamos un número real.

La *coordenada* de un punto se define como el número asociado con ese punto; se escribe (x) y nos referiremos a ella como «el punto x».

El sistema de coordenadas nos proporciona una interpretación gráfica para la magnitud relativa de los numeros; así $5 > 3$ corresponde al hecho de que (5) está a la derecha de (3) en tanto que $-5 < -3$ corresponde al hecho de que (-5) está a la izquierda de (-3). La notación $x < y < z$ indica que y es mayor que x pero menor que z.

Para determinar la distancia entre dos puntos cualesquiera del sistema basta restar la coordenada del punto situado a la izquierda de la del punto

---

* Existen sistemas en que las subdivisiones no son iguales; por ejemplo, las escalas de la regla de cálculo.

situado a la derecha; así, si $x_1 < x_2$, donde los subíndices 1 y 2 se utilizan para indicar dos valores distintos de x, la distancia entre (x_1) y (x_2) es $x_2 - x_1$, pero si $x_2 < x_1$, la distancia debe ser $x_1 - x_2$, ya que convinimos que la distancia sea siempre positiva. El inconveniente de tener que distinguir entre las posiciones relativas de los dos puntos se evita empleando la noción de valor absoluto.

El valor absoluto de x, denotado por $|x|$, indica el tamaño o magnitud de x sin considerar su signo; por ejemplo, $|3| = 3$ y $|-3| = 3$.

DEFINICIÓN 4.3. *El* valor absoluto *de un número real x se define como*

$$|x| \equiv \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Es conveniente recordar aquí la definición del signo de raíz cuadrada, $\sqrt{\ }$, a saber, para todo número positivo a, $\sqrt{a}$ denota la raíz cuadrada positiva de a. Esto se puede recalcar mediante la definición siguiente.

DEFINICIÓN 4.4. *Para todo número real x, x^2 es positivo (o cero si $x = 0$) y*

$$\sqrt{x^2} \equiv \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

De este modo, $\sqrt{7^2} = 7$ y $\sqrt{(-7)^2} = -(-7) = 7$ y, en general, $|x| = \sqrt{x^2}$. Puesto que las ecs. (4.1) y (4.2) definen los mismos valores, cualquiera de ellas puede utilizarse para indicar valor absoluto.

Como una consecuencia inmediata de la definición de valor absoluto, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.9. *Para todo a en R, se tiene*

$$-|a| \leq a \leq |a|. \tag{4.3}$$

Demostración. Si $a > 0$, entonces $a = |a|$ y $-|a| = -a < 0 < a = |a|$. Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y $-|a| = a < 0 < |a|$ Si $a = 0$, entonces $-|a| = -0 = 0 = a = |a|$. Por tanto, la relación de la ec. (4.3) se cumple en todos los casos.

TEOREMA 4.10. *Si a y b son dos números reales cualesquiera, el valor absoluto de su producto (o cuociente) es igual al producto (o cuociente) de sus valores absolutos:*

$$|ab| \equiv |a| \cdot |b|, \tag{4.4}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| \equiv \frac{|a|}{|b|}, \qquad b \neq 0. \tag{4.5}$$

Demostración. Utilizando la definición del valor absoluto en forma de raíz cuadrada, obtenemos $|a \cdot b| = \sqrt{(a \cdot b)^2} = \sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|$. Una demostración similar se cumple para el valor absoluto del cuociente de dos números.

Aunque el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos, no se cumple en general que el valor absoluto de una suma sea igual a la suma de los valores absolutos; por ejemplo, $|3 + (-2)| = |1| = 1$ y $|3| + |(-2)| = 3 + 2 = 5$. Sin embargo, se puede demostrar que el valor absoluto de una suma no puede ser mayor que la suma de los valores absolutos.

TEOREMA 4.11. Desigualdad triangular. *Para números cualesquiera a y b,*

$$|a| + |b| \geq |a + b| \tag{4.6}$$

Demostración. Si a y b son positivos, también lo es $a + b$ y $|a| + |b| = a + b = |a + b|$. Si a y b son ambos negativos, también lo es $a + b$ y $|a| + |b| = (-a) + (-b) = -(a + b) = |a + b|$. Por tanto, el único caso en el cual podemos esperar una desigualdad es cuando uno de los números, digamos a, es positivo y el otro, b, es negativo. Tenemos entonces $|a| + |b| = a + (-b)$ y $|a + b|$ es o $a + b$ o $-(a + b)$. Pero, $a > -a$ y $-b > b$, de modo que $a + (-b) > a + b$ y $a + (-b) > (-a) + (-b) = -(a + b)$; por tanto, en cualquier caso, debemos tener $|a| + |b| > a + b$. Por último, hacemos notar que se obtiene automáticamente una igualdad si al menos uno de los números a o b es cero.

Ahora podemos dar una expresión general para la distancia entre dos puntos P_1 y P_2.

El nombre «desigualdad triangular» proviene de la geometría de vectores y de los números complejos, los que se considerarán en el capítulo 7, siendo la interpretación de la correspondiente desigualdad el que la longitud de un lado de un triángulo no es mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. En los problemas 9 y 10 que siguen se da otro método para probar esta importante desigualdad.

TEOREMA 4.12. *La distancia entre dos puntos cualesquiera P_1 y P_2 con coordenadas (x_1) y (x_2) puede expresarse como*

$$d = P_1P_2 = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}. \tag{4.7}$$

Por ejemplo, la distancia entre los puntos (5) y (-3) está dada por $d = \sqrt{[5 - (-3)]^2} = 8$ ó por $d = \sqrt{(-3 - 5)^2} = 8$

PROBLEMAS

1 Dispónganse los números siguientes en orden creciente de magnitud y diagrámense en un sistema de coordenadas similares al de la fig. 4-1: 2,3; 0,333; 2^3; 4; $\frac{1}{3}$; -5; -1; 0; $-6{,}5$.

2 Muéstrese por qué $|a - b| = |b - a|$ para números cualesquiera a y b

3 Enúnciense en palabras las interpretaciones geométricas de las siguientes expresiones:

(a) $a < b$
(b) $a < 2$
(c) $a > b$
(d) $a > b > c$
(e) $a - b = 1$
(f) $3{,}14 < \pi < 3{,}15$
(g) $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$
(h) $|5 - 2| > |1 - 3|$
(i) $|a - b| > 0$
(j) $|x - 2| < 3$
(k) $|x - 1| > 4$
(l) $-1 < x < 1$.

4 Si las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2 en una recta son (2) y (8), respectivamente, demuéstrese que la coordenada del punto medio del segmento P_1P_2 es (5).

5 Determínese la coordenada del punto medio del segmento que une (4) y (−4); (3) y (−5); (−1,7) y (3,7); ($\sqrt{2}$) y ($\sqrt{3}$); (x_1) y (x_2).

6 Determínese el valor de x en las expresiones:

(a) $x = |10|$
(b) $x = |2 - 5|$
(c) $x = \sqrt{3^2}$
(d) $x = \sqrt{(-4)^2}$
(e) $x = |-\frac{3}{2}|$
(f) $x = \sqrt{(-1)^2}$
(g) $x = |\frac{1}{3} - \frac{5}{3}|$
(h) $x = |\frac{1}{3}| + |-\frac{5}{3}|$

7 Determínense todos los valores posibles de x en las expresiones:

(a) $|x| = 2$
(b) $|x| = \sqrt{5}$
(c) $\sqrt{x^2} = 3$
(d) $\sqrt{x^2} = \frac{1}{4}$
(e) $|x - 2| = 5$
(f) $|x - 4| = 0$
(g) $|3 - x| = 6$
(h) $\sqrt{(x-1)^2} = 5$
(i) $\sqrt{(2-x)^2} = 4$
(j) $|x - 2| = -3$
(k) $\sqrt{(x-4)^2} = -1$
(l) $\sqrt{(x-5)^2} = 3$

8 Demuéstrese la regla del valor absoluto de un cuociente (ec. 4.5).

▶ 9 Si $d \geqslant 0$, entonces $|c| \leqslant d$ si y sólo si $-d \leqslant c \leqslant d$. Dense las razones para cada paso en la demostración de esta propiedad, que debe consistir de las dos partes siguientes:

(a) Si $|c| \leqslant d$, entonces $-d \leqslant -|c|$, de modo que $-d \leqslant -|c| \leqslant c \leqslant |c| \leqslant d$ y $-d \leqslant c \leqslant d$

(b) Si $c \geqslant 0$, entonces $|c| = c$, de modo que si $c < d$, entonces $|c| < d$. Si $-d \leqslant c \leqslant 0$, entonces $d \geqslant -c = |c| \geqslant 0$, de modo que, en cualquier caso, si $-d \leqslant c \leqslant d$, entonces $|c| \leqslant d$.

▶ 10 Demuéstrese el Teorema 4.11 en la forma siguiente: escríbase $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ y $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$. Súmense estas desigualdades y utilícese el resultado del Problema 9.

▶ 11 Demuéstrese que $|a - b| \leqslant |a| + |b|$.
Indicación: En el Teorema 4.11, reemplácese b por $-b$.

12 Determínense todos los valores posibles de x en las siguientes desigualdades:

(a) $|x - 1| \leqslant 2$. Por el problema 9, esto es equivalente a $-2 \leqslant x - 1 \leqslant 2$; la desigualdad de la izquierda $-2 \leqslant x - 1$ da $x \geqslant -1$ y la de la derecha $x - 1 \leqslant 2$ da $x \leqslant 3$. El resultado puede escribirse $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

(b) $|3 - x| \leqslant 5$

(c) $|2x + 5| < 6$

(d) $|4 + 3x| < 2$.

▶ 13 Demuéstrese que si $d \geqslant 0$, entonces $|c| \geqslant d$ si y sólo si $c \geqslant d$ o $c \geqslant -d$.

Indicación: Véase la demostración del problema 9.

14 Determínense todos los valores posibles de x en las desigualdades siguientes:

(a) $|x - 1| \geqslant 2$. Por el problema 13, esto es equivalente a $x - 1 \geqslant 2$ ó $x - 1 \leqslant -2$, la primera desigualdad da $x \geqslant 3$ y la segunda $x \leqslant -1$. Compárense estas respuestas con las del problema 12(a)

(b) $|3 - x| \geqslant 5$
(c) $|2x + 6| > 4$
(d) $|3x + 1| > 8$

15 (a) Demuéstrese o niéguese que $|x^2| = |x|^2$.
(b) Demuéstrese o niéguese que $|x^3| = |x|^3$.

16 Despéjese x en las desigualdades siguientes:

(a) $\dfrac{1}{|x - 1|} > 3$ (b) $\dfrac{1}{|2x + 3|} < \dfrac{1}{4}$.

17 Recordemos por la geometría plana que una circunferencia es el lugar geométrico (L.G.) de los puntos que se encuentran a una distancia dada de un punto dado, donde la distancia es el radio y el punto dado es el centro de la circunferencia. En esta geometría de una dimensión, ¿cuántos puntos se encuentran a una distancia dada de un punto fijo? ¿De cuántos puntos consistiría una «circunferencia»?

18 Si (1) es un punto dado y 2 es una distancia dada, explíquese por qué $|x - 1| = 2$ sería la condición de que un punto (x) se encuentre a 2 unidades del punto 1. Esta es la condición de que el punto (x) se encuentre sobre la «circunferencia» de centro (1) y radio 2 y se llama la ecuación de la «circunferencia».

19 Interprétese geométricamente cada una de las ecuaciones del problema 7 en términos de «circunferencia en una dimensión».

20 Escríbase la ecuación de una «circunferencia en una dimensión» de centro (a) y radio r.

4.3 Un sistema de coordenadas de dos dimensiones o bidimensional

En la sección 4.2 tuvimos ocasión de considerar un sistema de coordenadas que nos permitió no sólo comparar gráficamente la magnitud relativa de los números, sino también representar la distancia entre dos puntos por la magnitud de sus diferencias. Sin embargo, la utilidad de un sistema de una dimensión es limitada; uno de los conceptos más importantes en matemáticas es la relación o dependencia entre dos conjuntos de números. Los valores correspondientes de dos conjuntos así relacionados pueden ser considerados como pares de números, en consecuencia, un sistema que permita asociar un punto y un par ordenado de números sería de gran ventaja al estudiar una relación de este tipo. Veremos que un sistema de dos dimensiones proporciona esta asociación.

Recordemos la definición de *producto cartesiano* de dos conjuntos: en particular, nos interesa aquí el caso $X = Y$ y, en especial, $X = Y = R$. Simbólicamente, esto es:

$$R \times R = \{(x, y) | x \in R \quad \text{e} \quad y \in R\}.$$

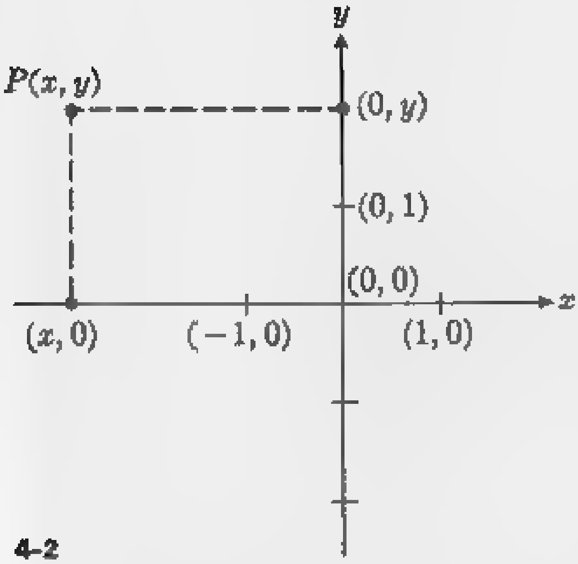
Cada elemento del conjunto es un par ordenado (x, y). Estableceremos una correspondencia entre el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) de $R \times R$ y el conjunto de todos los puntos del plano. (El estudiante debe repasar la importante noción de conjunto producto dado en la seccion 1.3.)

El sistema más frecuentemente usado para establecer esta correspondencia es el *sistema rectangular cartesiano de coordenadas*. En 1637, René Descartes, matemático y filósofo francés, utilizó este método de asociar puntos con números y, mediante esto, asoció una curva con su respectiva ecuación. Esta unificación del álgebra y la geometría estimuló grandemente el progreso de las matemáticas y su aplicación en diversos campos científicos.

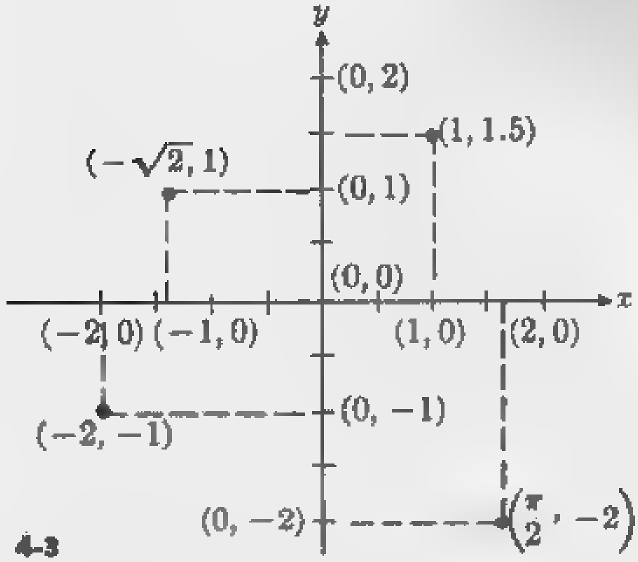
Construyamos dos rectas perpendiculares haciendo, por conveniencia, que una sea horizontal; llamaremos estas rectas *ejes coordenados*. Utilizando el punto de intersección como origen O, construimos en cada línea un sistema de una dimensión. Generalmente, se utiliza la misma unidad de longitud en ambas líneas, pero en algunos casos puede ser más conveniente tomar unidades diferentes. Designamos por $(x, 0)$ el punto en la recta horizontal que corresponde al número x en el sistema de una dimensión y, análogamente, designamos por $(0, y)$ el punto en la recta vertical correspondiente al número y en el respectivo sistema de una dimensión. La recta horizontal recibe el nombre de *eje x* o *eje de abscisas* y la vertical el de *eje y* o *eje de ordenadas*, acostumbrándose colocar el punto $(0, y)$ del eje y hacia arriba cuando y es positivo.

En el sistema de ejes de referencia de la fig. 4-2, consideremos un determinado par de valores x e y, x_1 e y_1. Para determinar el punto correspondiente a este par ordenado de valores, trazamos rectas paralelas a los ejes por los puntos $(x_1, 0)$ en el eje x y $(0, y_1)$ en el eje y. Estas líneas se cortan en un punto P, a una distancia x_1 del eje y (a derecha o izquierda, según que x_1 sea positivo o negativo) y a una distancia y_1 del eje x (hacia arriba o abajo, según que y_1 sea positivo o negativo) Estas distancias pueden llamarse *distancias orientadas*. El punto P, determinado por el par ordenado de valores x_1 e y_1, se denota por el par ordenado, (x_1, y_1), siendo x_1 e y_1 las *coordenadas de P*: más específicamente, el valor de x, x_1, se llama la *abscisa* de P y el valor de y, y_1, su *ordenada*. Evidentemente, existe un solo punto correspondiente a cada par de valores (x, y); y, recíprocamente, a cada punto le corresponde un solo par ordenado de valores (x, y), puesto que el punto se encuentra a distancias orientadas únicas de los ejes. *En esta forma se ha establecido una correspondencia uno-a-uno (biunívoca) entre todos los puntos del plano y el conjunto de todos los pares ordenados de números reales* (x, y). En la explicación que sigue será conveniente referirse al par ordenado (x, y) como el punto (x, y), de coordenadas x e y.

Los dos ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes llamadas *primero*,



4-2



4-3

segundo, tercero y *cuarto cuadrantes.* Los signos de las coordenadas según el cuadrante en que se encuentre el punto correspondiente están dados en la tabla.

Cuadrante	Abscisa	Ordenada
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

En la fig. 4-3 aparecen diagramados varios puntos.

Problemas

1 · Diagrámense los puntos siguientes.

(a) de abscisa 4 y ordenada 3 (b) $(4, -3)$ (c) con $x = -4$ e $y = 3$

2 Diagrámense los puntos cuyas coordenadas son:

(a) $(2, 6), (-1, 4), (3, -2), (-1, -3)$
(b) $(4, 0), (-4, 0), (0, 4), (0, -4), (0, 0)$.

3 ¿Cuáles son las coordenadas del punto ubicado (a) tres unidades a la derecha del eje y y dos unidades sobre el eje x? (b) cuatro unidades a la izquierda del eje y y seis unidades sobre el eje x? (c) cinco unidades a la derecha del eje y y en el eje x?

4 (a) ¿Qué abscisa tienen los puntos del eje y? (b) ¿Qué ordenada tienen los puntos del eje x?

5 Sin diagramar, indíquese el cuadrante en que se encuentra cada uno de los puntos siguientes: $(-1, 2), (2, -4), (-3, -7), (4, 6), (-5, 2), (28, -2)$.

6 Indíquense las coordenadas de (a) cuatro puntos que sean los vértices de un rectángulo, (b) tres puntos que sean los vértices de un triángulo rectángulo, (c) cuatro puntos situados sobre la circunferencia de centro $(2, 3)$ y radio 4.

7 En cada uno de los siguientes problemas, se dan las coordenadas de tres vértices de un paralelogramo. Indíquense los tres posibles conjuntos de coordenadas para el cuarto vértice.

(a) $(0,0), (2, 4)$ y $(6, 0)$ (b) $(-2, 1), (1, 2)$ y $(0, -3)$

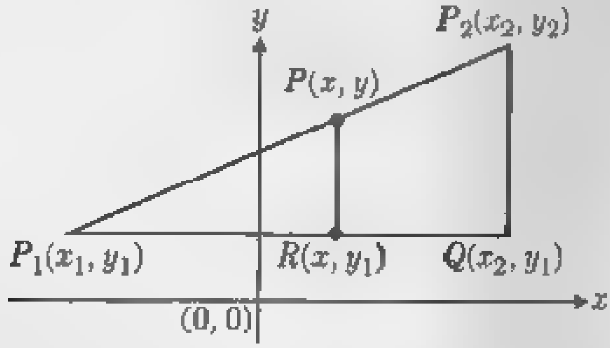
8 Tres vértices de un paralelogramo son (a, b), $(0, 0)$ y $(c, 0)$. ¿Cuáles son las coordenadas posibles del cuarto vértice?

9 Indíquese en un sistema rectangular de coordenadas la ubicación del conjunto de todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $x = 2$	(b) $y = -3$	(c) $x > 2$
(d) $y > 4$	(e) $x < -1$	(f) $x = y$
(g) $x > 2,\ y = 3$	(h) $x > y$	(i) $x < y$
(j) $x > 2,\ y < 4$	(k) $x = 2,\ y < -1$	(l) $x = 2,\ y = 3$.

10 Si en la fig. 4-4, $P(x, y)$ es el punto medio del segmento rectilíneo que une $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y PR es paralela al eje y, las coordenadas de R serán (x, y_1). Puesto que $RP_1 = QR$, $x - x_1 = x_2 - x$. Utilizando este hecho y una construcción similar, demuéstrese que las coordenadas del punto medio del segmento que une P_1 y P_2 son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{4.8}$$



4-4

11 Determínense las coordenadas del punto medio del segmento que une (a) $(1, 2)$ y $(-3, 5)$, (b) $(6, -2)$ y $(5, -7)$, (c) $(-4, 3)$ y $(2, -3)$.

12 Sea $A = (4, -3)$. Hállense las coordenadas de B si el segmento de línea AB tiene como punto medio:

(a) $(0, 0)$	(b) $(2, -1)$	(c) $(1, -2)$
(d) $(0, 3)$	(e) $(3, 0)$.	

13 Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{-1, 0, 1\}$, diagrámese el conjunto de los pares ordenados de $A \times B = \{(x, y) | x \in A$ e $y \in B\}$ en un sistema rectangular de coordenadas.

14 (a) Descríbanse y diagrámense los puntos que pertenecen al conjunto:

$$I \times I = \{(x, y) | x \in I \text{ y } y \in I\}$$

(b) Descríbanse los puntos que pertenecen al conjunto:

$$F \times F = \{(x, y) | x \in F \text{ y } y \in F\}.$$

15 Interesa a veces considerar conjuntos de pares ordenados en los cuales los elementos de un mismo par no son nunca iguales entre sí; este producto cartesiano «restringido» no tiene entonces elementos de la forma (x, x). Si $A = \{1, 2, 3\}$, enumérense los elementos de este producto cartesiano «restringido» de A por sí mismo.

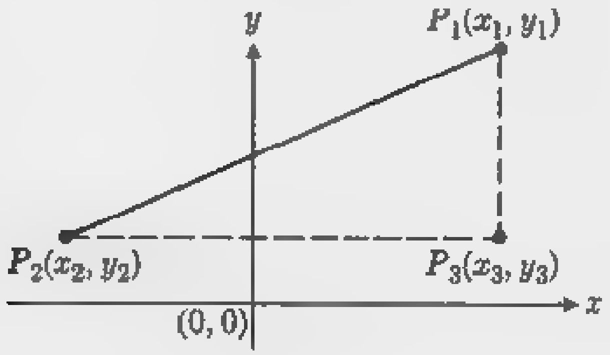
16 El concepto de producto cartesiano puede generalizarse fácilmente al caso de un número finito cualquiera de conjuntos; por ejemplo, $R \times R \times R = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$ tiene por elementos tríos ordenados. Explíquese en qué forma este conjunto de tríos puede ponerse en correspondencia uno a uno con los puntos de un espacio de tres dimensiones.

Indicación: ¿Cómo pasamos de un sistema de una dimensión a uno de dos dimensiones?

4.4 Fórmula de la distancia y fórmula de la pendiente

Estableceremos a continuación una fórmula de gran aplicación en las materias tratadas en el presente libro. Para obtener una expresión para la distancia d entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, en que se ha utilizado la misma unidad en ambos ejes, hacemos uso del famoso teorema de Pitágoras. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera del plano; construyamos un triángulo, como en la fig. 4-5, con hipotenusa P_1P_2 y catetos paralelos a los ejes y designemos por $P_3(x_3, y_3)$ el vértice del ángulo recto. Puesto que $x_3 = x_1$ e $y_3 = y_2$, la distancia entre P_2 y P_3 es

$$P_2P_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$



4-5

y la distancia entre P_1 y P_3 es

$$P_1P_3 = \sqrt{(y_1 - y_2)^2}.$$

Recordando el teorema de Pitágoras que expresa

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_1P_3}^2,$$

obtenemos

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Esto da el siguiente teorema.

TEOREMA 4.10. • *La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por*

$$d = P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{4.9}$$

EJEMPLO 1. La distancia entre $P_1(-4, 2)$ y $P_2(3, -1)$ es

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-1 - 2)^2} \\ &= \sqrt{58}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. La distancia entre el origen $(0, 0)$ y un punto cualquiera (x, y) es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. El triángulo de vértices $P_1(-5, -1)$, $P_2(2, 3)$ y $P_3(3, -2)$ es isósceles

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(-5 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1P_3 &= \sqrt{(-5 - 3)^2 + (-1 + 2)^2} \\ &= \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}. \end{aligned}$$

Podemos ilustrar de otra manera el uso de un sistema bidimensional de coordenadas introduciendo un concepto que es muy útil en cálculo: el concepto de *pendiente* de un segmento o de una línea recta. En la fig. 4-5, el segmento que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ se «inclina hacia arriba» a medida que avanzamos de izquierda a derecha. Para obtener una medida de la magnitud de esta inclinación, comparamos el cambio en la coordenada y con el cambio en la

coordenada x. Si la coordenada y cambia con el doble de rapidez que la coordenada x, diremos que la línea tiene pendiente 2. Si el segmento que une P_1 y P_2 es horizontal, entonces decimos que el segmento no tiene pendiente, o bien, que ésta es 0. Si la coordenada y disminuye al desplazarse de izquierda a derecha, entonces la línea se inclina hacia abajo y decimos que la pendiente es negativa. Todas estas proporciones quedan incluidas en la siguiente definición algebraica del concepto de pendiente.

DEFINICIÓN 4.5. *Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos con coordenadas x diferentes, entonces la* pendiente *de la recta que contiene a P_1 y P_2 se define como:*

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Si $x_1 = x_2$, la pendiente queda indefinida.

EJEMPLO 4. Si P_1 tiene coordenadas $x_1 = 4$, $y_1 = 6$ y P_2 tiene coordenadas $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, entonces la pendiente de la recta que contiene a P_1 y P_2 es $(6 - 2)/(4 - 1) = 4/3$. La pendiente de la recta que une $P_1(3, 5)$ con $P_2(6, 5)$ es $(5, -5)/(3, -6) = 0$; esta recta es horizontal.

Nótese que $(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. (¿Por qué?) En otras palabras, el orden en que enumeramos los puntos no interesa, de modo que la pendiente de la recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es la misma que la de la recta que une $P_2(x_2, y_2)$ y $P_1(x_1, y_1)$.

La utilidad del concepto de pendiente está ilustrada por el hecho de que dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen las mismas pendientes y el hecho de que los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales si y sólo si la pendiente de P_1 a P_2 es igual a la de P_1 a P_3.

PROBLEMAS

En cada uno de los ejercicios siguientes, dibújense las figuras en papel de coordenadas (papel cuadriculado).

1 Determínese la distancia entre los puntos:

(a) $(3, 2)$ y $(6, 7)$ (b) $(-4, 3)$ y $(5, -2)$
(c) $(\frac{5}{3}, -\frac{3}{4})$ y $(\frac{7}{4}, -\frac{3}{2})$ (d) $(0, 0)$ y $(5, -12)$
(e) $(-3, 7)$ y $(5, 7)$ (f) $(-1, 3)$ y (x, y).

2 Determínense las pendientes de las rectas que unen los pares de puntos de (a) a (f) en el problema 1.

3 Determínense las longitudes de los segmentos que unen los puntos:

(a) $P(6, 14)$ y $Q(1, 2)$ (b) $P(-4, 1)$ y $Q(6, -5)$.

4 Determínense las pendientes de las rectas que contienen los puntos P y Q en (a) y (b) del problema 3.

5 Demuéstrese que el triángulo de vértices $(2, 1)$, $(5, 5)$ y $(-2, 4)$ es isósceles, haciendo ver que tiene dos lados iguales.

6 Demuéstrese que los puntos $(8, 1)$, $(-6, -7)$ y $(2, 7)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

7 Demuéstrese que los puntos $(6, 1)$, $(5, 6)$, $(-4, 3)$ y $(-3, -2)$ son los vértices de un paralelogramo, haciendo ver que los lados opuestos tienen igual longitud.

8 Demuéstrese el resultado del problema 7, haciendo ver que los lados opuestos son paralelos.

9 Demuéstrese que los puntos $(2, 3)$, $(-4, -3)$ y $(6, -1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Obsérvese que debe utilizarse el recíproco del teorema de Pitágoras.

10 Demuéstrese que los puntos $(12, 9)$, $(20, -6)$, $(5, -14)$ y $(-3, 1)$ son los vértices de un cuadrado. ¿Qué longitud tiene la diagonal?

11 Verifíquese algebraicamente si los siguientes tríos de puntos son colineales: $(6, 2)$, $(1, 1)$, $(-4, 0)$; $(-6, 5)$, $(3, -10)$, $(-2, -2)$.

12 Resuélvase el resultado del problema 11 comprobando en cada uno de los tríos si la pendiente P_1 a P_2 es igual a la de P_1 a P_3.

13 (a) Demuéstrese que los tres puntos $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$ y $C(10, 7)$ están en una recta. (b) Si $D(h, 5)$ está en esta recta, ¿qué condiciones deben cumplir las coordenadas de h?

14 Determínese el punto del eje y equidistante de los puntos $(-4, 4)$ y $(4, 10)$.

15 Dos vértices de un triangulo equilatero son $(-4, -3)$ y $(4, 1)$. Determínese el tercer vértice

16 Determínense los puntos de ordenada 5 y cuya distancia al origen es 13.

17 Dibújese el cuadrado cuyas diagonales se encuentran sobre los ejes coordenados y cuyo lado es de longitud a. ¿Cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices?

18 Si una circunferencia tiene por centro el punto $(2, 3)$ y pasa por el punto $(8, -5)$, ¿cuál es su radio?, ¿pasa la circunferencia por el punto $(-6, 9)$?

19 Considérese la circunferencia de centro en el origen y radio igual a 1 ¿Por cuáles de los puntos siguientes pasa? $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \sqrt{3/2})$.

20 Utilizando la expresión para la distancia entre el origen y el punto (x, y) e igualándola a uno, hemos enunciado la condición algebraica que deben satisfacer las coordenadas x e y de un punto (x, y) para que este se encuentre sobre la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1. Demuéstrese que esta condición puede simplificarse a la forma $x^2 + y^2 = 1$. Esta expresión se llama ecuación de la circunferencia unitaria en el plano.

21 Si un punto se encuentra sobre una curva, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación que representa a la curva Verifíquense los resultados del problema 19 comprobando si las coordenadas de los puntos satisfacen la ecuación de la circunferencia unitaria obtenida en el problema 20, a saber: $x^2 + y^2 = 1$.

22 Obsérvese que la ec. (4.9) es una generalización de la ec. (4.7). ¿Cuál sería la generalización correspondiente al espacio de tres dimensiones descrito en el problema 13, sección 4.3?

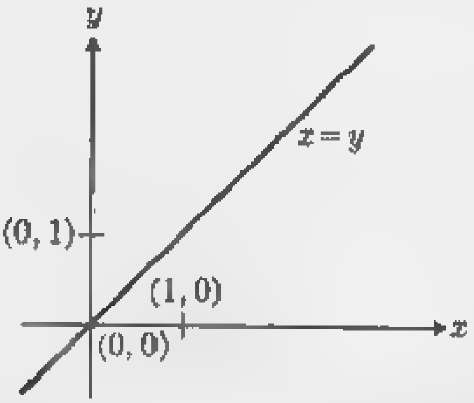
4.5 La circunferencia

En todo sistema rectangular de coordenadas de dos dimensiones, un lugar geométrico o curva tal como una recta o una circunferencia, puede considerarse como un conjunto de puntos. Las dos coordenadas de cada punto en este conjunto satisfacen alguna condición determinada* referente a estas coordenadas. Recíprocamente, si las coordenadas de un punto satisfacen esta condición, el punto debe pertenecer al conjunto; por ejemplo, consideremos el conjunto de puntos (pares ordenados) que pertenecen al conjunto A, donde

$$A = \{(x, y)|x = y\}.$$

El conjunto A, cuyos elementos son los puntos (x, y) que satisfacen la condición $x = y$ es un lugar geométrico o curva.† La ecuación de este lugar geométrico es la condición $x = y$, que debe ser verificada por las coordenadas de los puntos (y sólo por las de esos puntos). La gráfica de este lugar geométrico es la que vemos representada en la fig. 4-6, a saber: la representación geométrica del conjunto de puntos A en el plano cartesiano de coordenadas.

Consideraremos las tres importantes definiciones siguientes, entre las cuales deberá hacerse una clara distinción.



4-6

DEFINICIÓN 4.6. *Un* lugar geométrico (*o* curva) *es el conjunto de puntos, y sólo esos puntos, cuyas coordenadas satisfacen cierta condición.*

DEFINICIÓN 4.7. *La* ecuación *de un lugar geométrico es la condición que las coordenadas de los puntos de ese lugar geométrico, y sólo esos puntos, deben satisfacer.*

DEFINICIÓN 4.8. *La* gráfica *de un lugar geométrico es la representación geométrica del conjunto de puntos del lugar geométrico.*

* Además de esta condición se tendrá que $(x, y) \in R$, lo cual estará siempre implícito a menos que se indique específicamente lo contrario.

† La palabra *curva* se utiliza aquí en el sentido restringido a dos dimensiones.

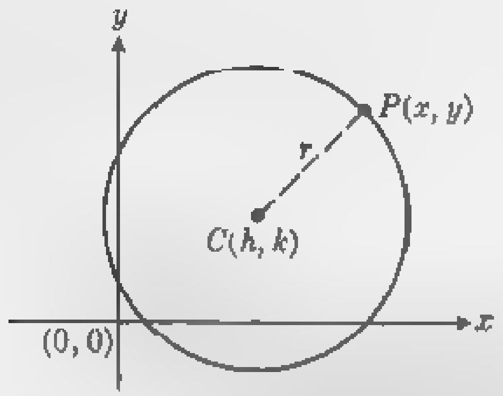
En secciones posteriores consideraremos curvas elementales y sus respectivas ecuaciones; en la presente sección nos referiremos a la circunferencia.

Recordemos la definición de la circunferencia como lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia dada de un punto fijo; nos interesa, por tanto, el conjunto.

$$C = \{(x, y) | \text{la distancia entre } (x, y) \text{ y un punto fijo dado es constante}\}.$$

Si utilizamos la fórmula para la distancia entre dos puntos (ec. 4.9), podemos obtener la ecuación general de una circunferencia. Si $C(h, k)$ es el centro y r es el radio (fig. 4-7), la condición que todo punto de la circunferencia debe satisfacer es $CP = r$, esto es, las coordenadas de P deben satisfacer la ecuación

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$



4-7

Recíprocamente, si $CP = r$, entonces P está sobre la circunferencia. Por tanto, tenemos

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2, \tag{4.10}$$

que es la ecuación general de la circunferencia de centro (h, k) y radio r.

La circunferencia misma es el conjunto

$$C = \{(x, y) | (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}. \tag{4.11}$$

Ejemplo 1. La ecuación de la circunferencia de centro $(2, -3)$ y radio 4 es

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16.$$

y la circunferencia misma es el conjunto

$$\{(x, y) | (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16\}.$$

Ejemplo 2. La ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio 1 es

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1, \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de la circunferencia unitaria y es un caso especial importante en nuestro estudio; recuérdese el problema 16, sección 4.4. La circunferencia unitaria misma es el conjunto $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$.

PROBLEMAS

1 Escríbanse las ecuaciones de las circunferencias siguientes:

(a) centro (3, 1) y radio 5
(b) centro (4, −2) y radio 3
(c) centro (−1, 3) y tangente al eje x
(d) centro (2, −4) y la circunferencia pasa por (5, −8).

2 Encuéntrese una ecuación de la circunferencia con centro en (2, 3) y

(a) tangente al eje x
(b) tangente al eje y
(c) que pasa por el origen
(d) tangente a la recta de ecuación $x = 5$
(e) tangente a la recta de ecuación $y = 7$
(f) que pasa por el punto (4, 5).

3 Escríbase la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio r.

4 Descríbanse los conjuntos siguientes:

(a) $A = \{(x, y)|(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4\}$
(b) $B = \{(x, y)|(x - 2)^2 + (y + 7)^2 \leqslant 9\}$
(c) $C = \{(x, y)|(x - 2)^2 + (y + 7)^2 \geqslant 1\}$
(d) $D = \{(x, y)|(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 0\}$
(e) $E = \{(x, y)|(x + 2)^2 + (y - 5)^2 < 0\}$.

5 Descríbanse en palabras los conjuntos siguientes, siendo los conjuntos B y C los indicados en el problema 4: (a) $B \cup C$, (b) $B \cap C$.

6 Escríbase, en notación de conjuntos, el conjunto de los puntos (x, y) tales que

(a) están fuera de la circunferencia de centro (2, 3) y radio 4
(b) están en o dentro de la circunferencia de centro (−1, 3) y radio 2

4.6 La propiedad de plenitud*

Para caracterizar totalmente al conjunto R, es necesario agregar un axioma más a los ya mencionados.

Consideraremos el conjunto de las aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$, obte-

* El temario de esta sección no es esencial para los temas algebraicos que se consideran en este texto; se utiliza sólo en la sección que sigue, acerca de la longitud de un arco de circunferencia, y en la sección 14.1.

nidas mediante el proceso ordinario para determinar una raíz cuadrada. El conjunto $A = \{1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; \ldots\}$ es un subconjunto del conjunto $B = \{x|x \in R \text{ y } x^2 < 2\}$. En ninguno de estos conjuntos hay un elemento que sea igual o mayor que $\sqrt{2}$ de modo que $\sqrt{2}$ se llama una cota superior de ambos conjuntos. Evidentemente, existen muchas cotas superiores; así, por ejemplo, lo son $2\frac{1}{2}$, 3 y 4 pero $\sqrt{2}$ es la «mejor cota superior» en el sentido de que es la menor de todas estas cotas superiores.

DEFINICIÓN 4.9. *El número v se llama* cota superior *de un conjunto S si $x \leqslant v$ para todo $x \in S$. Análogamente, el número u se llama* cota inferior *de un conjunto S si $u \leqslant x$ para todo $x \in S$.*

En los ejemplos anteriores, v podría ser $\sqrt{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3$, etc. Para el conjunto A, u podría ser $1, 0, -3$, etc. ¿Son estos valores cotas inferiores de B? (¿Por qué?)

Entre todas las cotas de un conjunto, interesan especialmente la menor de las cotas superiores y la mayor de las cotas inferiores, si es que ellas existen.

Consideremos un conjunto arbitrario de números $X = \{x|a < x < b\}$. Si $c \in X$, tenemos por definición que $a < c$ y $c < b$. Puesto que por el problema 21, sección 4.1,

$$a < \frac{a+c}{2} < c,$$

sabemos que c no es una cota inferior de X. Análogamente, puesto que

$$c < \frac{c+b}{2} < b,$$

c no es una cota superior de X. En consecuencia, b es la mínima cota superior de X y a es la máxima cota inferior.

DEFINICIÓN 4.10. *Una cota superior b de un conjunto S es la* mínima cota superior *o* extremo superior *de S si no existe ninguna cota superior menor que b. Análogamente, una cota inferior a es la* máxima cota inferior *o* extremo inferior *de S si no existe cota inferior mayor que a.*

En el conjunto $X = \{x|a < x < b\}$, b es el supremo y a es el ínfimo.

El supremo y el ínfimo pueden pertenecer o no al conjunto. En el conjunto X, ellos no pertenecen al conjunto, pero pertenecen al conjunto $Y = \{x|a \leqslant x \leqslant b\}$. El conjunto de números reales $\{x|x \geqslant 0\}$ tiene un ínfimo cero pero no tiene supremo. Recordando el Teorema 1.1, vemos que el conjunto de números reales $\{x|x \geqslant 0, x \text{ es racional y } x^2 \geqslant 2\}$ tiene por ínfimo cero y $\sqrt{2}$ por supremo; su ínfimo cero pertenece al conjunto, pero su supremo $\sqrt{2}$, no. (¿Por qué?)

Después de estas consideraciones podemos ahora enunciar el axioma de plenitud para el conjunto de los números reales R.

AXIOMA C. *Todo conjunto S, con $S \subset R$, que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior o supremo. Análogamente, todo conjunto S, $S \subset R$, que tiene una cota inferior tiene una máxima cota inferior o ínfimo.*

Ejemplo. Demuéstrese que el conjunto de los enteros *positivos* I_+ no tiene cota superior.

Solución. Demostraremos esta proposición suponiendo que ella es falsa y llegando así a una contradicción. Supongamos que I_+ tiene una cota superior; como $I_+ \subset R$, I_+ tiene un supremo (por el Axioma C) que denotaremos por b. Luego, existe un b tal que si $x \in I_+$, $x \leqslant b$ y b es el menor número con esta propiedad; pero, si $x \in I_+$, $x + 1 \in I_+$, de modo que $x + 1 \leqslant b$ para todo $x \in I_+$: esto es, $x \leqslant b - 1$, lo cual contradice el hecho de que b es la mínima cota superior. Esta contradicción demuestra que I_+ no tiene cota superior.

Problemas

1 Indíquense el supremo y el ínfimo (si es que existen) de cada uno de los siguientes conjuntos:

Sup -3 Cota Sup x>0

(a) $\{x | x \in R \quad y \quad x < -3\}$ (b) $\{x | x \in F,\ x > 0 \quad y \quad x^2 > 2\}$

(c) $\{x | x \in I \quad y \quad -3 \leqslant x < 1\}$ (d) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in I \quad y \quad n > 0\right\}$.

2 Dése un ejemplo de un subconjunto de R tal que

(a) no tenga ni cota superior ni cota inferior.
(b) tenga una cota superior, pero no tenga cota inferior.
(c) no contenga a su supremo ni a su ínfimo.
(d) contenga a su supremo y a su ínfimo.

3 Demuéstrese por qué el conjunto $\{-1, 0, 1\}$ contiene a su supremo y a su ínfimo. ¿Cuáles son ellos?

4 Demuéstrese, utilizando el Axioma O1, que todo conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ puede ordenarse. Sabido esto, demuéstrese que todo conjunto finito contiene a su supremo y a su ínfimo.

5 Sea b el supremo del conjunto S de números reales. Si $x \in S$ y $x \nless b$, existe un número $y \in S$ tal que $x < y \leqslant b$. Si no fuera éste el caso, x sería una cota superior de S, contradiciendo el hecho de que b es el supremo. ¿Cuál es la propiedad análoga para a, ínfimo de S? Explíquese.

6 Si $r \in R$ y $r > 0$, demuéstrese que el conjunto $S = \{nr | n \in I_+\}$ no tiene cota superior.

Indicación: Supóngase que la proposición es falsa; entonces, existe un número real t tal que $nr \leqslant t$ para todo $n \in I_+$, por tanto, $n \leqslant (t/r)$ debe ser válido para todo $n \in I_+$. ¿Contradice esto el resultado del ejemplo?

7 Si $r > 0$ y $s > 0$, y $r, s \in R$, existe un entero positivo n tal que $nr > s$. Demuéstrese que la proposición es verdadera.

Indicación: Si no es verdadera, $n \leqslant (s/r)$ para todo $n \in I_+$.

8 Si a, b y c son números reales tales que $a < c < b$, decimos que c está comprendido entre a y b. Demuéstrese que siempre hay un número racional comprendido entre dos números racionales distintos.

Indicación: Véase problema 21, sección 4.1.

9 Si $a, b \in R$ y $0 < a < b$, demuéstrese que hay siempre un número racional comprendido entre a y b. Si bien la demostración de este importante resultado es algo complicada, cada paso es comparativamente sencillo. Dense las razones para cada paso en la demostración siguiente:

(i) Puesto que a y 1 son positivos, existe un entero positivo n' tal que $n'a > 1$.
(ii) Puesto que $b - a$ y 1 son positivos, existe un entero positivo n'' tal que $n''(b - a) > 1$.
(iii) Si n es el mayor entre n' y n'', tenemos $na > 1$ y $nb > 1 + na$
(iv) Puesto que na y 1 son positivos, existe un entero positivo m' tal que $m' > na$.
(v) Si m es el menor de los m', tenemos $na + 1 \geqslant m > na$.
(vi) Por tanto, $nb > m > na$, de modo que $b > (m/n) > a$

10 Bajo las mismas condiciones enunciadas en el problema 9 demuestrese que existe siempre un número irracional entre a y b.

Indicación: Si x es un número irracional tal como $\sqrt{2}$, $a(1/x) < b(1/x)$ y, por el problema 9, existen m y n tales que $a/x < m/n < b/x$ y, por tanto, $a < mx/n < b$. ¿Qué puede decirse acerca de mx/n?

4.7 Longitud de un arco de circunferencia

En esta breve sección indicaremos el modo en que el axioma de plenitud puede usarse para definir un concepto geométrico familiar, la longitud de un arco de circunferencia.

Además de la ecuación de una circunferencia, nos interesa también la noción de longitud de arcos de esta circunferencia; noción que necesitaremos tanto al definir las funciones circulares o trigonométricas como en el estudio y la medición de ángulos.

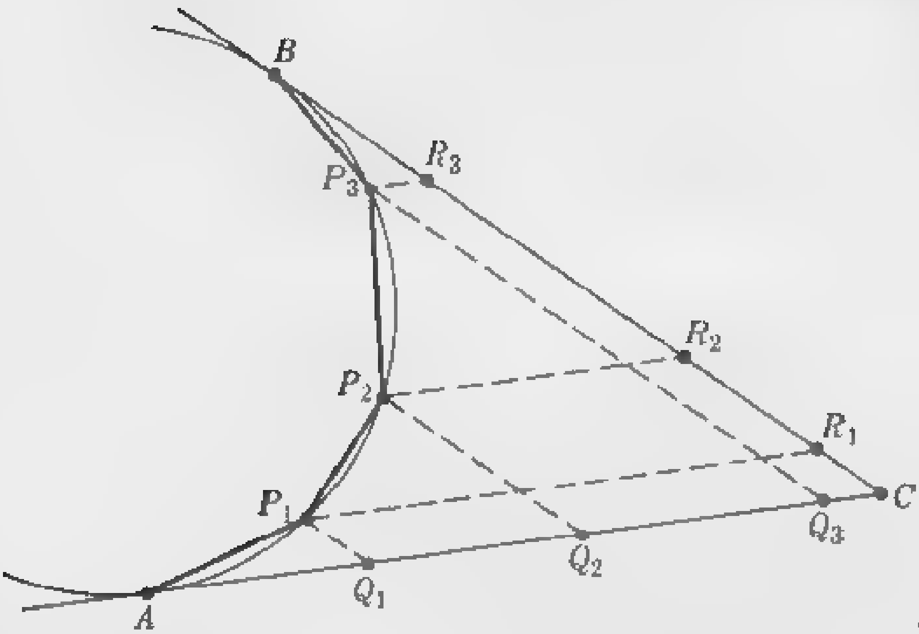
Si bien es imposible medir la longitud de un arco de circunferencia $\widehat{AB}$ como si fuera un segmento rectilíneo, podemos asignarle al arco $\widehat{AB}$,* fig. 4-8, una longitud s. Designando diversos puntos sobre $\widehat{AB}$ por $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, la longitud de la línea poligonal que une estos puntos es la suma de las longitudes de las cuerdas correspondientes, las cuales pueden obtenerse mediante la ec. (4.9). Sea I una *poligonal inscrita* en $\widehat{AB}$, que denotaremos por $AP_1P_2 \ldots P_nB$. Su longitud puede expresarse como

$$|I| = |AP_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + \cdots |P_nB|.$$

Podemos demostrar fácilmente que la longitud de cualquier poligonal inscrita de este tipo es menor que $|AC| + |CB|$, donde AC y CB son tangentes a la circunferencia en A y B, respectivamente, y C es su punto de intersección. Por cada punto P_i, trazamos paralelas a AC las que cortan a BC en R_i y paralelas a BC las que cortan a AC en Q_i. Puesto que la longitud de un lado de un triangulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos, tenemos

$$|AP_1| < |AQ_1| + |Q_1P_1| = |AQ_1| + |CR_1|.$$

* Si el arco es mayor que una semicircunferencia, una pequeña modificación del procedimiento permite obtener el mismo resultado



4-8

Además para cualquier P_iP_{i+1},

$$|P_iP_{i+1}| < |Q_iQ_{i+1}| + |R_iR_{i+1}| \quad \text{y} \quad |P_nB| < |Q_nC| + |R_nB|.$$

(Véase fig. 4-8). Del Teorema 4.4,

$$\begin{aligned}
|I| &= |AP_1| + |P_1P_2| + \cdots |P_iP_{i+1}| + \cdots + |P_nB| \\
&< |AQ_1| + |CR_1| + |Q_1Q_2| + |R_1R_2| + \cdots \\
&\qquad + |Q_iQ_{i+1}| + |R_iR_{i+1}| + \cdots + |Q_nC| + |R_nB| \\
&= |AQ_1| + |Q_1Q_2| + \cdots + |Q_iQ_{i+1}| + \cdots \\
&\qquad + |Q_nC| + |CR_1| + |R_1R_2| + \cdots + |R_iR_{i+1}| + \cdots + |R_nB| \\
&= |AC| + |CB|.
\end{aligned}$$

Por tanto, la longitud de cualquier poligonal inscrita en $\widehat{AB}$ tiene por cota superior $|AC| + |CB|$ y, como las longitudes son números reales (elementos de R), existe un extremo superior para el conjunto de las longitudes de todas las poligonales I. De aquí tenemos la siguiente definición

Definición 4.11. *La longitud s de un arco AB de circunferencia es el extremo superior del conjunto de las longitudes de todas las poligonales inscritas en el arco.*

Como consecuencia inmediata de esta definición, tenemos: (1) Para toda poligonal I, $|I| \leq s$; (2) La longitud del arco $s \leq |AC| + |CB|$.

Ejemplo. Recordemos la definición del número real π, aproximadamente igual a 3,14. El número π se define como la razón entre la longitud y el diámetro de una circunferencia; por tanto, la longitud de la circunferencia de radio r

es igual a $2\pi r$, o aproximadamente 6,28 veces el radio. Comparemos esto con los dos polígonos regulares de la fig. 4-9. Como el hexágono inscrito tiene un perímetro $6r$ y el cuadrado circunscrito tiene un perímetro $8r$, la desigualdad $6r < 2\pi r < 8r$ era de esperarse.

PROBLEMAS

1 ¿Cual es el perímetro del cuadrado inscrito en una circunferencia de radio r?

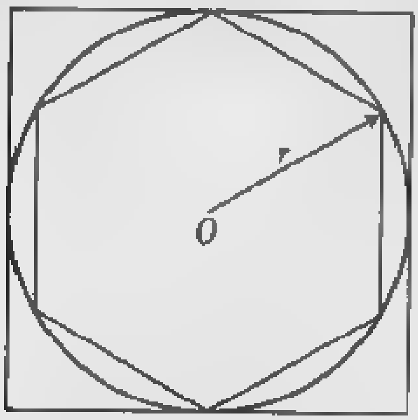
2 Determínese el perímetro del hexágono regular circunscrito a una circunferencia de radio r.

3 ¿Cuál es la longitud de la circunferencia unitaria (circunferencia de radio 1)? ¿Cuál es la longitud de un cuarto de esta circunferencia? ¿De un sexto de circunferencia? Exprésense las respuestas en función de π.

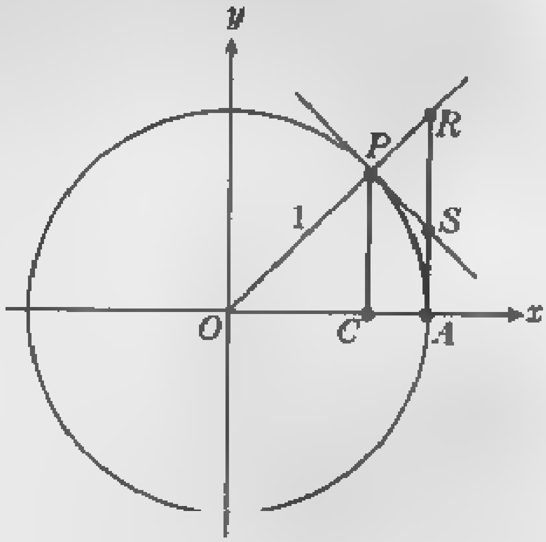
4 Si P y P' son dos puntos de una circunferencia tales que la cuerda PP' no es diámetro y D es el punto de intersección de las tangentes trazadas por P y P', ¿qué puede decirse de las longitudes relativas de la cuerda PP', el arco $\widehat{PP'}$ y $|P'D| + |PD|$? ¿Por qué?

5 En la fig. 4-10, se tiene una circunferencia unitaria de centro O; P es un punto de la circunferencia situado en el primer cuadrante y A es el punto de intersección de la circunferencia y el eje x. Se trazan las tangentes a la circunferencia en P y A, las que se cortan en S. La tangente en A corta a la prolongación de OP en R. Desde P se baja la perpendicular al eje x, que lo corta en C. Demuéstrese que $|PC| < |\widehat{PA}| < |AR|$.

Indicación: $|PC| < |PR|$ y $|SA| < |SR|$. ¿Por qué?



4-9



4-10

5

Funciones y su representación gráfica

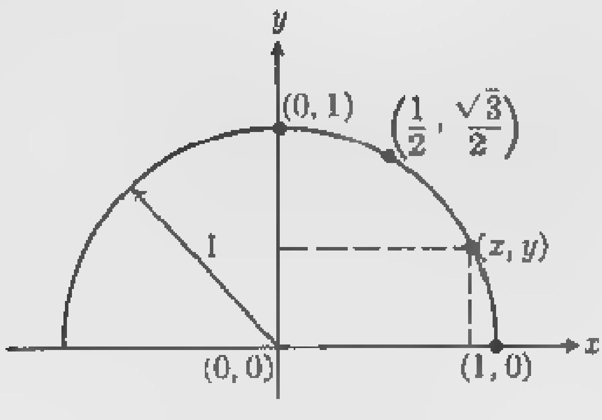
El concepto de *función* es de gran importancia y utilidad en matemáticas, y aparece prácticamente en todas sus ramas. Su significado en matemáticas, sin embargo, difiere ligeramente del que se le da en el lenguaje cotidiano. Nosotros utilizaremos la palabra *función* para designar un tipo bien específico de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos. En el presente libro, los elementos de estos conjuntos serán números reales, aunque éste no es siempre el caso en el concepto matemático general.

5.1 Funciones y relaciones

Al considerar la circunferencia unitaria (ejemplo 2, sección 4.5) vimos que su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Restando x^2 de ambos miembros y extrayendo raíz cuadrada positiva, tenemos

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \tag{5.1}$$

que es la ecuación de la «mitad superior» de la circunferencia (fig. 5-1). Del gráfico de esta semicircunferencia, vemos que para un determinado punto de la curva, la ordenada y queda determinada en forma *única* al darse su abscisa x. Análogamente, de la ec. 5.1 se deduce que para un determinado valor de x debe existir



5-1

un valor correspondiente de y; por ejemplo, si $x = 0$, y debe ser 1; si $x = 1$, y debe ser 0 y si $x = \frac{1}{2}$, y debe ser $\sqrt{3/2}$. Esta asociación o correspondencia que de hecho constituye una función específica es, evidentemente, más precisa que la de un conjunto producto arbitrario en el cual no se ha impuesto ninguna condición adicional. Obsérvese que este ejemplo satisface la definición general de función que enunciamos a continuación.

DEFINICIÓN 5.1. *Si a cada elemento de un conjunto X se le asocia exactamente un elemento de un conjunto Y, entonces esta asociación constituye una* función *de X en Y.*

Esto se escribe comúnmente $f : X \to Y$ y se lee «la función f de X en Y».

En álgebra y trigonometría nos interesa generalmente hacer hincapié tanto en los elementos de los conjuntos como en los conjuntos mismos. En este caso escribiremos $f : x \to y$, que se lee «f aplica x en y», donde suponemos $x \in X$ e $y \in Y$. El conjunto X se llama el *dominio* de la función f y el conjunto Y se llama el *recorrido o contradominio* de f.

La asociación puede efectuarse de muchas maneras distintas, generalmente, se hace mediante una ecuación como $y = \sqrt{1 - x^2}$, una tabla de valores o un gráfico; lo importante es que la función hace corresponder *uno y sólo un* elemento de Y con cada elemento de X. En el ejemplo precedente, el dominio es el conjunto

$$X = \{x | x \in R \quad \text{y} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1\},$$

y el recorrido es el conjunto

$$Y = \{y | y \in R \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Muchas veces podemos ser aun más específicos. Si combinamos el símbolo f de la función con los elementos x del dominio y consideramos $f(x)$ como el elemento correspondiente del recorrido, podemos escribir $f : x \to f(x)$. El símbolo $f(x)$* se considera, entonces, como el valor de f en x y se lee «f de x». En nuestro ejemplo, cuando $x = 0$, $f(0) = 1$; cuando $x = 1$, $f(1) = 0$ y cuando $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3/2}$. En muchos casos podemos ir aun más allá; si la función f se ha definido mediante una ecuación explícita para y en términos de x, como por ejemplo $y = \sqrt{1 - x^2}$, podemos escribir $f : x \to \sqrt{1 - x^2}$. Debe insistirse en el hecho de que en esta explicación x representa un elemento cualquiera del dominio de f, e y [o $f(x)$] representa el elemento correspondiente del recorrido. Evidentemente, pueden utilizarse otras letras, tales como u, v o t, para indicar elementos del dominio de f y $f(u)$, $f(v)$, o $f(t)$ indicarán los elementos correspondientes del recorrido. Además, en lugar de f pueden utilizarse otras letras, tales como g o h, para indicar la función. En general, una función $f : X \to Y$

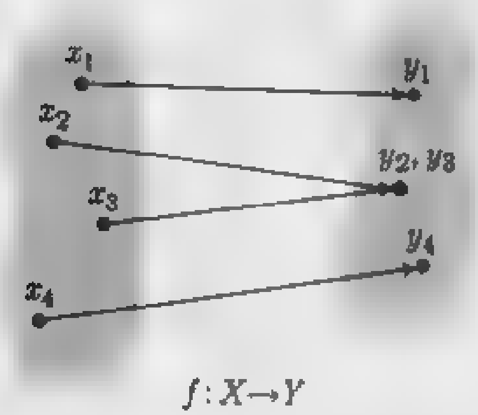
* El símbolo $f(x)$ no debe interpretarse como f multiplicado por x.

podría representarse como en la fig. 5-2, en la cual los elementos diferentes de X pueden estar asociados con el mismo elemento de Y pero *no* puede haber *dos* elementos distintos de Y correspondientes a un mismo elemento de X.

Resumamos el concepto de función. Hay *tres* partes importantes: el dominio X o conjunto de valores de x, el recorrido o contradominio Y o conjunto de valores de y y la regla o correspondencia que asocia estos dos conjuntos de una manera bien determinada. A menos que se diga específicamente lo contrario, tanto el dominio como el recorrido de toda función serán siempre el conjunto más grande posible de los números reales apropiados.

Ejemplo 1. Considérese la función definida por la ecuación $y = 2x - 6$ para todos los enteros positivos menores que 10. Así,

$$f : x \to 2x - 6, \quad \text{donde} \quad X = \{1, 2, \ldots, 9\}.$$



5-2

5-3

Para esta función, $f(1) = -4$, $f(2) = -2$, etc. La función f aparece ilustrada en la fig. 5-3.

Ejemplo 2. Recordemos que el área A de un círculo de radio r está dada por la expresión $A = \pi r^2$. Como π es una cantidad que permanece fija en valor (se llama por eso una *constante*), podemos considerar a $A(r) = \pi r^2$ como una ecuación que define la función que expresa la asociación entre valores del radio y el área correspondiente para un círculo cualquiera. Esta función puede escribirse $A : r \to \pi r^2$, $(r \geqslant 0)$. Por ejemplo, $A(0) = 0$; $A(1) = \pi$, $A(2) = 4\pi$, etc. El dominio y el recorrido de la función son todos los números reales positivos y cero.

Ejemplo 3. Una función importante, y con todo casi trivial, es la que asocia todos los números reales con un mismo número fijo. Tal función, llamada *función*

constante, podría escribirse $f : x \to c$. Como consecuencia de esta definición, $f(0) = c$, $f(1) = c$ o $f(\pi) = c$, y en general, $f(x) = c$ para todo $x \in R$, de modo que el dominio de la función es el conjunto R y su recorrido es el conjunto cuyo único elemento es el número real c.

EJEMPLO 4. En la sección 2.4 vimos que para cada número real $x(x \neq 0)$ existe un único inverso respecto a la multiplicación $1/x$ (el recíproco de x). Esta asociación define la función $r : x \to 1/x$, cuyos dominio y recorrido son el conjunto R exceptuando de éste el elemento 0.

Teniendo en cuenta estos ejemplos, se ve claramente que una función define un conjunto de pares ordenados, en el cual no hay dos pares que tengan el mismo primer elemento. Así, en el ejemplo 4, $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$, $(-3, \frac{1}{3})$ y $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ son pares ordenados que pertenecen a la función r. Desde este punto de vista, el conjunto X consiste de los primeros miembros de cada par ordenado e Y de los segundos; esto nos permite dar la siguiente definición equivalente:

DEFINICIÓN 5.2. *Una función de X en Y es un conjunto de* pares ordenados (x, y) *tales que a cada* $x \in X$, *le corresponde un único* $y \in Y$.

En consecuencia podemos usar la notación de conjunto para describir una función:

$$\{(x, y) | y = f(x)\}.$$

Si el par ordenado (a, b) pertenece a la función, esto es, $f(a) = b$, decimos que b es la *imagen* de a bajo f, y en general, el recorrido es la imagen del dominio de la función.

EJEMPLO 5. Si $y = a(x)$ está definido por:

$$a(x) = \begin{cases} x & \text{para} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{para} \quad x < 0, \end{cases}$$

la función, definida mediante expresiones diferentes para distintos subconjuntos del dominio, puede escribirse $a : x \to |x|$. ¿Cuál es el dominio y cuál el recorrido de la función? Los pares ordenados $(3, 3)$ y $(-4, 4)$ pertenecen a esta función. Indíquense otros pares ordenados que también pertenezcan a a.

El ejemplo siguiente muestra que el método de asociación no necesita ser una ecuación.

EJEMPLO 6. Sea s la función $s : \theta \to s(\theta)$, con $\theta \in R$, definida como la ordenada del punto de la circunferencia unitaria de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, que se obtiene aplicando a partir del punto $(1, 0)$ un arco de longitud θ a lo largo de la circunferencia, en sentido antihorario si $\theta > 0$ y en sentido horario si $\theta < 0$. El valor funcional $s(\theta)$ está definido por una regla que no puede expresarse mediante una igualdad algebraica. Verifíquese que $s(0) = 0$, $s(\pi) = 0$, $s(-\pi/2) =$

-1, $s(\pi/2) = 1$, $s(3\pi/2) = -1$, $s(4\pi) = 0$. [*Indicacion:* Recuérdese que la longitud de la circunferencia unitaria es 2π. El dominio de la función es R. ¿Cuál es el recorrido?]

En la definición de una función $f : x \to y$, el valor de y correspondiente a un determinado valor de x es único. En algunas expresiones puede ser posible que para un determinado valor de x, existan dos, tres, e incluso infinitos valores correspondientes de y; así, por ejemplo, si despejamos y en la ecuación de la circunferencia unitaria, $x^2 + y^2 = 1$, tenemos

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Si es esta la expresión que establece la asociación entre X e Y, existen dos valores de y que corresponden a un valor de x comprendido entre -1 y 1. En lugar de dar a esta correspondencia el nombre de función biforme (y, en general, multiforme), preferiremos llamarla *relación*. En este ejemplo la relación puede simbolizarse por

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}.$$

En forma más general, definimos una relación como un conjunto de pares ordenados determinados mediante una ecuación o una desigualdad.

DEFINICIÓN 5.3. *Una relación de X a Y es un conjunto de pares ordenados (x, y) tal que a cada $x \in X$ le corresponde al menos un $y \in Y$.*

Debe tenerse en cuenta que toda función es una relación pero existen muchas relaciones que no son funciones. Como en el caso de las funciones, una relación tiene dominio y recorrido. Si bien en este libro mencionaremos las relaciones, en lo posible restringiremos nuestra explicación a las funciones.

PROBLEMAS

1 Indíquese el dominio y el recorrido de las siguientes funciones, si $x, y \in R$

(a) $f : x \to x$ (b) $g : x \to \sqrt{x}$ (c) $p : x \to x^2$

(d) $f : x \to \sqrt{4 - x^2}$ (e) $g : x \to \sqrt{x^2 - 1}$ (f) $h : x \to \dfrac{x}{1 - x}$

(g) $f : x \to \dfrac{1}{x^2 - 1}$ (h) $g : x \to |x| - 2$

2 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos describen una función y cuáles describen solamente una relación?

(a) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ (b) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

(c) $\{(x, y) | y = 2x + 4\}$ (d) $\{(x, y) | 2x + 3y = 6\}$

(e) $\{(x, y) | x + y^2 = 1\}$ (f) $\{(x, y) | y + x^2 = 1\}$

(g) $\{(x, y) | (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9\}$ (i) $\left\{(x, y) \middle| x + \dfrac{1}{y - 3} = 7\right\}$

(h) $\{(x, y) | x \leqslant y\}$ (j) $\{(x, y) | |x| + |y| = 1\}$

3 ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de cada una de las funciones y relaciones del problema 2?

Determínense el dominio y el recorrido para cada una de las siguientes relaciones. Indíquese si alguna de las relaciones es una función.

4 (a) $\{(x, y) | x + y = 4\}$
(b) $\{(x, y) | y^2 + 1 = x\}$
(c) $\{(x, f(x)) | f(x) = x^2 + 1\}$

5 (a) $\{(x, y) | y = |x|\}$
(b) $\{(x, f(x)) | f(x) - x = (x + 1)^2\}$
(c) $\{(x, y) | x = |y|\}$

6 Si $f: x \rightarrow 2x - 5$, determínese

(a) $f(0)$ (b) $f(1)$
(c) $f(3)$ (d) $f(-1)$

7 Si $f: x \rightarrow x^2 - 7x + 10$, determínese

(a) $f(2)$ (b) $f(5)$
(c) $f(3)$ (d) $f(0)$

8 Si $f: x \rightarrow 1/(x - 3)$, determínese

(a) $f(4)$ (b) $f(2)$ (c) $f(-1)$
(d) ¿Qué puede decirse de $f(3)$?

9 Si $e: x \rightarrow 2^x$, donde el dominio es I, determínese

(a) $e(0)$ (b) $e(1)$
(c) $e(5)$ (d) $e(-5)$

10 Si $g: x \rightarrow x^{1/2}$, determínese

(a) $g(0)$ (b) $g(2)$
(c) $g(4)$ (d) $g(\frac{1}{4})$

11 Considérese la función definida por el conjunto $\{(x, y) | 10^y = x\}$. Si $y = f(x)$, determínese

(a) $f(1)$ (b) $f(10)$
(c) $f(100)$ (d) $f(\frac{1}{100})$

12 Si $a: x \rightarrow |x - 2|$, determínese

(a) $a(0)$ (b) $a(2)$
(c) $a(4)$ (d) $a(-2)$

13 Si f es una función constante, determínese $f(2)$ si

(a) $f(1) = 6$ (b) $f(6) = -3$ (c) $f(-3) = 4$

14 Si x es la longitud de un lado de un cuadrado, exprésese el perímetro P en función de x. Utilizando esta expresión para P podemos establecer una correspondencia entre la longitud x y el perímetro de un cuadrado. ¿Cuál es la función específica que esta asociación describe?

15 En el problema 14, exprésese el área A en función de x. ¿Cuál es la función descrita por esta asociación?

16 Si x es la longitud de un lado de un triángulo equilátero, exprésese el perímetro P en función de x. Exprésese el área A en función de x.

Indicación. En un triángulo rectángulo en que los ángulos agudos miden 30° y 60°, la hipotenusa es el doble del cateto menor. Utilícese el Teorema de Pitágoras para determinar la altura y recuérdese que $A = \frac{1}{2}(\text{base}) \cdot (\text{altura})$.

Cada una de estas expresiones define una función diferente. ¿Cuáles son estas dos funciones?

17 Si s se mide en metros y t en segundos, la ecuación $s = f(t) = -5t^2 + 10t$ expresa la altura sobre el suelo después de t segundos de una pelota lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros/segundo.* Determínese $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ y explíquese el resultado.

18 Verifíquense los valores de la función del ejemplo 6.

19 Para el mismo θ descrito en el ejemplo 6 defínase $c(\theta)$ como la abscisa del punto de la circunferencia en lugar de la ordenada. Determínese $c(0)$, $c(\pi/2)$, $c(\pi)$, $c(3\pi/2)$, $c(-\pi/2)$ y $c(4\pi)$.

▶ 20 Si una función f está definida por $f(x) = x^2$, demuéstrese que $f(-x) = f(x)$. Una función que satisface la condición $f(-x) = f(x)$ se llama *función par*. Menciónese otro ejemplo de función de este tipo.

▶ 21 Si una función f está definida por $f(x) = x^3$, demuéstrese que $f(-x) = -f(x)$. Una función que satisface esta condición se llama *función impar*. Menciónese otro ejemplo de una función impar.

Encuéntrese una expresión para $[f(x) - f(a)]/(x - a)$, $x \neq a$, y simplifíquese, si

22 (a) $f(x) = a$ (b) $f(x) = x$

23 (a) $f(x) = 3x$ (b) $f(x) = 1/x$

24 (a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$

Para describir en forma más precisa el comportamiento de las funciones es útil considerar algunas combinaciones básicas de ellas. Al estudiar estas combinaciones, debe tenerse siempre en cuenta los dominios de las funciones involucradas en forma tal que la combinación quede claramente definida.

Las más importantes combinaciones de funciones se definen como sigue:

DEFINICIÓN 5.4. *La función suma de dos funciones f y g se define como la función $f + g$, con valor funcional*

$$y = f(x) + g(x). \tag{5.2}$$

DEFINICIÓN 5.5. *La función producto de dos funciones f y g se define como la función $f \cdot g$, con valor funcional*

$$y = f(x) \cdot g(x). \tag{5.3}$$

* El coeficiente de t^2 en la ecuación $s = f(t)$ se ha aproximado al valor entero más cercano para facilitar los cálculos.

Definición 5.6. *La función cuociente de dos funciones f por g se define como la función f/g, con valor funcional*

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{5.4}$$

Definición 5.7. *La función compuesta o composición de dos funciones f por g se define como la función $f \cdot g$, con valor funcional*

$$y = f(g(x)). \tag{5.5}$$

A consecuencia de las definiciones 5.6 y 5.7, respectivamente, la función cuociente de g por f se define mediante $y = g(x)/f(x)$ y la función compuesta de g por f, mediante $y = g(f(x))$.

El dominio de $f + g$, fg y f/g es el conjunto de todos los números reales contenidos en ambos dominios, el de f y el de g; es decir, es la intersección de los dominios de f y g, excepto que en el caso del cuociente, éste no queda definido para aquellos x donde $g(x) = 0$. El dominio de $f \cdot g$ consta del conjunto de las x para las cuales $g(x)$ está contenido en el dominio de f. Salvo en el caso en que la función esté definida para todos los valores reales, debe especificarse claramente cuál es su dominio.

Ejemplo ilustrativo 7. Si $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = 6 - x - x^2$ para todo x real, la función suma de f y g se define como

$$y = (2x - 1) + (6 - x - x^2) = 5 + x - x^2;$$

la función de f y g se define como

$$y = (2x - 1)(6 - x - x^2) = 2x^3 - x^2 + 13x - 6;$$

la función cuociente de f por g se define como

$$y = \frac{2x - 1}{6 - x - x^2}, \qquad (x \neq 2 \text{ ó } -3);$$

la función compuesta de f por g se define como

$$f(g(x)) = 2(6 - x - x^2) - 1 = 11 - 2x - 2x^2;$$

y la función compuesta de g por f se define como

$$g(f(x)) = 6 - (2x - 1) - (2x + 1)^2 = 2(3 + x - x^2).$$

Problemas

En los problemas 1 a 5, en que se dan f y g, encuéntrense $f + g$, fg, f/g, $f \circ g$ y $g \circ f$. Indíquese el dominio de cada combinación.

1 $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 3x + 2$

2 $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x + 4$

3 $f(x) = 4 - 3x$, $g(x) = 2x - 3x^2$

4 $f(x) = 2/x$, $g(x) = x - 3$

5 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3$

6 Si $f(g(x)) = 1 - x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$, encuéntrese $f(x)$

7 Si $f(g(x)) = 1 - x^2$ y $g(x) = x$, encuéntrese $f(x)$

8 Si $f(g(x)) = x^2 + 2x + 1$ y $f(x) = x^2$, encuéntrese $g(x)$

9 Si $f(g(x)) = x^2$ y $f(x) = x - 1$, encuéntrese $g(x)$

10 Si $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x + 2$, encuéntrense $(f \circ g) \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$. ¿Son iguales las dos funciones compuestas?

11 Si $f(x) = x - 2$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = x^2$, encuéntrense $(f \circ g) \circ h$ y $f \circ (g \circ h)$ ¿Son iguales las dos funciones compuestas?

12 Si $f(x) = 2x + 1$, encuéntrense $(f(x))^2, f(x^2)$ y $f(f(x))$. ¿Son iguales las tres expresiones?

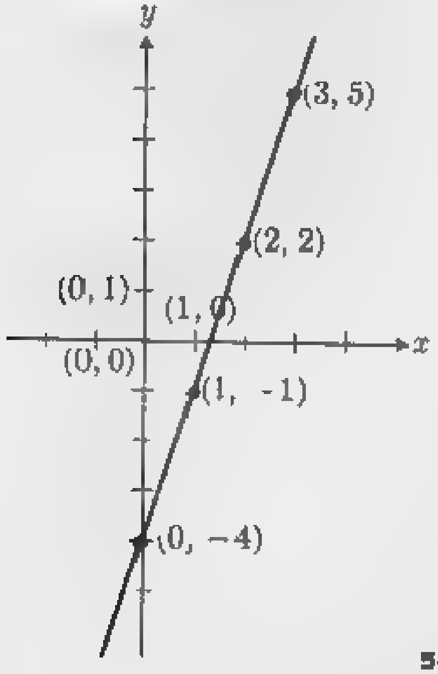
5.2 Representación gráfica de funciones y relaciones

Utilizando el sistema rectangular de coordenadas que estudiamos en la Sección 4.3 podemos exhibir la asociación entre x e y (o dos variables cualesquiera) en el caso de una función particular. Aunque no sea posible diagramar todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen una ecuación dada $y = f(x)$, generalmente se puede diagramar un número suficiente de ellos, de modo que es posible obtener una buena aproximación del diagrama de la función. El agregado de todos estos puntos forma la gráfica de la función f o la curva que representa esta función. (Recuérdese la Definición 4.8.)

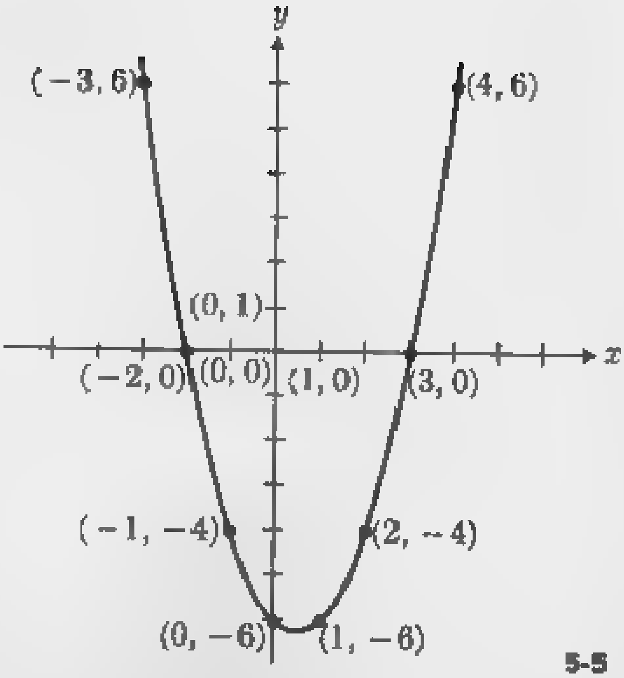
Ejemplo 1. Trácese la gráfica de $f : x \to 3x - 4$.

Solución. Asignando valores cualesquiera a x y calculando los valores correspondientes para y, podemos obtener todos los puntos (x, y) que se requieran y cuyas coordenadas satisfagan la ecuación $y = 3x - 4$. Los puntos, ordenados en la tabla a continuación, se llevan a una gráfica y se unen mediante una línea continua. La función $y = 3x - 4$ queda representada por una línea recta (fig. 5-4).

x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	-4	-1	2	5	8



5-4



5-5

EJEMPLO 2. Trácese la gráfica de la función $q : x \to x^2 - x - 6$.

Solución. Nuevamente, asignamos valores a x, calculamos los valores correspondientes de $y = q(x)$ y disponemos los resultados en una tabla.

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3
$y = q(x)$	-6	-6	-4	0	6	-4	0	6

Si trazamos una línea continua por estos puntos (x, y), comenzando por el punto de abscisa -3, en seguida -2, -1, etc., obtenemos el resultado que aparece en la fig. 5-5. Esta curva, llamada *parábola*, es la gráfica pedida. A menudo, para completar la gráfica correctamente, es necesario determinar puntos adicionales cuyas coordenadas satisfagan la condición requerida [p. ej., $(\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4})$]. Si bien siempre es posible trazar muchas curvas diferentes por los puntos determinados, cualquiera que sea el número de éstos, la curva pedida se obtiene mediante una «interpolación» razonable entre los puntos diagramados.

En los dos ejemplos considerados, la gráfica de la función atraviesa el eje x; en estos puntos, la ordenada y es cero. Las abscisas x de estos puntos reciben el nombre de ceros o raíces de la función. En el ejemplo 1, el cero de la función es $x = 4/3$; en el ejemplo 2, hay dos ceros de la función, -2 y 3. En general, un cero o raíz de una función es la abscisa del punto en que la gráfica de la función atraviesa o toca al eje horizontal.

EJEMPLO 3. Trácese la gráfica de la función representada por el conjunto de pares ordenados $\{(x, y) | y = |x - 2|\}$.

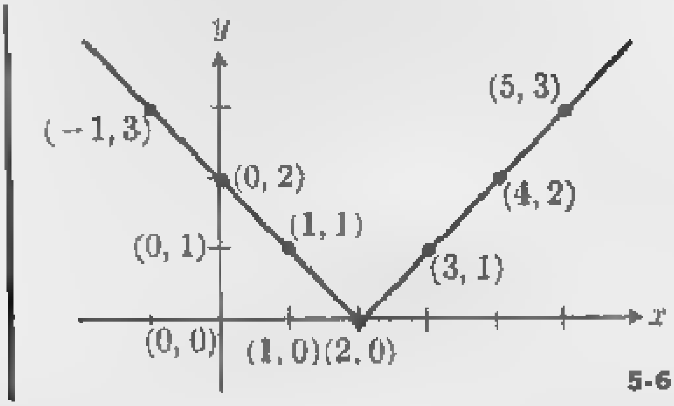
Solución. Construimos la tabla

x	0	1	2	3	4	5	-1
y	2	1	0	1	2	3	3

diagramamos los puntos y trazamos la gráfica. (Véase fig. 5-6.) Obsérvese que $x = 2$ es cero o raíz de la función aunque la curva no atraviesa el eje x.

Una relación puede representarse gráficamente exactamente en la misma forma La fig 4-7 ilustra una gráfica de este tipo para la relación

$$\{(x, y) | (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}.$$



5-6

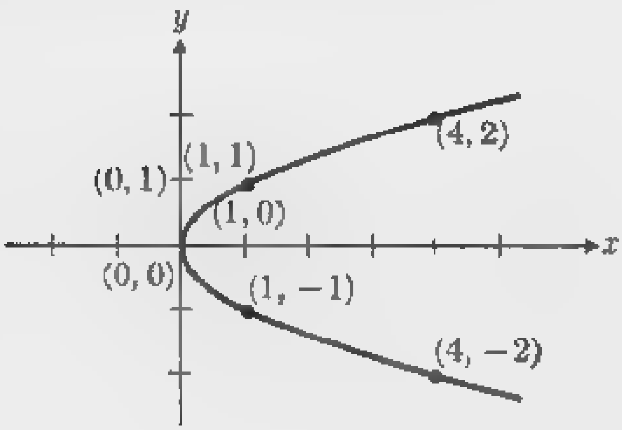
Debe observarse que toda línea vertical corta la gráfica de una función a lo más una vez, en tanto que puede cortar la gráfica de una relación un número cualquiera de veces (¿por qué?).

EJEMPLO 4. Bosquéjese la gráfica de la relación $\{(x, y) | y^2 = x\}$.

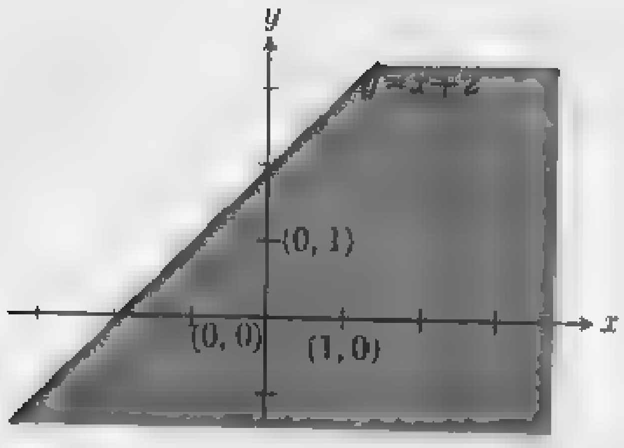
Solución. Si despejamos y en $y^2 = x$, obtenemos $y = \pm\sqrt{x}$, de modo que la tabla puede construirse en forma relativamente fácil

x	0	1	2	4
y	0	± 1	$\pm\sqrt{2}$	± 2

Como era de esperarse, vemos que para cada valor de x, hay dos valores correspondientes de y. La gráfica se ilustra en la fig. 5-7.



5-7



5-8

EJEMPLO 5. Trácese la gráfica de la relación $\{(x, y) | y \leqslant x + 2\}$.

Solución. Para obtener la gráfica de esta relación, dibujamos primeramente la línea recta $y = x + 2$ y observamos en seguida que para un valor determinado de x, el punto (x, y) pertenece al conjunto pedido si su ordenada y es igual o menor que el valor correspondiente al punto que está sobre la línea. El conjunto pedido es, por tanto, la recta $y = x + 2$ y todos los puntos situados bajo ella. El área sombreada indica la gráfica de esta relación (fig. 5-8).

PROBLEMAS

Trácese la grafica de cada una de las funciones definidas en los problemas 1 a 12. Señalense las escalas en ambos ejes e indíquense los ceros de cada función.

1 $y = 2x + 5$

2 $y = 6 - 3x$

3 $y = x^2/16$

4 $y = -4x^2$

5 $y = x^2 - 7x + 10$

6 $y = -x^2 - x + 30$

7 $y = |x - 1|$

8 $y = |2x - 3|$

9 $y = \sqrt{x - 1}$

Indicación: y no es nunca negativo

10 $y = x^3$

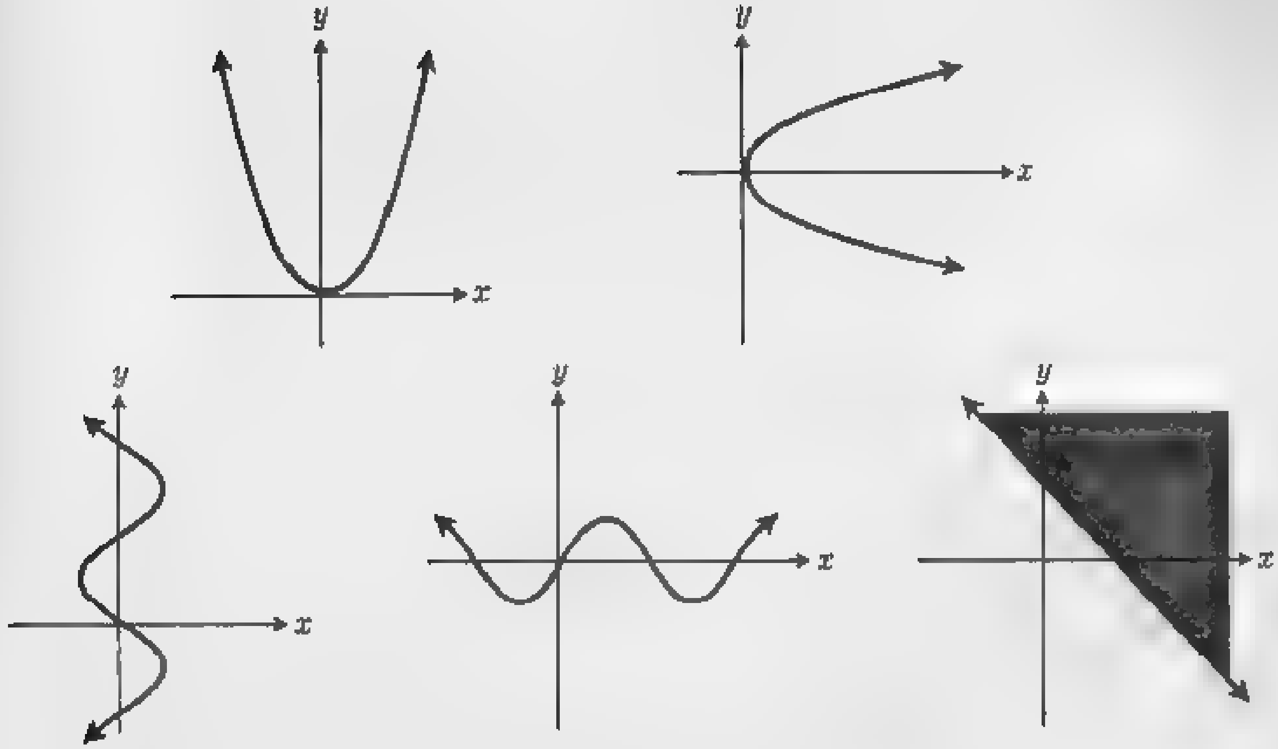
11 $y = x^3 - x$

12 $y = \sqrt{x(2 - x)}$. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de esta función?

13 Trácese la gráfica de cada una de las funciones dadas en el problema 1, primer grupo, sección 5.1.

14 En la fig. 5-9, ¿qué gráficas representan funciones y cuáles representan solamente relaciones? ¿Por qué?

15 Trácese la grafica de cada uno de los conjuntos definidos en el problema 2, primer grupo, sección 5.1.



5-9

16 Trácese la gráfica de cada uno de los siguientes conjuntos. ¿Cuál representa una función?

(a) $\{(x, y) | yx^2 = 1\}$ (b) $\{(x, y) | y^2x = 1\}$

17 Trácese la gráfica de cada relación.

(a) $\{(x, y) | x + y < 2\}$ (b) $\{(x, y) | 2x - 3y < 6\}$

18 Trácese la gráfica de la relación.

$$\{(x, y) | x - 3y + 3 > 0\} \cap \{(x, y) | y > x^2 - 7x + 10\}$$

6

Las funciones circulares

6.1 Trigonometría

Alrededor del año 1600, Bartolomé Pitiscus, profesor de matemáticas de Heidelberg, escribió el primer texto que llevó el título de *Trigonometria*. La idea del autor era exactamente exponer lo que el nombre implica: medición de triángulos. El origen de la trigonometría debe buscarse, sin embargo, en tiempos aun anteriores, en el estudio de la esfera celeste, en la cual se suponía que se desplazaban el sol, la luna y las estrellas y cuya posición se calculaba mediante la medición de ángulos. Los dos hombres famosos que más se interesaron por estos estudios fueron los astrónomos griegos Hiparco de Nicea (siglo II a.C.) y Claudio Ptolomeo (siglo II d.C.). Como consecuencia de esto, es fácil formarse la impresión de que la principal, si no única, aplicación de la trigonometría es la resolución de triángulos y, por tanto, sus campos de aplicación debieran ser la astronomía, la navegación y la agrimensura. Esto puede haber sido verdad hace 2000, o tal vez 400 años, pero ciertamente no es el caso en nuestros dias.

Con el desarrollo de la trigonometría, ha ido progresando el estudio general de las funciones circulares; tal es así, que actualmente se define la trigonometría como la rama de las matemáticas que estudia las propiedades y aplicaciones de las funciones circulares o trigonométricas.

Definiremos las funciones circulares en forma que tanto el dominio como el recorrido de ellas sean conjuntos de números reales; como veremos, este método general de definición tiene grandes ventajas en muchas aplicaciones de estas funciones.

6.2 Definición de las funciones circulares

Consideremos la circunferencia unitaria, de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, esto es, con el centro en el origen de un sistema rectangular de coordenadas (fig. 6-1). Si un punto P parte del punto $A(1, 0)$ y se desplaza $|\theta|$ unidades alrededor de la circunferencia, en sentido antihorario si $\theta > 0$ y en sentido horario si $\theta < 0$, podemos ubicar la posición exacta de P para cualquier valor de θ. Si $|\theta| > 2\pi$ (longitud

de la circunferencia), continuaremos alrededor de la circunferencia más allá de A hasta completar toda la distancia. Puesto que la longitud de un arco de circunferencia está bien definida (Definición 4.11), a cada valor de θ le corresponde un punto, llamado *punto terminal*, cuya distancia a $(1, 0)$ medida sobre la circunferencia es $|\theta|$ unidades. Designando este punto por $P(\theta)$, vemos que hemos definido la función

$$P : \theta \longrightarrow P(\theta), \tag{6.1}$$

cuyo dominio es el conjunto R, y cuyo recorrido es el conjunto de todos los puntos o pares ordenados $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$. Desgraciadamente, se presentan a veces inconvenientes al considerar funciones que asocian números reales con pares ordenados; en consecuencia, para simplificar la situación definiremos dos funciones, una de las cuales aplica θ en x y la otra aplica θ en y. Específicamente,

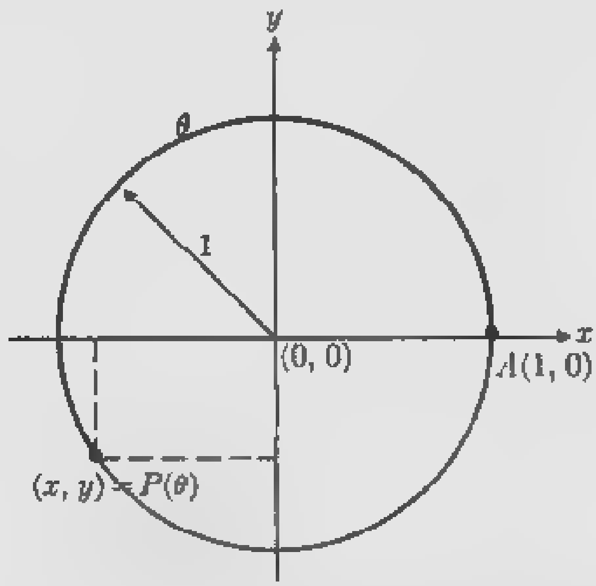
$$\text{cos}: \theta \longrightarrow x \qquad \text{donde } x \text{ es la abscisa de } P(\theta),$$

y

$$\text{sen}: \theta \longrightarrow y \qquad \text{donde } y \text{ es la ordenada de } P(\theta).$$

Como *cos* es la abreviatura de *coseno* y *sen* la de *seno*, los valores de estas funciones se escriben $x = \cos(\theta)$ o, $x = \cos\theta$ y se lee «x es el coseno de θ» y análogamente, $y = \operatorname{sen}\theta$ y se lee «y es el seno de θ».

Repitamos estas definiciones ahora por medio de las ecuaciones correspondientes dadas como conjuntos de pares ordenados.



6-1

DEFINICIÓN 6.1. *Si el punto terminal $P(\theta)$ tiene las coordenadas rectangulares x e y,*

$$\cos = \{(\theta, x) | x = \cos\theta\} \qquad \text{y} \qquad \text{sen} = \{(\theta, y) | y = \text{sen}\,\theta\}. \tag{6.1}$$

El dominio de cada función es R y el recorrido de cada una es el subconjunto de

$$R = \{r | -1 \leqslant r \leqslant 1\}$$

(¿por qué?). Recordando que la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, obtenemos la tabla siguiente:

θ	$P(\theta)$	$\cos\theta$	$\text{sen}\,\theta$
0	(1, 0)	1	0
$\pi/2$	(0, 1)	0	1
π	(−1, 0)	−1	0
$3\pi/2$	(0, −1)	0	−1
2π	(1, 0)	1	0

Definiremos ahora otra función circular, la función *tangente*, tan imporante como las dos anteriores.

DEFINICIÓN 6.2 *Si el punto terminal $P(\theta)$ tiene las coordenadas rectangulares x e y,*

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0) \tag{6.3}$$

es la ecuación que define la función tangente.

El dominio de esta función es el conjunto R, exceptuando de él los números $\pi/2 + n\pi$, donde $n \in I$ (¿por qué?); su recorrido es todo el conjunto R. Obsérvese la relación existente entre las tres funciones que hemos definido; como $\tan\theta = y/x$, tenemos

$$\tan = \left\{(\theta, z) | z = \tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\right\}, \tag{6.4}$$

que está definida para todos los valores de θ excepto aquellos para los cuales $\cos\theta = 0$. En este caso $\tan\theta$ no está definida (¿por qué?).

Tomando en cuenta los signos que tienen las coordenadas de un punto según el cuadrante en que éste se encuentre (sección 4.4) podemos determinar los signos que tendrán las funciones circulares en los distintos cuadrantes. La tabla siguiente, que recomendamos verificar al lector, da estos valores:

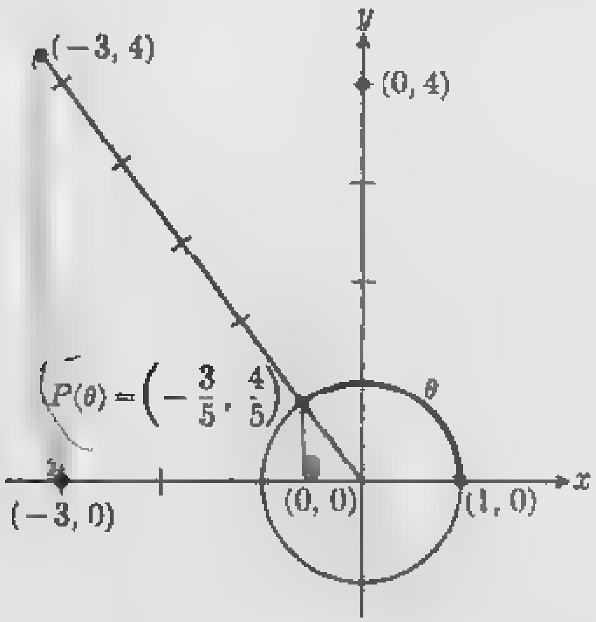
Cuadrante en que se encuentra $P(\theta)$	$\operatorname{sen}\theta = y$	$\cos\theta = x$	$\tan\theta = y/x$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

Como podemos observar por la primera tabla, las funciones toman valores muy especiales para los valores de θ que ahí se enumeran. El hecho de que la longitud de circunferencia 2π sea un número irracional, nos indica que no será fácil determinar las coordenadas de puntos tales como $P(1)$, $P(2)$, etc., mediante procedimientos elementales. Más adelante veremos cómo podemos determinar estos valores utilizando tablas apropiadas.

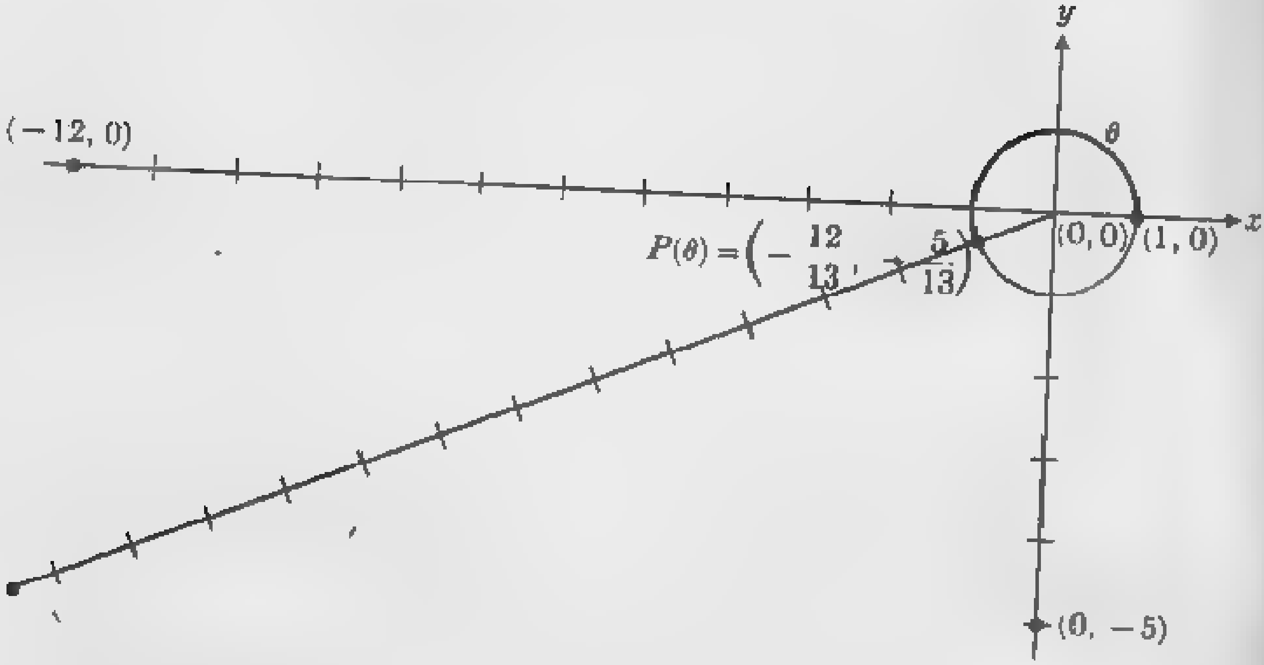
Existen, sin embargo, ciertos valores especiales de θ cuyas funciones circulares determinaremos en la sección 6.4; en el resto de la presente sección haremos hincapié en las relaciones que existen entre las funciones circulares.

Ejemplo 1. Para un determinado valor de θ, el punto $P(\theta)$ se encuentra en el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(-3, 4)$ (fig. 6-2). Determínense sen θ, cos θ y tan θ.

Solución. La distancia entre $(0, 0)$ y $(-3, 4)$ es $\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$; las coordenadas de $P(\theta)$, que se encuentran a distancia unitaria de $(0, 0)$, serán entonces $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. (Demuéstrese esto utilizando semejanza de triángulos.) Luego sen $\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ y $\tan\theta = -\frac{4}{3}$.



6-2

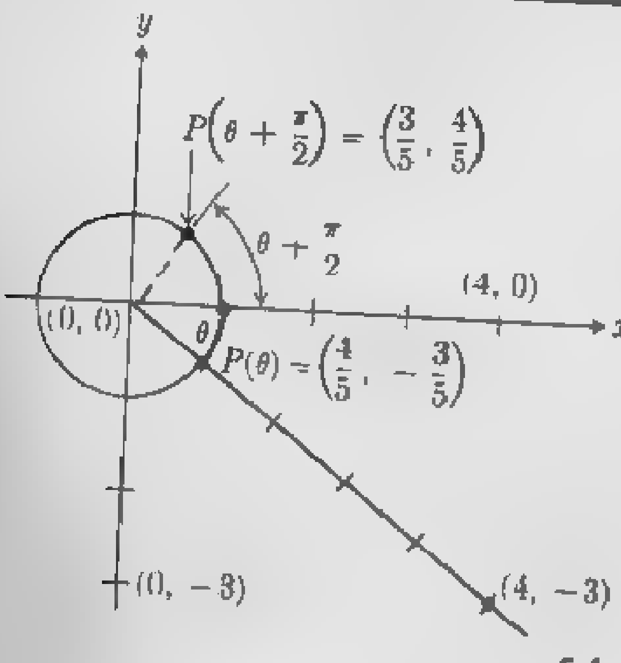


6-3

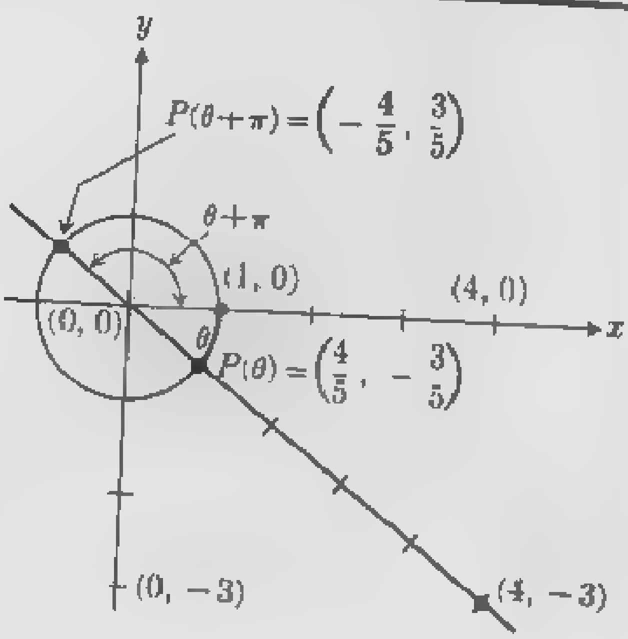
EJEMPLO 2. Determínense los valores de $\cos\theta$ y $\tan\theta$ si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}$ y $\tan\theta > 0$.

Solución. Como $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$ es la ordenada de un punto de la circunferencia unitaria, $x^2 + (-\frac{5}{13})^2 = 1$; luego, $x^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ o $x = \pm\frac{12}{13}$. Ahora, como $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$, el punto terminal $P(\theta)$ está en el tercer cuadrante; por tanto, $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ y $\tan\theta = \frac{5}{12}$. (Véase fig. 6-3)

EJEMPLO 3. Sea θ un número real cualquiera, y supongamos que el punto $P(\theta)$ correspondiente se encuentra en el segmento rectilíneo que une los puntos (0, 0) y (4, −3). (Véanse figs. 6-4 y 6-5.) Determínense seno, coseno y tangente de $\theta + \pi/2$ y $\theta + \pi$.



6-4



6-5

Solución. Análogamente al ejemplo 1, tenemos de inmediato $P(\theta) = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$; por tanto, por congruencia de triángulos,

$$P(\theta + \pi/2) = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) \qquad \text{y} \qquad P(\theta + \pi) = (-\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}),$$

de modo que

$$\operatorname{sen}(\theta + \pi/2) = \tfrac{4}{5}, \qquad \operatorname{sen}(\theta + \pi) = \tfrac{3}{5},$$

$$\cos(\theta + \pi/2) = \tfrac{3}{5}, \qquad \cos(\theta + \pi) = -\tfrac{4}{5},$$

$$\tan(\theta + \pi/2) = \tfrac{4}{3}, \qquad \tan(\theta + \pi) = -\tfrac{3}{4}.$$

Si θ se aumenta o disminuye en un múltiplo entero de 2π, $P[\theta + k(2\pi)]$ coincide con $P(\theta)$, de modo que los dos puntos tienen las mismas coordenadas; de aquí tenemos:

Teorema 6.1. *Para todo $\theta \in R$ y todo $k \in I$,*

$$\operatorname{sen}[\theta + k(2\pi)] \equiv \operatorname{sen}\theta, \tag{6.5}$$

y

$$\cos[\theta + k(2\pi)] \equiv \cos\theta. \tag{6.6}$$

Por tanto, si conocemos los valores de sen θ y cos θ en el intervalo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, conocemos sus valores para todo θ. Las funciones seno y coseno son *funciones periódicas*, de periodo 2π.*

La función tangente difiere del seno y el coseno en lo referente al periodo Como $\tan\theta = y/x = -y/-x$, y el punto $(-x, -y)$ es $P(\theta + \pi)$, tenemos

---

Teorema 6.2. *Para todo $\theta \in R$ y todo $k \in I$.*

$$\tan(\theta + k\pi) \equiv \tan\theta. \tag{6.7}$$

La función tangente es periódica, de periodo π.

Existen además otras tres funciones circulares; las *funciones cosecante, secante* y *cotangente*, de menor importancia que las tres mencionadas anteriormente, y que se definen en términos de las coordenadas de $P(\theta) = (x, y)$ en la forma siguiente:

* En general, *se dice que una función f es periódica*, de periodo p, si $f(\theta + p) = f(\theta)$ para todo θ Obsérvese que en la ec. 6.5., $k = 1$ da el menor valor de p, 2π, para el cual la expresión es válida. Generalmente, se da el nombre de *periodo* al menor valor de p.

DEFINICIÓN 6.3

$$\csc = \left\{(\theta, u) \middle| u = \csc\theta = \frac{1}{y}, y \neq 0\right\}, \tag{6.8}$$

$$\sec = \left\{(\theta, v) \middle| v = \sec\theta = \frac{1}{x}, x \neq 0\right\}, \tag{6.9}$$

y

$$\cot = \left\{(\theta, w) \middle| w = \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0\right\}. \tag{6.10}$$

Utilizando las ecs. (6.2) y (6.3), se ve de inmediato que:

$$\operatorname{sen}\theta \csc\theta \equiv 1, \tag{6.11}$$

$$\cos\theta \sec\theta \equiv 1, \tag{6.12}$$

y

$$\tan\theta \cot\theta \equiv 1. \tag{6.13}$$

A causa de las ecs. (6.11) a (6.13), las tres funciones recién definidas se llaman *funciones recíprocas*. (Recuérdese la definición de recíproco de un número, dada en el Axioma 6, sección 2.2.) Si sen θ, cos θ y tan θ son conocidas, cualquiera de las otras tres funciones puede determinarse en forma inmediata; por esta razón, no entraremos en más detalles acerca de ellas.

PROBLEMAS

¿Cuales de las siguientes expresiones son positivas? ¿Cuales son negativas?

1 sen 2	2 cos 2	3 tan 4
4 cos 5	5 tan 3,5 +	6 sen 4,5
7 sen (-1) —	8 cot (-2) —	9 tan $(-2{,}2)$ -
10 cos $2\pi/3$ —	11 tan $5\pi/4$ +	12 sen $(-11\pi/6)$
13 cot $9\pi/7$ +	14 sec $(-7\pi/8)$	15 csc $(-\pi/8)$ —

Suponiendo que $\theta \in R$, determínense los cuadrantes en que puede encontrarse el correspondiente $P(\theta)$ si se cumplen las condiciones siguientes:

16 $\operatorname{sen}\theta > 0$ I v II	17 $\cos\theta > 0$ I v IV
18 $\tan\theta > 0$ I v III	19 $\operatorname{sen}\theta < 0$ III v IV
20 $\cos\theta < 0$ II v III	21 $\sec\theta > 0$
22 $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\cos\theta > 0$ I	23 $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$ IV
24 $\tan\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$ I	25 $\operatorname{sen}\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$ II
26 $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$ III	

En cada uno de los problemas siguientes, el punto $P(\theta)$ se encuentra en el segmento rectilíneo que une el origen con el punto indicado. Bosquéjese la figura y determínese los valores de las funciones circulares para el respectivo valor de θ.

27 $(3, 4)$	28 $(-5, 12)$	29 $(-4, 3)$
30 $(24, -7)$	31 $(-8, -15)$	32 $(10, -8)$
33 $(0, -2)$	34 $(-1, 7)$	35 $(6, 0)$

Determínense los valores de sen θ, cos θ y tan θ bajo las condiciones siguientes.

36 $\operatorname{sen} \theta = \frac{5}{13}$, θ en el primer cuadrante.*

37 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, θ en el tercer cuadrante.

38 $\tan \theta = -\frac{1}{3}$, θ en el segundo cuadrante.

39 $\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{3}$, θ no está en el primer cuadrante.

40 $\cot \theta = \frac{4}{3}$, θ no está en el primer cuadrante.

41 $\cos \theta = \frac{5}{6}$, θ no está en el primer cuadrante.

42 $\tan \theta = \frac{1}{2}$, y sen θ es positiva.

43 $\operatorname{sen} \theta = -\frac{2}{3}$, y tan θ es positiva.

44 $\cos \theta = -\frac{7}{8}$, y tan θ es negativa.

45 $\tan \theta = \frac{2}{3}$.

46 $\sec \theta = -\frac{5}{3}$.

47 $\csc \theta = \frac{12}{7}$.

En los problemas 48 a 52, el punto $P(\theta)$ se encuentra en el segmento que une $(0, 0)$ y $(8, 15)$.

48–52 Bosquéjense y determínense las funciones circulares de

48 $\theta + \pi/2$

49 $\theta + \pi$

50 $\theta + 3\pi/2$

51 $\theta - \pi$

52 $\theta - \pi/2$

En los problemas 53 a 55, el punto terminal $P(\theta)$ se encuentra en el segmento que une $(0, 0)$ y $(5, -12)$. Bosquéjense y determínense las funciones circulares de

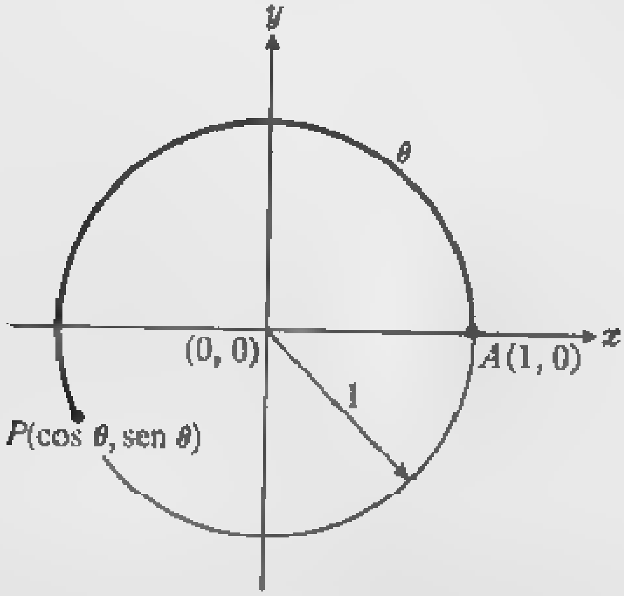
53 $\theta + \pi$	54 $\theta - \pi/2$	55 $\theta + 3\pi/2$

En los problemas 56 a 58 el punto $P(\theta)$ se encuentra en el segmento que une $(0, 0)$ y (3, [illegible]4). Constrúyase un gráfico y determínense las funciones de:

56 $\theta - \pi$	57 $\theta + \pi/2$	58 $\theta - 3\pi/2$

* Diremos que θ está en un cierto cuadrante si $P(\theta)$ está en ese cuadrante.

▶ 59 Explíquese por qué el punto terminal $P(\theta)$ en una circunferencia unitaria, correspondiente a un valor real cualquiera θ, tiene coordenadas $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. (Véase fig. 6-6.) Este es un concepto muy importante.



6-6

▶ 60 Indíquense los valores de tan θ, cot θ, sec θ, y csc θ (si existen) para $\theta = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ y 2π. Cuando sea necesario refiérase a la tabla dada en la presente sección.

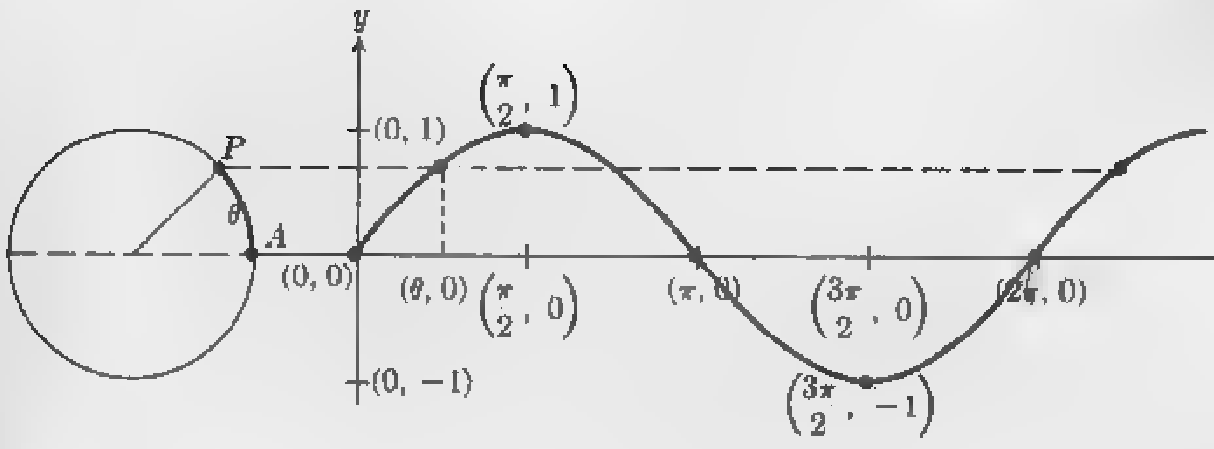
6.3 Comportamiento de las funciones seno y coseno

La tabla y el Problema 54 de la Sección 6.2 dan los valores de las funciones circulares cuando θ está en el extremo de un cuadrante (θ múltiplo entero de $\pi/2$).

Con estos datos obtenemos la tabla siguiente que indica cómo varían estas funciones a medida que θ aumenta de 0 a 2π.

Cuadrante en que está $P(\theta)$	θ varía de	sen θ varía de	cos θ varía de
I	0 a $\pi/2$	0 a 1	1 a 0
II	$\pi/2$ a π	1 a 0	0 a -1
III	π a $3\pi/2$	0 a -1	-1 a 0
IV	$3\pi/2$ a 2π	-1 a 0	0 a 1

Según la tabla se ve claramente que los valores de las funciones seno y coseno nunca serán mayores que 1; esto se desprende también del hecho de que estos valores son las coordenadas de un punto de la circunferencia unitaria. En cambio, la tangente puede tomar cualquier valor real positivo o negativo.



6-7

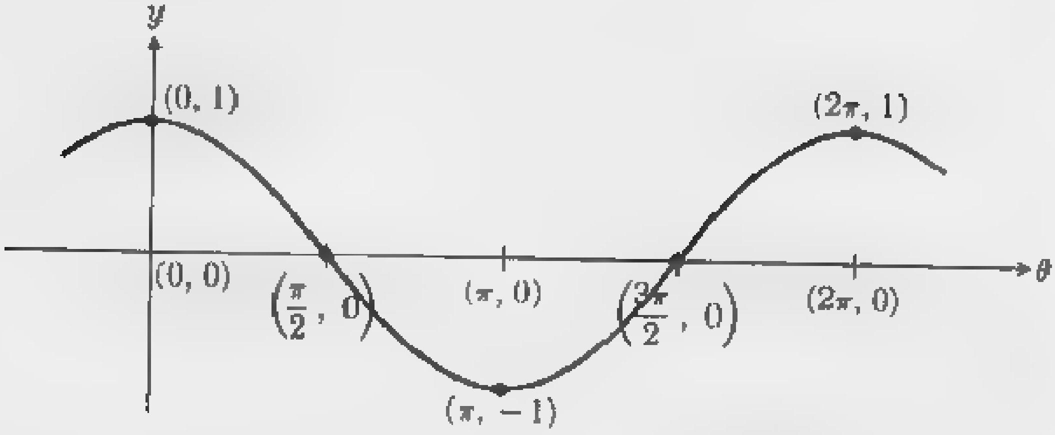
El comportamiento de las funciones circulares puede estudiarse convenientemente mediante una gráfica adecuada, llevando θ en el eje de abscisas y la función en el de ordenadas. Esta gráfica puede obtenerse directamente de la circunferencia unitaria.

Como ejemplo, consideremos la función $y = \text{sen}\ \theta$. En un sistema rectangular marquemos trazos de longitud $\pi/2$ a lo largo del eje θ (eje de abscisas) (véase figura 6-7) y construyamos una circunferencia unitaria con centro en este eje. Para obtener la gráfica de $y = \text{sen}\ \theta$, trasladamos paralelamente la ordenada de $P(\theta)$ hasta el punto de abscisa θ. Podemos obtener todos los puntos que deseemos, por ejemplo, bisecando los arcos de cada uno de los cuatro cuadrantes; en seguida bisecando los arcos resultantes y así sucesivamente. Finalmente obtenemos la gráfica de $y = \text{sen}\ \theta$* uniendo los puntos así diagramados mediante una curva continua. La curva continúa indefinidamente a derecha e izquierda pero sólo necesitamos trazarla desde 0 a 2π. (¿Por qué?) Observando la gráfica obtenemos las siguientes propiedades de la función sen θ.

1. La función es periódica, de período 2π. [Recuérdese la ec. (6.5).]
2. Si θ está en el primer cuadrante, sen θ es una funcion creciente.† (¿En qué otro cuadrante se presenta el mismo caso?)
3. Los valores de sen θ son positivos para θ en el primero y segundo cuadrantes, y negativos en el tercero y cuarto cuadrantes.
4. Los valores de sen θ están comprendidos entre -1 y 1.
5. Los ceros o raíces de sen θ son los múltiplos enteros de π, sen $k\pi = 0$ ($k \in I$).
6. La función tiene la propiedad de que $f(\theta) = -f(-\theta)$; específicamente, sen $\theta = -\text{sen}\ (-\theta)$ [Véase ec (6.27).] Luego, sen θ es una función impar. (Recuérdese problema 21, primer grupo, sección 5.1).

* La gráfica puede obtenerse también mediante puntos cuyas coordenadas pueden tomarse de la tabla 1 en el Apéndice. En el capítulo 15 continuaremos nuestra explicación sobre representación gráfica de funciones circulares.

† Si $\theta_1 > \theta_2$, entonces sen $\theta_1 > \text{sen}\ \theta_2$.



6-8

En la fig. 6-8 aparece la gráfica de $y = \cos\theta$, la cual puede construirse en forma análoga. Utilizando esta gráfica pueden enumerarse las propiedades de la función coseno análogas a las mencionadas arriba para la función seno.

Hemos mencionado ya algunas relaciónes entre las funciones circulares, por ejemplo, las ecs. (6.4), (6.11), (6.12) y (6.13). Como $\cot\theta \equiv 1/\tan\theta$ [ec. (6.13)] y $\tan\theta \equiv \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$ [ec. (6.4)], y aunque esto queda implicado como parte de la definición en la ec. (6.10), repetimos la identidad,

$$\cot\theta \equiv \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}. \tag{6.14}$$

Más importantes, sin embargo, son los resultados siguientes. Puesto que las coordenadas de un punto de la circunferencia unitaria son $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y estas coordenadas deben satisfacer la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, tenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \equiv 1 \tag{6.15}$$

para todo valor de θ, siendo $\operatorname{sen}^2\theta$ la notación usada para $(\operatorname{sen}\theta)^2$ y $\cos^2\theta$ para $(\cos\theta)^2$. Dividiendo ambos miembros de la ec. (6.15) por $\cos^2\theta$, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 \equiv \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

o

$$\tan^2\theta + 1 \equiv \sec^2\theta. \tag{6.16}$$

Dividiendo por $\operatorname{sen}^2\theta$ la ec. (6.15), obtenemos

$$1 + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

o

$$1 + \cot^2\theta \equiv \csc^2\theta. \tag{6.17}$$

EJEMPLO Determínense las seis funciones de θ si $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

Solución. Este ejemplo es análogo al ejemplo 2, sección 6.2. Lo resolvere-
os ahora mediante un segundo método. De la ec. (6.12) obtenemos $\sec\theta = \frac{5}{3}$
de la ec. (6.15),

$$\operatorname{sen}\theta \equiv \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \pm\sqrt{\tfrac{16}{25}} = \pm\tfrac{4}{5}.$$

signo depende del cuadrante en que esté $P(\theta)$. Como $\cos\theta > 0$, sabemos
e $P(\theta)$ está en el primero o cuarto cuadrante; si está en el primero $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$;
está en el cuarto, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$. De la ec. (6.4), $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \pm\frac{4}{5}/\frac{3}{5} =$
$\frac{4}{3}$; de la ec. (6.11), tenemos $\cot\theta = \pm\frac{3}{4}$ y la ec. (6.8) nos da $\csc\theta = \pm\frac{5}{4}$.

OBLEMAS

¿Qué relación existe entre las seis funciones de 2π y las de $\theta = 0$?

¿Cuáles son los valores de las seis funciones de $-\pi/2$?

¿Cuáles son los valores de las seis funciones circulares para los siguientes valores de θ?

(a) 3π	(b) $7\pi/2$	(c) $9\pi/2$
(d) 16π	(e) 15π	(f) 100π
(g) $5\pi/2$	(h) 4π	(i) 5π

¿Cuáles son los valores de las seis funciones circulares para los siguientes valores de θ?

(a) -5π	(b) $-\pi/2$	(c) $-3\pi/2$
(d) -6π	(e) $-11\pi/2$	(f) -40π
(g) $-\pi$	(h) $-7\pi/2$	(i) $-5\pi/2$

Verifíquese la tabla de la presente sección que da las variaciones de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$

Constrúyase una tabla análoga para las variaciones de $\tan\theta$ y $\cot\theta$.

Constrúyase una tabla análoga para las variaciones de $\sec\theta$ y $\csc\theta$.

Resuélvanse los problemas 36 a 47 de la sección 6.2 mediante el método indicado en el ejemplo de la presente sección.

Demuéstrese que $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$ y $\cos(k\pi) = (-1)^k$ para todo $k \in I$.

Constrúyase una gráfica como la fig 6-8 para $y = \cos\theta$, indicando el procedimiento empleado. Utilizando la gráfica, enumérense las propiedades de $\cos\theta$, análogas a las enunciadas para $\operatorname{sen}\theta$.

En un mismo sistema rectangular de coordenadas, represéntense ambas funciones $y = \operatorname{sen}\theta$ e $y = \cos\theta$, superponiendo una curva sobre la otra. Si bien las igualdades siguientes serán demostradas más adelante, ¿pueden deducirse de la figura?

(a) $\operatorname{sen}(\pi/2+\theta) \equiv \operatorname{sen}(\pi/2-\theta)$	(b) $\operatorname{sen}(-\theta) \equiv -\operatorname{sen}\theta$
(c) $\cos(\pi/2-\theta) \equiv -\cos(\pi/2+\theta)$	(d) $\cos(-\theta) \equiv \cos\theta$
(e) $\cos\theta \equiv \operatorname{sen}(\pi/2-\theta)$	(f) $\operatorname{sen}\theta \equiv \cos(\pi/2-\theta)$

▶ 12 Obténgase, en función de θ, una expresión para la longitud de una cuerda (de la circunferencia unitaria) cuyo arco tenga la longitud $|\theta|$.

Indicación: En la fig. 6-6 las coordenadas de A son $(1, 0)$ y las de $P(\theta)$ son $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos (ec. 4.9), tenemos

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}, \end{aligned}$$

o

$$\text{Longitud de la cuerda} = \sqrt{2 - 2\cos\theta}. \tag{6.18}$$

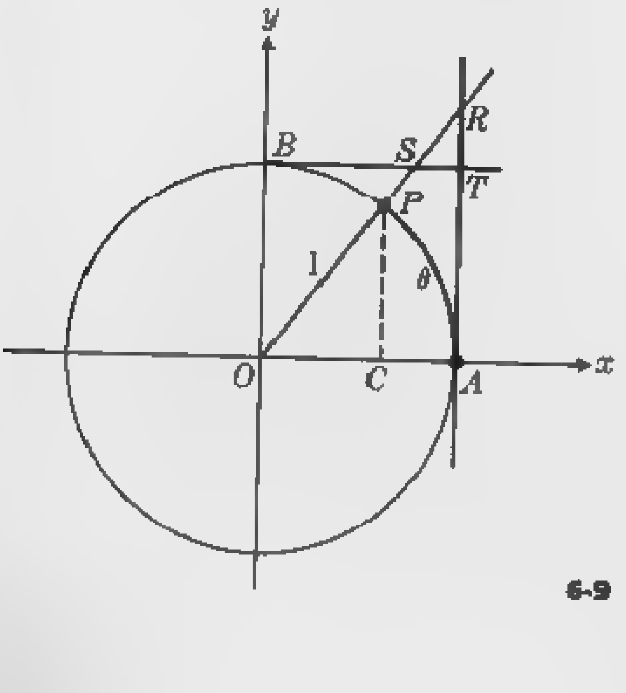
13 Determínese la longitud de la cuerda de una circunferencia unitaria si la longitud del arco correspondiente es (a) $\pi/2$, (b) π.

14 En la fig. 6-9, $P(\theta)$ es el punto terminal sobre la circunferencia unitaria correspondiente al número real θ. Trácense las tangentes a la circunferencia en $A(1, 0)$ y $B(0, 1)$ y sea T el punto de intersección de éstas; únase el origen O con $P(\theta)$ y prolónguese hasta cortar a las tangentes en R y S, respectivamente. (a) Verifíquese para esta figura que $\tan\theta$ es igual en magnitud a la longitud del segmento AR. Bájese la perpendicular desde $P(\theta)$ al eje x y sea C el pie de esta perpendicular; entonces los triángulos OPC y ORA son semejantes. Utilícese la proporcionalidad de lados para obtener el resultado. (b) Verifíquese que $\cot\theta$ es igual en magnitud a la longitud del segmento BS.

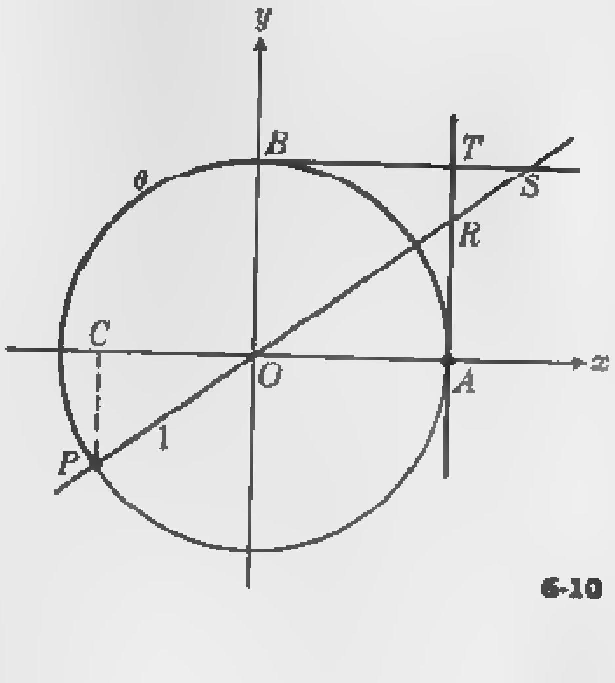
15 La fig. 6-10 es similar a la fig. 6-9, con la diferencia de que $P(\theta)$ está en el tercer cuadrante. Análogamente, constrúyanse las otras dos figuras, una con $P(\theta)$ en el segundo cuadrante y la otra con $P(\theta)$ en el cuarto cuadrante.

16 Utilizando las figuras del problema 15, las figs. 6-9 y 6-10 y los resultados del problema 14, verifíquese que las siguientes definiciones son equivalentes a las definiciones originales:

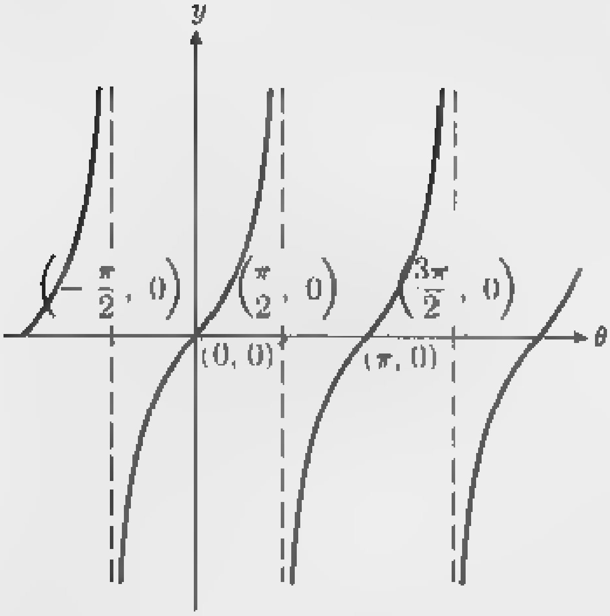
(a) $\tan\theta$ es la ordenada del punto R
(b) $\cot\theta$ es la abscisa del punto S



6-9



6-10



6-11

▶ 17 Utilizando una circunferencia unitaria y la definición de $\tan\theta$ dada en el problema 16, constrúyase la gráfica de $y = \tan\theta$. (Véase fig. 6-11.)

18 Utilizando la gráfica de $y = \tan\theta$ dada en la fig. 6-11, enumérense las propiedades de esta función, análogas a las indicadas para la función seno.

▶ 19 Demuéstrese que $\operatorname{sen}\theta < \theta < \tan\theta$ si $0 < \theta < \pi/2$.

Indicación: Véase problema 9, seccion 4.6.

20 Indíquese si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa, dando en cada caso la razón.

(a) Si $-\pi/2 < x_1 < x_2 < \pi/2$, $\operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2$.
(b) Si $-\pi/2 < x_1 < x_2 < \pi/2$, $\cos x_1 < \cos x_2$.
(c) Si $-\pi/2 < x_1 < x_2 < \pi/2$, $\tan x_1 < \tan x_2$.

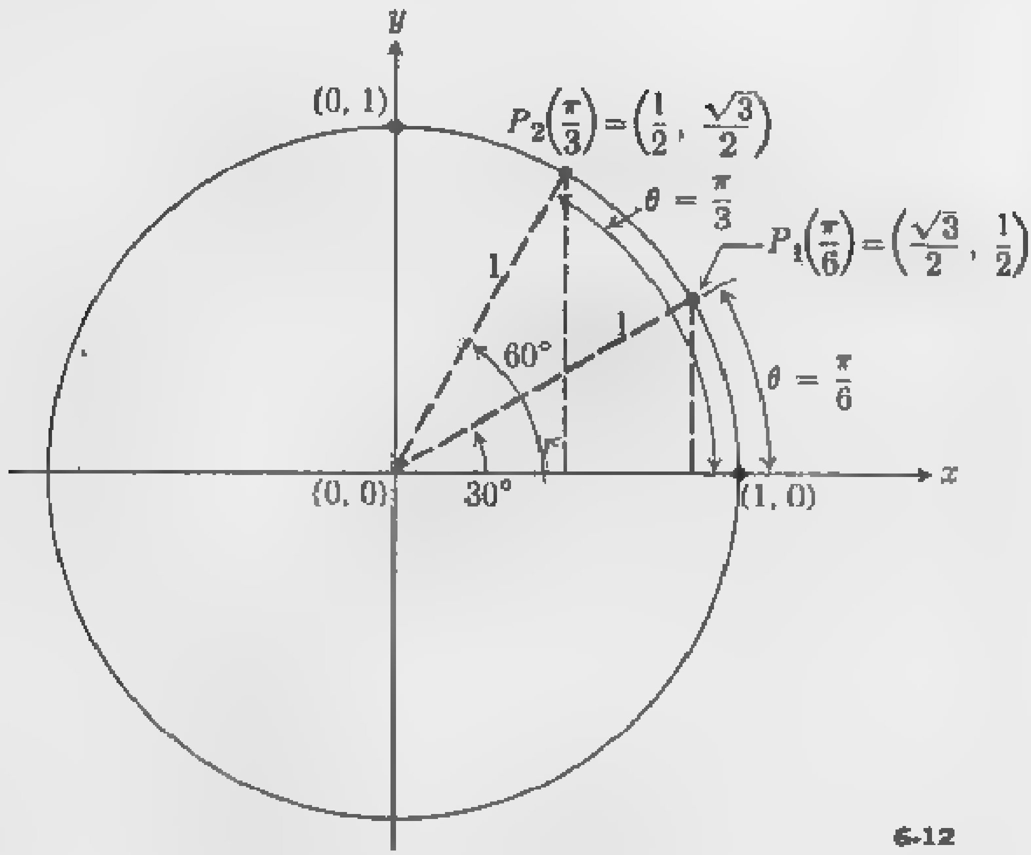
6.4 Valores de las funciones circulares para algunos números reales particulares

En la sección 6.2 mencionamos que podían determinarse los valores exactos de las funciones circulares para ciertos valores de θ, además de los que corresponden a extremos de cuadrantes. Dos de estos valores son $\pi/3$ y $\pi/6$. Si en la fig. 6-12, P_1 y P_2 son los puntos de trisección del arco de longitud $\pi/2$ desde (1, 0) a (0, 1).

$$P_1 = P(\pi/6) \qquad \text{y} \qquad P_2 = P(\pi/3).$$

Recordando por la geometría plana que, en un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°, la hipotenusa es el doble del cateto menor, obte-

nemos $P(\pi/6) = (\sqrt{3}/2, \frac{1}{3})$ y $P(\pi/3) = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$. (En ambos triángulos rectángulos de la figura, la longitud de la hipotenusa es 1; luego la del cateto menor es $\frac{1}{2}$ y la del otro cateto $\sqrt{3}/2$ por el Teorema de Pitágoras.)



6-12

Por tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \csc\frac{\pi}{6} = 2,$$

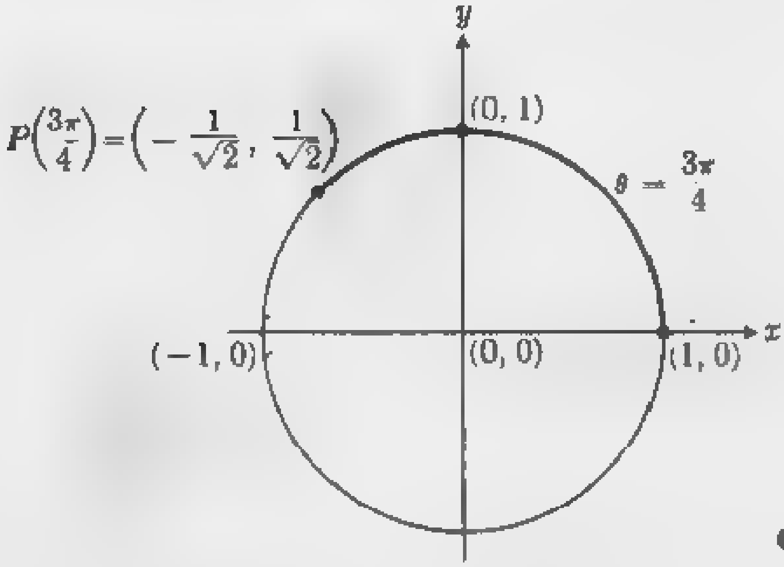
y analogamente, utilizando $P(\pi/3)$ tenemos,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2,$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \qquad \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

A partir de estos valores pueden obtenerse los de las funciones correspondientes a cualquier valor de θ de la forma $k(\pi/6)$ con $k \in I$ y k no múltiplo de 3 (valores de θ que no corresponden a extremos de cuadrantes).



6-13

Otro valor especial es todo múltiplo impar de $\pi/4$. Por ejemplo, si $\theta = 3\pi/4$, $P(3\pi/4)$ es el punto medio del arco que va de (0, 1) a (−1, 0). (Véase fig. 6-13.) Las dos coordenadas del punto son iguales en magnitud pero de signo contrario; de modo que substituyendo en la ecuación de la circunferencia unitaria obtenemos $x^2 + x^2 = 2x^2 = 1$, ó $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Como $P(3\pi/4)$ está en el segundo cuadrante, $x = -1/\sqrt{2}$ y, por tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cot\frac{3\pi}{4} = -1,$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \qquad \sec\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2},$$

$$\tan\frac{3\pi}{4} = -1, \qquad \csc\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

En forma análoga pueden obtenerse los valores de las funciones correspondientes a cualquier otro múltiplo impar de $\pi/4$.

Problemas

Trácese una figura, señálese la posición de cada valor de θ indicado y verifíquese cada igualdad siguiente determinando los valores exactos correspondientes.

1 (a) $\operatorname{sen}\pi/3 = \cos\pi/6$
(b) $\operatorname{sen}\pi/6 = \cos\pi/3$

2 (a) $\operatorname{sen}\pi/6 = \operatorname{sen}5\pi/6$
(b) $\cos 5\pi/6 = -\cos\pi/6$

3 (a) $\tan \pi/4 = \tan 5\pi/4$
(b) $\cot 3\pi/4 = \cot 7\pi/4$

4 (a) $\sec 11\pi/6 = \sec \pi/6$
(b) $\csc 2\pi/3 = -\csc 4\pi/3$

5 (a) $\operatorname{sen} 2\pi/3 = \operatorname{sen} (4\pi/3)$
(b) $\cos 7\pi/6 = \cos(-5\pi/6)$

6 (a) $\operatorname{sen} \pi/3 = 2 \operatorname{sen} \pi/6 \cos \pi/6$
(b) $\operatorname{sen} \pi/2 = 2 \operatorname{sen} \pi/4 \cos \pi/4$

7 (a) $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos \pi/3}{2}}$

(b) $\cos \dfrac{\pi}{6} = \sqrt{\dfrac{1 + \cos \pi/3}{2}}$

8 $\tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1 - \cos \pi/3}{\operatorname{sen} \pi/3} = \dfrac{\operatorname{sen} \pi/3}{1 + \cos \pi/3}$

9 $\cos \dfrac{\pi}{3} = \cos^2 \dfrac{\pi}{6} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi}{6} = 2 \cos^2 \dfrac{\pi}{6} - 1$

Determínense los valores exactos de las expresiones siguientes:

10 (a) $\operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi}{6} + \cos^2 \dfrac{\pi}{6}$ (b) $\operatorname{sen}^2 0 + \cos^2 0$

11 (a) $\sec^2 \dfrac{\pi}{3} - \tan^2 \dfrac{\pi}{3}$ (b) $\sec^2 \dfrac{5\pi}{4} - \tan^2 \dfrac{5\pi}{4}$

12 (a) $\csc^2 \dfrac{7\pi}{4} - \cot^2 \dfrac{7\pi}{4}$ (b) $\csc^2 \dfrac{3\pi}{4} - \cot^2 \dfrac{3\pi}{4}$

13 $\operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3} + \cos \dfrac{7\pi}{6} + \tan \dfrac{5\pi}{3}$

14 $\tan \dfrac{5\pi}{4} + \cot \dfrac{7\pi}{4} - \sec \dfrac{5\pi}{6}$

15 $\csc \dfrac{5\pi}{6} - \cos \dfrac{4\pi}{3} + \tan \dfrac{2\pi}{3}$

16 $\operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3} \cos \dfrac{5\pi}{6} + \cos \dfrac{2\pi}{3} \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{6}$

17 $\cos \dfrac{3\pi}{4} \cos \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}$

18 $\operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{6} \cos \dfrac{\pi}{3} \tan \dfrac{3\pi}{4}$

19 $\left(\cos \dfrac{11\pi}{6} + \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)\left(\tan \dfrac{\pi}{6} + \cot \dfrac{4\pi}{3}\right)$

20 $\left(\tan \dfrac{5\pi}{4} + \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2}\right) \cos \dfrac{5\pi}{6}$

Determínense todos los valores de θ entre 0 y 2π que satisfacen cada una de las ecuaciones siguientes.

21 $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$

22 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

23 $\tan \theta = 1/\sqrt{3}$

24 $\operatorname{sen} \theta = -\sqrt{3}/2$

25 $\tan \theta = -1$

26 $\cos \theta = -\sqrt{2}/2$

27 $\operatorname{sen} \theta = \sqrt{2}/2$

28 $\sec \theta = 2$

29 $\cot \theta = -\sqrt{3}$

30 $\csc \theta = 2/\sqrt{3}$

31 Si $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ y $\cos \theta < 0$, determínense

(a) $\cos \theta$ (b) $\tan \theta$ (c) $\sec \theta$

32 Si $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, determínense

(a) $\operatorname{sen}\theta$ (b) $\tan\theta$ (c) $\csc\theta$

33 Si $\tan\theta = -\sqrt{3}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$, determínense

(a) $\operatorname{sen}\theta$ (b) $\cos\theta$ (c) $\cot\theta$

34 Trazando una figura para cada uno de los valores siguientes de θ, constrúyase una tabla que dé los valores de las seis funciones circulares para cada uno de ellos: 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, π, $7\pi/6$, $5\pi/4$, $4\pi/3$, $3\pi/2$, $5\pi/3$, $7\pi/4$, $11\pi/6$, 2π.

35 Utilizando la ec. 6.18, determínense las longitudes de las cuerdas de la circunferencia unitaria correspondientes a los siguientes valores de θ

(a) $\pi/6$ (b) $\pi/3$ (c) $2\pi/3$

Determínese cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y explíquese.

36 (a) $\operatorname{sen}(-\pi/6) = \operatorname{sen}\pi/6$ (b) $\cos\pi/6 = \cos(-\pi/6)$

37 (a) $\sec\pi/3 = \sec(-\pi/3)$ (b) $\csc\pi/3 = \csc(-\pi/3)$

38 (a) $\tan\pi/4 = \tan(-\pi/4)$ (b) $\cot\pi/4 = \cot(-\pi/4)$

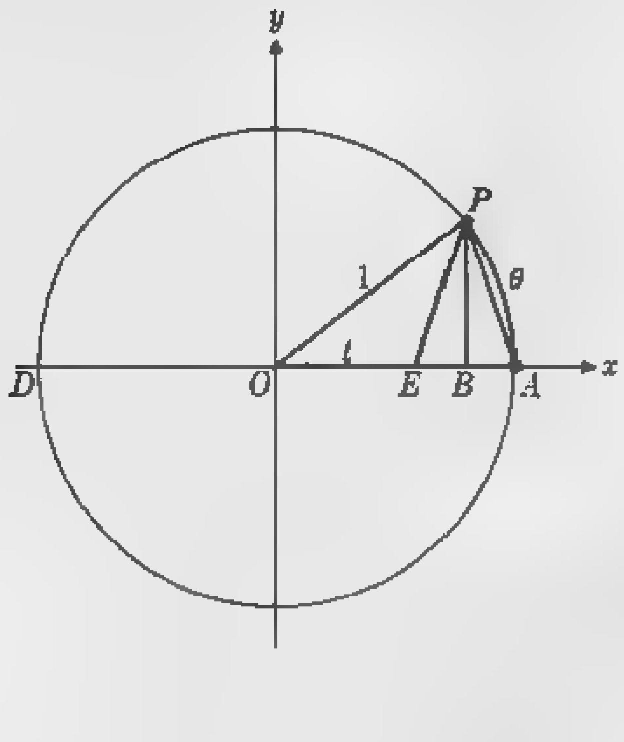
39 Hay dos valores de θ, con $0 \leqslant \theta < 2\pi$, donde $\operatorname{sen}\theta = 2$.

40 Hay dos valores de θ, con $0 \leqslant \theta < 2\pi$, donde $\tan\theta = 2$.

6.5 Valores exactos de las funciones circulares para $\theta = \pi/5$

Además de los ya estudiados, existe otro valor particular que es de interés, el de $\theta = \pi/5$. La construcción requerida para determinar exactamente los valores de las funciones para $\pi/5$ es ligeramente más complicada que las anteriores pero es siempre factible mediante procedimientos geométricos elementales. Una vez determinados estos valores tendremos los valores exactos de las seis funciones para π, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/5$ y $\pi/6$.

Consideremos la circunferencia unitaria de centro O y radio OA (fig. 6-14).



6-14

Determinemos un punto E sobre OA de modo que

$$\frac{\text{Longitud } OA}{\text{Longitud } OE} = \frac{\text{Longitud } OE^*}{\text{Longitud } EA}.$$

Designando por t la longitud de OE, tenemos

$$\frac{1}{t} = \frac{t}{1-t} \tag{6.19)†$$

La raíz positiva de esta ecuación de segundo grado †† es $t = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Determinemos P de manera que la longitud de la cuerda AP sea igual a t; entonces los triángulos OPA y AEP son semejantes y por tanto, el triángulo AEP es isósceles y la longitud de PE es t. En consecuencia, el triángulo OEP es también isósceles. De esto se deduce en forma inmediata que $\sphericalangle OAP = 2 \sphericalangle POA$. (Véanse Problemas 3, 4 y 5.) Como $\sphericalangle OAP$ queda medido por $\frac{1}{2}\widehat{PD}$,‡ $\sphericalangle POA$ queda medido por $\frac{1}{4}\widehat{PD}$; pero además, $\sphericalangle POA$ queda medido también por PA. En esta forma, tenemos que la longitud de $\widehat{PD}$, $|\widehat{PD}| = 4|\widehat{AP}|$; pero como, $|\widehat{PD}| + |\widehat{AP}| = \pi$, resulta $|\widehat{AP}| = \pi/5$.

Trazando PB perpendicular a OA, podemos determinar fácilmente las longitudes de OB y PB, esto es, las coordenadas de $P = P(\pi/5)$ que son el coseno y el seno de $\pi/5$. La longitud de EA es

$$1 - t = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

y la longitud de EB es $(3 - \sqrt{5})/4$. Por tanto, la longitud de OB es

$$OB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

---

* La construcción para determinar E es posible usando sólo regla y compás y es, en esencia, la misma que se utiliza para construir un pentágono regular

† La razón definida por la ec. (6.19) ha sido estudiada desde los tiempos de los matemáticos griegos y se le denomina *sección áurea* o *divina*. Los griegos la relacionaban con el concepto de estética que ellos tenían. (Véase problema 24, sección 8.9.) Mucho se ha escrito sobre este tema, que puede interesar al lector que desee una mayor información Por ejemplo:

1. E. T. Bell, *Historia de la matemática*, México: Fondo de Cultura Económica, 1949.
2. R. Courant y H. Robbins, *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar, S. A. de Ediciones, 1955.
3. H. V. Barravalle, «The Geometry of the Pentagon and the Golden Section», Mathematics Teacher, 1969.

†† Utilizamos aquí el teorema de geometría plana que expresa que un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco; en otras palabras, el ángulo inscrito queda medido por la mitad de este arco

Además, en el triángulo rectángulo OPB tenemos

$$(\text{longitud de } PB)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

Luego

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \qquad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}. \tag{6.20}$$

A partir de estos valores pueden determinarse los de las demás funciones circulares.

PROBLEMAS

Refiriéndose a la figura 6.14, demuéstrense en detalle las siguientes proposiciones.

1 El triángulo AEP es isósceles.

2 El triángulo OEP es isósceles.

3 Los ángulos AOP, OPE y EPA son iguales.

4 $\measuredangle OPA = \measuredangle OAP$.

5 $\measuredangle PAO = 2 \measuredangle POA$.

6 Utilizando la ec. (6.18), determínese la longitud de la cuerda correspondiente a $\theta = \pi/5$. ¿Qué relación hay entre este valor y el de t?

6.6 Identidades fundamentales de las funciones circulares

En las secciones precedentes hemos considerado algunas de las relaciones que existen entre las diferentes funciones circulares. A ocho de estas relaciones se les da el nombre de *identidades fundamentales de las funciones circulares*; ellas son, las tres relaciones recíprocas, ecs. (6.11), (6.12) y (6.13); las relaciones de la tangente y la cotangente, ecs. (6.4) y (6.14) y las tres relaciones «pitagóricas», ecs. (6.15), (6.16) y (6.17). A partir de estas ocho pueden deducirse otras identidades.

Utilizando estas relaciones, todas las funciones circulares pueden expresarse en función de una de ellas; así, en el siguiente ejemplo se expresan en función del seno.

EJEMPLO 1. Exprésense las seis funciones circulares de θ en función de sen θ.

Solución. Evidentemente sen θ = sen θ. De la ec. (6.15)

$$\cos^2\theta \equiv 1 - \operatorname{sen}^2\theta,$$

y, por tanto,

$$\cos\theta \equiv \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta},$$

donde el signo depende del cuadrante en que esté θ. De aquí y de la ec. (6.4),

$$\tan\theta \equiv \pm\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Para expresar las tres funciones restantes utilizamos las relaciones recíprocas, ecs. (6.11) a (6.13), así:

$$\csc\theta \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta \equiv \pm\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

$$\cot\theta \equiv \pm\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}.$$

El ejemplo siguiente ilustra un método para demostrar otra identidad con la ayuda de las identidades fundamentales. Dése en este ejemplo la razón para cada paso.

EJEMPLO 2. Transformando el primer miembro hasta hacerlo idéntico al segundo, demuéstrese que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta \equiv \cot\theta\cos\theta.$$

Solución:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta \equiv \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} \equiv \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} \equiv \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta \equiv \cot\theta\cos\theta.$$

No existe, desgraciadamente, un procdimiento universal para demostrar identidades; sin embargo, en muchos casos es conveniente utilizar la descomposición en factores, la adición de fracciones y otras simplificaciones algebraicas, debiéndose, en general, evitar la introducción de radicales. En algunos casos puede convenir expresar todas las funciones en términos de seno y coseno y en seguida simplificar. Una identidad queda demostrada transformando (1) el primer miembro hasta hacerlo idéntico al segundo, (2) el segundo miembro hasta hacerlo idéntico al primero y (3) ambos miembros por separado hasta darles una forma común. En los ejemplos que siguen, justifíquese cada paso.

EJEMPLO 3 Transformando cada miembro por separado, demuéstrese que $\tan\theta\operatorname{sen}\theta \equiv \sec\theta - \cos\theta$

Solución:

$$\begin{array}{rcl}
\tan\theta \operatorname{sen}\theta & \equiv & \sec\theta - \cos\theta \\[6pt]
\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta & & \dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta \\[10pt]
\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} & & \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \\[10pt]
\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} & \equiv & \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}.
\end{array}$$

EJEMPLO 4. Demuéstrese la identidad:

$$\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \equiv \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}.$$

Solución:

$$\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \equiv \frac{(1-\operatorname{sen}\theta)(1+\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} \equiv \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}$$

$$\equiv \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} \equiv \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}.$$

Hay tres razones diferentes que justifican que el estudiante se ejercite en la demostración de identidades del tipo de las propuestas en el siguiente grupo de problemas. 1. Se familiarizará con las definiciones y fórmulas fundamentales de las funciones circulares y así recordará éstas más fácilmente. 2. Adquirirá mayor madurez matemática mediante el aprendizaje de nuevas técnicas de manipulación algebraica y el repaso de las ya conocidas. 3. Conocerá nuevas identidades que se utilizan frecuentemente en matemáticas más avanzadas y en las aplicaciones prácticas.

PROBLEMAS

Utilizando las identidades fundamentales, exprésese en términos únicamente de $\operatorname{sen}\theta$ cada una de las expresiones siguientes:

1 $\csc\theta$ $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ 2 $\cos^2\theta$ $1-\operatorname{sen}^2\theta$ 3 $\cos\theta$ $\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$
4 $\sec\theta$ 5 $\tan\theta$ 6 $\cot\theta$ $\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$

Exprésense en función únicamente de $\cos\theta$:

7 $\sec\theta$ $\frac{1}{\cos\theta}$ 8 $\operatorname{sen}^2\theta$ $1-\cos^2\theta$ 9 $\operatorname{sen}\theta$
10 $\csc\theta$ $\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}$ 11 $\tan\theta$ 12 $\cot\theta$ $\frac{\cos\theta}{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}$

13 Exprésense las seis funciones circulares en términos de $\tan\theta$.

Indicación: Utilícese la identidad $\sec^2\theta \equiv \tan^2\theta$

14 Exprésese $(\operatorname{sen}\theta + \tan\theta)/(\sec\theta + 1)$ en función únicamente de $\operatorname{sen}\theta$

15 Exprésese $(\tan\theta + \cot\theta)/\sec\theta\operatorname{sen}\theta$ en función únicamente de $\cos\theta$.

Demuéstrense las siguientes identidades:

16 $\tan\theta + \cot\theta \equiv \sec\theta\csc\theta$

17 $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta \equiv 2\cos^2\theta - 1$

18 $\operatorname{sen}\theta\cos\theta\sec\theta\csc\theta \equiv 1$

19 $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\theta} \equiv 2\sec^2\theta$

20 $\cos\theta + \tan\theta\operatorname{sen}\theta \equiv \sec\theta$

21 $\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4 \equiv \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

22 $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} \equiv 2\operatorname{sen}^2\theta - 1$

23 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \equiv 2\csc\theta$

24 $\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \equiv \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$

25 $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \equiv \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

26 $\cot\theta + \tan\theta \equiv \cot\theta\sec^2\theta$

27 $\dfrac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta} \equiv \csc^2\theta$

28 $(\csc\theta - \cot\theta)^2 \equiv \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

29 $(\sec\theta - \tan\theta)^2 \equiv \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

30 $(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \equiv 1$

31 $\dfrac{\cot^2\theta - 1}{1+\cot^2\theta} \equiv 2\cos^2\theta - 1$

32 $\dfrac{1+\csc\theta}{\csc\theta - 1} \equiv \dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$

33 $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} \equiv 1 + \tan\theta + \cot\theta$

34 $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \equiv 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

35 $\dfrac{2\operatorname{sen}^2\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \equiv \tan\theta - \cot\theta$

36 $\sec\theta\csc\theta - 2\cos\theta\csc\theta \equiv \tan\theta - \cot\theta$

37 $\dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} \equiv \dfrac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$

38 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta - \cot\theta} \equiv 1 + \cos\theta$

39 $\dfrac{(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2}{\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta} \equiv 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

40 $\dfrac{\sec^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} \equiv \dfrac{\sec^2\theta - \sec\theta\tan\theta}{\cos^2\theta}$

41 $1 + \cot\theta \equiv \dfrac{(1-\cot^2\theta)\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

42 $\dfrac{\sec\theta + \tan\theta}{\cos\theta - \tan\theta - \sec\theta}$

43 $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cot\theta} \equiv \sec\theta + \csc\theta - \dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$

44 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta} \equiv \dfrac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$

45 $\dfrac{1}{(\cos\theta - \cot\theta)^2} \equiv \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

46 $\dfrac{1}{1-\csc\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\csc\theta} \equiv -2\operatorname{sen}\theta\tan\theta$

47 $\dfrac{(\operatorname{sen}\theta - \tan\theta)^2 + 1}{\sec\theta - \tan\theta} \equiv 2\sec\theta$

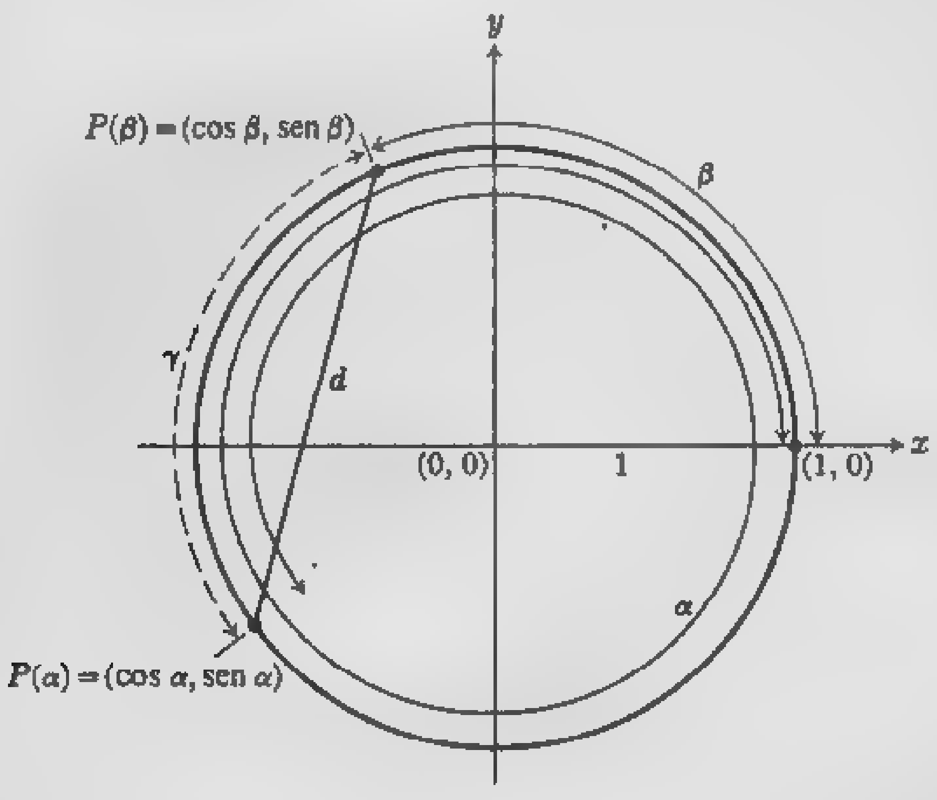
48 $\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} \equiv \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

49 $\operatorname{sen}\theta(1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + \cos\theta(1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta) \equiv \operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta$

50 $\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta \equiv \operatorname{sen}\theta(1 + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) - \cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)$

6.7 Demostración de la fórmula para cos ($\alpha - \beta$)

Veremos a continuación dos nuevos tipos de relaciones entre funciones circulares que difieren de las que hemos estudiado hasta ahora en que contienen funciones de más de un número. Además del problema de expresar una función circular de θ más un múltiplo de $\pi/2$ como una función de θ solamente (ejemplo 3, sección 6.2), se presenta a menudo la necesidad de considerar funciones circulares de dos números cualesquiera. Tal como veremos, estas funciones pueden expresarse en términos de funciones de cada uno de los números separadamente. Por ejemplo, sabemos que $\operatorname{sen}(\pi/4 + \pi/3)$ no puede ser igual a $\operatorname{sen}\pi/4 + \operatorname{sen}\pi/3$, puesto que esta última expresión es igual a $1/\sqrt{2} + \sqrt{3}/2$, valor que no puede ser tomado por una función seno por ser mayor que uno Sin embargo, $\operatorname{sen}(\pi/4 + \pi/3)$ puede expresarse en términos de funciones de $\pi/4$ y $\pi/3$, pudiéndose de esta forma calcular fácilmente su valor. Una de las fórmulas básicas en problemas de este tipo es la que corresponde a $\cos(\alpha - \beta)$, dada en el siguiente teorema.



6-15

TEOREMA 6.3. *Para todo* $\alpha, \beta \in R$,

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \qquad (6.21)$$

Demostración. Sean α y β dos numeros reales cualesquiera, y $P(\alpha)$ y $P(\beta)$ sus puntos terminales respectivos en la circunferencia unitaria (fig. 6-15). Puesto que las coordenadas de $P(\alpha)$ son $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y las de $P(\beta)$, $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, la distancia d entre estos dos puntos, ec. (4.9), queda dada por:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta} \\ &= \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)}. \end{aligned}$$

Utilizando la expresión que da la longitud de la cuerda de la circunferencia unitaria cuyo arco tiene longitud $|\theta|$, ec. (6.18), obtenemos otra expresión para d. Puesto que d representa la longitud de la cuerda cuyo número asociado es $\gamma = \alpha - \beta \pm$(múltiplo entero de 2π), tenemos

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{2 - 2\cos\gamma} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Igualando estas dos expresiones y simplificando, obtenemos

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

lo cual demuestra el teorema. Es conveniente destacar que esta fórmula expresa $\cos(\alpha - \beta)$ en términos de valores funcionales de α y β y *es válida para valores cualesquiera de α y de β*. Es en este respecto que reside la importancia de la fórmula, como se verá en las secciones siguientes de este capítulo.

6.8 Fórmulas especiales de reducción

A esta altura de la explicación, el lector habrá observado posiblemente que una función circular de un número real cualquiera puede expresarse como función de un número real comprendido entre 0 y $\pi/4$. Esto puede demostrarse a partir de ciertas fórmulas de reducción que se deducen de la ec. (6.21) dando valores particulares a α o β

Si substituimos α por $\pi/2$ en la ec. (6.21) obtenemos

$$\cos(\pi/2 - \beta) \equiv \cos\pi/2\cos\beta + \operatorname{sen}\pi/2\operatorname{sen}\beta.$$

y como $\cos \pi/2 = 0$ y $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$,

$$\cos(\pi/2 - \beta) \equiv \operatorname{sen} \beta. \tag{6.22}$$

Es conveniente recalcar nuevamente que las relaciones del tipo de la ec. (6.22) son válidas para todo número real α o β; el lector deberá observar esto a medida que se efectúe la deducción de las fórmulas. Si reemplazamos β por $\pi/2 - \beta$ en la ec. (6.22), la relación

$$\cos[\pi/2 - (\pi/2 - \beta)] \equiv \operatorname{sen}(\pi/2 - \beta)$$

es válida para todo β. Simplificando, tenemos

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \beta) \equiv \cos \beta. \tag{6.23}$$

De las ecs. (6.22) y (6.23) se deduce inmediatamente que

$$\tan(\pi/2 - \beta) \equiv \cot \beta, \tag{6.24}$$

y

$$\cot(\pi/2 - \beta) \equiv \tan \beta. \tag{6.25}$$

Aun cuando estos resultados son válidos para todos los valores son especialmente útiles en el cálculo de valores para números menores que $\pi/2$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1.

(a) $\operatorname{sen} 1 = \cos(\pi/2 - 1) =$ aproximadamente $\cos(1{,}5708 - 1) = \cos 0{,}5708$.

(b) $\tan \pi/3 = \cot \pi/6$

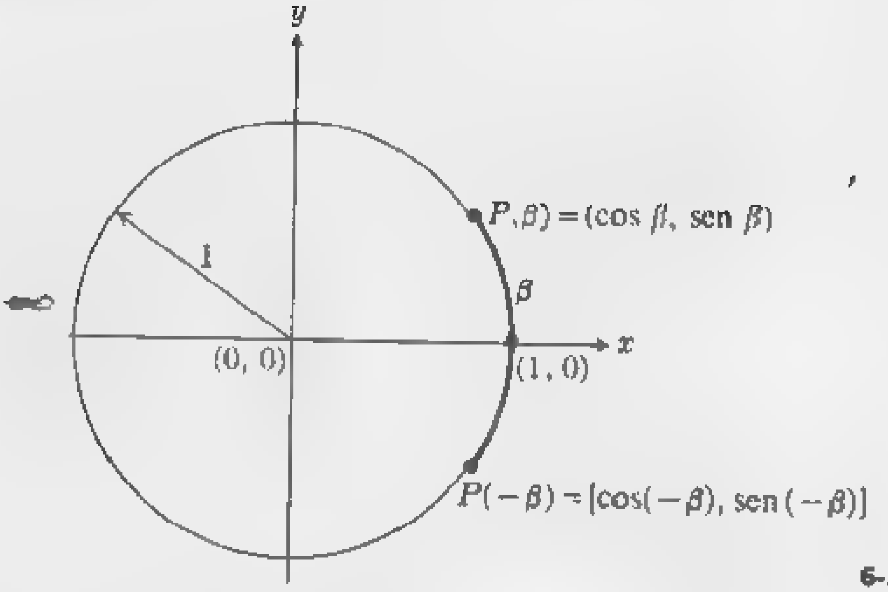
Hemos observado que las funciones circulares tienen nombres que pueden agruparse en pares, siendo, en cada par, una función la cofunción de la otra. Así, el seno es la cofunción del coseno y el coseno la cofunción del seno, etc. Con esta observación, las cuatro fórmulas anteriores pueden enunciarse: *La cofunción de un número cualquiera es igual a la cofunción de $\pi/2$ menos el número.*

La relación entre la función de un número y la de su negativo es muy útil y puede también deducirse de la ec. (6.21). Haciendo $\alpha = 0$,

$$\cos(0 - \beta) \equiv \cos 0 \cos \beta + \operatorname{sen} 0 \operatorname{sen} \beta.$$

y como $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$,

$$\cos(-\beta) \equiv \cos \beta. \tag{6.26}$$



6-16

Además, si reemplazamos β por β en la ec. (6.22),

$$\cos(\pi/2 + \beta) \equiv \operatorname{sen}(-\beta).$$

Puesto que $\pi/2 + \beta = \beta - (-\pi/2)$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(-\beta) &\equiv \cos[\beta - (-\pi/2)] \equiv \cos\beta\cos(-\pi/2) + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(-\pi/2)\\ &\equiv (\cos\beta)(0) + (\operatorname{sen}\beta)(-1),\end{aligned}$$

o

$$\operatorname{sen}(-\beta) \equiv -\operatorname{sen}\beta. \tag{6.27}$$

De las ecs. (6 26) y (6.27) se deduce directamente que

$$\tan(-\beta) \equiv -\tan\beta. \tag{6.28}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2.

(a) $\operatorname{sen}(-\pi/4) = -\operatorname{sen}\pi/4$.
(b) $\tan(-\pi/3) = -\tan\pi/3$.
(c) $\cos(-\pi/6) = \cos\pi/6$.

Obsérvese el significado de las ecs. (6 26) y (6 27) en la figura 6.16.

6.9 Fórmulas generales de adición

A continuación, deduciremos las fórmulas generales para el seno, coseno y tangente de la suma o diferencia de dos números. Puesto que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &\equiv \cos[\alpha - (-\beta)]\\ &\equiv \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta),\end{aligned}$$

tenemos

$$\cos(\alpha + \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{6.29}$$

Además.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &\equiv \cos[\pi/2 - (\alpha + \beta)]\\ &\equiv \cos[(\pi/2 - \alpha) - \beta]\\ &\equiv \cos(\pi/2 - \alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha)\operatorname{sen}\beta,\end{aligned}$$

y tenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \equiv \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{6.30}$$

Reemplazando β por $-\beta$ en la ec. (6.30), obtenemos de inmediato

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \equiv \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{6.31}$$

Las fórmulas para la tangente,

$$\tan(\alpha + \beta) \equiv \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \tag{6.32}$$

y

$$\tan(\alpha - \beta) \equiv \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}, \tag{6.33}$$

resultan del hecho de que $\tan\theta \equiv \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$.

Utilizando las ecs. (6.29) y (6.30), tenemos

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &\equiv \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}\\ &\equiv \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\\ &\equiv \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\ &\equiv \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

La ec. (6.33) puede obtenerse en forma análoga, o bien, utilizando la ec. (6.28).

EJEMPLO 1. Calcúlese sen $7\pi/12$ a partir de las funciones de $\pi/3$ y $\pi/4$.

Solución:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 7\pi/12 &= \operatorname{sen}(\pi/3 + \pi/4)\\ &= \operatorname{sen}\pi/3\cos\pi/4 + \cos\pi/3\operatorname{sen}\pi/4\\ &= \sqrt{3}/2\cdot\sqrt{2}/2 + \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}/2\\ &= \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Calcúlese $\cos\pi/12$.

Solución:

$$\begin{aligned}\cos\pi/12 &= \cos(\pi/3 - \pi/4)\\ &= \cos\pi/3\cos\pi/4 + \operatorname{sen}\pi/3\operatorname{sen}\pi/4\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}/2 + \sqrt{3}/2\cdot\sqrt{2}/2\\ &= \sqrt{2}/4 + \sqrt{6}/4 = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/4.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Considérese $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$ con $P(\alpha)$ en el primer cuadrante y $\cos\beta = \frac{3}{5}$ con $P(\beta)$ en el primer cuadrante. ¿En qué cuadrante se encuentra $P(\alpha + \beta)$?

Solución. Puesto que $P(\alpha)$ y $P(\beta)$ están ambos en el primer cuadrante, $P(\alpha + \beta)$ estará en el primero o segundo cuadrante; y como el coseno es positivo en el primer cuadrante y negativo en el segundo, bastará determinar $\cos(\alpha + \beta)$. Procediendo como en la sección 6.2. obtenemos $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ y $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}$; luego,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \tfrac{5}{13}\cdot\tfrac{3}{5} - \tfrac{12}{13}\cdot\tfrac{4}{5}\\ &= \tfrac{15}{65} - \tfrac{48}{65} = \tfrac{33}{65}.\end{aligned}$$

Como $\cos(\alpha + \beta)$ es negativo, $P(\alpha + \beta)$ está en el segundo cuadrante.

EJEMPLO 4. Demuéstrese que $\operatorname{sen}(3\pi/2 - \theta) \equiv -\cos\theta$.

Solución. Haciendo $\alpha = 3\pi/2$ y $\beta = \theta$ en la ec. (6.31), obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3\pi/2 - \theta) &\equiv \operatorname{sen}3\pi/2\cos\theta - \cos 3\pi/2\operatorname{sen}\theta \equiv (-1)\cos\theta - (0)\operatorname{sen}\theta\\ &\equiv -\cos\theta.\end{aligned}$$

EJEMPLO 5. Exprésese $3\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta$ en la forma $k\operatorname{sen}(\theta + \theta_1)$ donde $P(\theta_1)$ está en el primer cuadrante.

Solución. Multiplicando y dividiendo la expresión por $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, tenemos

$$5(\tfrac{3}{5}\operatorname{sen}\theta + \tfrac{4}{5}\cos\theta) \equiv 5(\operatorname{sen}\theta\cdot\tfrac{3}{5} + \cos\theta\cdot\tfrac{4}{5}).$$

Haciendo $\cos\theta_1 = \frac{3}{5}$, obtenemos $\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{4}{5}$, con lo que la expresión dada se reduce a

$$5(\tfrac{3}{5}\operatorname{sen}\theta + \tfrac{4}{5}\cos\theta) \equiv 5\operatorname{sen}(\theta + \theta_1),$$

donde $\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{4}{5}$ y $\cos\theta_1 = \frac{3}{5}$.

Problemas

1 Determínense los valores exactos del seno, coseno y tangente de $5\pi/12$ haciendo $\alpha = \pi/4$ y $\beta = \pi/6$ en una de las fórmulas deducidas anteriormente.

2 Determínense los valores exactos de $\operatorname{sen}\pi/12$ y $\tan\pi/12$, tomando $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$.

3 Determínense los valores exactos de $\cos 7\pi/12$ y $\tan 7\pi/12$ en la forma indicada en el ejemplo 1.

4 Determínense los valores exactos del seno, coseno y tangente de $11\pi/12$ haciendo $\alpha = 3\pi/4$ y $\beta = \pi/6$.

Es de interés hacer notar que, con los resultados de los problemas 1 a 4 y otros anteriores, conocemos ya en forma exacta los valores de las funciones de cualquier múltiplo entero de $\pi/12$.

5 Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ y $0 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$, determínese:

(a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ (b) $\cos(\alpha + \beta)$ (c) $\tan(\alpha + \beta)$
(d) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ (e) $\cos(\alpha - \beta)$ (f) $\tan(\alpha - \beta)$

6 Si $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$, $\tan\beta = \frac{9}{40}$, $\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ y $\pi \leqslant \beta \leqslant 3\pi/2$, determínese:

(a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ (b) $\cos(\alpha + \beta)$ (c) $\tan(\alpha + \beta)$
(d) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ (e) $\cos(\alpha - \beta)$ (f) $\tan(\alpha - \beta)$

7 (a) ¿En qué cuadrante está $P(\alpha + \beta)$ en el problema 5? (b) ¿En qué cuadrante está $P(\alpha - \beta)$ en el problema 6?

Determínense $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ dado:

8 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\sec\beta = \frac{13}{5}$ y ni $P(\alpha)$ ni $P(\beta)$ están en el primer cuadrante.

9 $\tan\alpha = -\frac{15}{8}$, $\operatorname{sen}\beta = -\frac{7}{25}$ y ni $P(\alpha)$ ni $P(\beta)$ están en el cuarto cuadrante.

Exprésese cada una de las siguientes expresiones como función de θ solamente.

10 $\cos(\pi/4 + \theta)$
11 $\tan(\theta + \pi/6)$
12 $\sec(\theta - \pi/4)$
13 $\cot(\pi/4 + \theta)$
14 $\operatorname{sen}(\theta + \pi/3)$
15 $\csc(\theta - \pi/6)$
16 $\cos(\pi/6 - \theta)$
17 $\operatorname{sen}(\theta - \pi/4)$

Demuéstrese que las proposiciones siguientes son verdaderas.

18 $\tan(\theta + \pi/4) - \tan(\theta - 3\pi/4) \equiv 0$

19 $\operatorname{sen}(\theta - \pi/6) + \cos(\theta - \pi/3) \equiv \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$

20 $\cot(\alpha + \beta) \equiv \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

21 $\tan(\theta + \pi/4) \equiv (1 + \tan\theta)/(1 - \tan\theta)$

22 $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)/\cos\alpha\cos\beta \equiv \tan\alpha + \tan\beta$

▶ 23 $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \equiv 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

24 $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \equiv 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

25 $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \equiv 2\cos\alpha\cos\beta$

26 $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \equiv -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

▶ 27 Haciendo $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$ y dividiendo miembro a miembro las expresiones de los problemas 23 y 24, demuéstrese que

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} \equiv \frac{\tan\frac{1}{2}(x - y)}{\tan(\frac{1}{2}x + y)}$$

Demuéstrese que las relaciones siguientes son verdaderas:

28 $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \equiv \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

29 $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

30 $\cos(\alpha + \beta)\cos\beta + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\beta \equiv \cos\alpha$

31 $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)\cos\beta + \cos(\alpha - \beta)\operatorname{sen}\beta \equiv \operatorname{sen}\alpha$

32 $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \equiv (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)(\operatorname{sen}\beta + \cos\beta)$

33 $2[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + 2) \equiv (\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)^2 + (\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta)^2$

34 $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\beta + \cos\beta)^2 \equiv 2(1 + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\cos\beta)$

Exprésese en la forma $k\operatorname{sen}(\theta + \theta_1)$ donde θ_1 está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, cada una de las siguientes expresiones:

35 $5\operatorname{sen}\theta + 12\cos\theta$

36 $15\operatorname{sen}\theta + 8\cos\theta$

37 $4\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta$

38 $24\operatorname{sen}\theta + 7\cos\theta$

39 $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

40 $2\operatorname{sen}\theta - 5\cos\theta$

6.10 Fórmulas generales de reducción

A menudo es necesario expresar las funciones circulares de un número determinado como funciones de un número entre 0 y $\pi/2$. Esto es posible utilizando las fórmulas de reducción deducidas a partir de la ec. (6.21). Si queremos reducir

un número en múltiplos de $\pi/2$ podemos hacer uso del hecho de que (Problema 9, sección 6.3)

$$\operatorname{sen}(2k \cdot \pi/2) = 0$$

$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

y

$$\cos(2k \cdot \pi/2) = (-1)^k$$

$2 \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$

para todo entero $k \in I$. Puesto que

$$\operatorname{sen}(2k \cdot \pi/2 + \beta) \equiv \operatorname{sen}(2k \cdot \pi/2)\cos\beta + \cos(2k \cdot \pi/2)\operatorname{sen}\beta,$$

tenemos

$$\operatorname{sen}(2k \cdot \pi/2 + \beta) \equiv (-1)^k \operatorname{sen}\beta, \tag{6.34}$$

y, análogamente,

$$\cos(2k \cdot \pi/2 + \beta) \equiv (-1)^k \cos\beta. \tag{6.35}$$

Estas dos relaciones rigen para β aumentado o disminuido en múltiplos pares de $\pi/2$. La función no cambia si bien el signo puede cambiar. En el caso de múltiplos impares de $\pi/2$, la función cambia a la cofunción y nuevamente puede haber cambio de signo, puesto que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}&[(2k+1)\pi/2 + \beta] \\
&\equiv \operatorname{sen}[\pi/2 + (2k \cdot \pi/2 + \beta)] \\
&\equiv \operatorname{sen}\pi/2 \cos(2k \cdot \pi/2 + \beta) + \cos\pi/2 \operatorname{sen}(2k \cdot \pi/2 + \beta) \\
&\equiv \cos(2k \cdot \pi/2 + \beta).
\end{aligned}$$

y, por tanto, por la ec. (6.35),

$$\operatorname{sen}[(2k+1)\pi/2 + \beta] \equiv (-1)^k \cos\beta. \tag{6.36}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\cos&[(2k+1)\pi/2 + \beta] \\
&\equiv \cos[\pi/2 + (2k \cdot \pi/2 + \beta)] \\
&\equiv \cos\pi/2 \cos(2k \cdot \pi/2 + \beta) - \operatorname{sen}\pi/2 \operatorname{sen}(2k \cdot \pi/2 + \beta) \\
&\equiv -(-1)^k \operatorname{sen}\beta,
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\cos[(2k+1)\pi/2 + \beta] \equiv (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\beta. \tag{6.37}$$

El caso especial de las ecs. (6.34) y (6.35) cuando $k = 2$ es muy importante, puesto que

$$\operatorname{sen}(\beta + 2\pi) \equiv \operatorname{sen}\beta \tag{6.38}$$

y

$$\cos(\beta + 2\pi) \equiv \cos\beta. \tag{6.39}$$

Fue esta la razón por la cual a estas funciones se les llamó *funciones periódicas* de período 2π. [Recuérdense las ecs. (6.5) y (6.6).]

Como se verá en el capítulo 15, estas fórmulas son de especial importancia y máxima utilidad en la medición de ángulos.

Ejemplo 1. Exprésese sen 10,8909 como función de un número comprendido entre 0 y $\pi/4 = 0{,}7854$.

Solución. Puesto que

$$10{,}8909 = 6(1{,}5708) + 1{,}4661,$$

utilizando la ec. (6.34), tenemos $\operatorname{sen} 10{,}8909 = -\operatorname{sen} 1{,}4661$; de la ec. (6.22),

$$-\operatorname{sen} 1{,}4661 = -\cos(1{,}5708 - 1{,}4661) = -\cos 0{,}1047,$$

y tenemos $\operatorname{sen} 10{,}8909 = -\cos 0{,}1047$.

Ejemplo 2. Exprésese cos 21,6945 como función de un número comprendido entre 0 y $\pi/4$.

Solución Nuevamente, $21{,}6945 = 13(1{,}5708) + 1{,}2741$; por tanto, aplicando la ec. (6.37), $\cos 21{,}6945 = -\operatorname{sen} 1{,}2741$ y, por la ec. (6.22), tenemos

$$\cos 21{,}6945 = -\cos 0{,}2967.$$

Ejemplo 3. Repítase lo anterior para $\cos(-8{,}6743)$.

Solución. Puesto que

$$-8{,}6743 = -5(1{,}5708) - 0{,}8203,$$

tenemos

$$\cos(-8{,}6743) = -\operatorname{sen} 0{,}8203 = -\cos 0{,}7505.$$

Una vez familiarizado con el procedimiento, el lector estará capacitado para escribir la respuesta directamente sin utilizar las ecs. (6.24) a (6.37). Trácese una figura, determínese el signo del valor funcional a simplificarse según el cuadrante en que éste se encuentre y, teniendo presente este signo, escríbase el número correspondiente entre 0 y $\pi/2$. En el caso del ejemplo 1, puesto que $P(10{,}8909)$ está en el tercer cuadrante, sen 10,8909 es negativo y, como el θ correspondiente es 1,4661, se tiene $\operatorname{sen} 10{,}8909 = -\operatorname{sen} 1{,}4661$.

PROBLEMAS

Exprésese como función de un número real θ, $0 < \theta < \pi/4 = 0{,}7854$, cada una de las expresiones:

1 sen 2,4209

2 cos 2,5656

3 sen 5,5676

4 cos 4,4331

5 tan 5,1313

6 cos 12,7060

7 sen (−10,9083)

8 cos (−7,5922)

9 tan 17,5231

10 sen 8

11 cos 2

12 tan 3

13 cos 4

14 tan 5

15 sen 6

Utilizando la ec. (6.21) o ecs (6.29) a (6.33) demuéstrese que cada una de las proposiciones siguientes es verdadera. Verifíquense las que contienen senos o cosenos mediante las ecuaciones (6.34) a (6.37).

16 $\operatorname{sen}(\pi + \theta) \equiv -\operatorname{sen}\theta$

17 $\cos(\pi + \theta) \equiv -\cos\theta$

18 $\operatorname{sen}(\pi - \theta) \equiv \operatorname{sen}\theta$

19 $\cos(\pi - \theta) \equiv -\cos\theta$

20 $\tan(3\pi/2 - \theta) \equiv \cot\theta$

21 $\cos(\theta - \pi) \equiv -\cos\theta$

22 $\cos(3\pi/2 + \theta) \equiv \operatorname{sen}\theta$

23 $\operatorname{sen}(\theta + 3\pi/2) \equiv -\cos\theta$

24 $\tan(\pi + \theta) \equiv \tan\theta$

25 $\cos(2\pi - \theta) \equiv \cos\theta$

26 $\operatorname{sen}(2\pi - \theta) \equiv -\operatorname{sen}\theta$

27 En el problema 24 demostramos que $\tan(\theta + \pi) \equiv \tan\theta$. Esto también fue demostrado como caso especial de la ec. (6.7) con $k = 1$. ¿Cuál es el período de $\tan\theta$?

28 ¿Cuáles son los períodos de las funciones cotangente, secante y cosecante?

6.11 Identidades generales

A lo largo de toda la explicación hemos recalcado el hecho de que las identidades generales

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) \equiv \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta, \tag{6.40}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, \tag{6.41}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) \equiv \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha\tan\beta} \tag{6.42}$$

han sido demostradas para todo número real. Además, a partir de identidades que han sido ya demostradas (sección 6.6) podemos demostrar otras, varias de

las cuales aparecen propuestas como problemas al final de la presente sección. En especial, podemos obtener las importantes identidades que se refieren a valores múltiplos a partir de las ecs. (6.40) a (6.42). Puesto que éstas son válidas para todo α y β, haciendo $\alpha = \beta$ obtenemos de inmediato

$$\operatorname{sen} 2\alpha \equiv \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) \equiv \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha,$$

o

$$\operatorname{sen} 2\alpha \equiv 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha. \tag{6.43}$$

También,

$$\cos(\alpha + \alpha) \equiv \cos\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha,$$

o

$$\cos 2\alpha \equiv \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \tag{6.44}$$

$$\equiv 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \quad \text{(¿Por qué?)} \tag{6.45}$$

$$\equiv 2\cos^2\alpha - 1. \quad \text{(¿Por qué?)} \tag{6.46}$$

Por otra parte,

$$\tan(\alpha + \alpha) \equiv \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \tan\alpha},$$

o

$$\tan 2\alpha \equiv \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \tag{6.47}$$

También podemos establecer identidades en función de $\theta/2$, así, haciendo $2\alpha = \theta$ ó $\alpha = \theta/2$ en la ec. (6.45), obtenemos

$$\cos\theta \equiv 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Despejando sen $\theta/2$, tenemos

$$2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \equiv 1 - \cos\theta, \tag{6.48}$$

de modo que

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \equiv \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}. \tag{6.49}$$

donde la elección del signo que precede al radical depende del cuadrante en que esté $\theta/2$. Análogamente, de la ec. (6.46) con $\alpha = \theta/2$,

$$\cos\theta \equiv 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

y despejando $\cos\theta/2$, obtenemos

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} \equiv 1 + \cos\theta, \tag{6.50}$$

o

$$\cos\frac{\theta}{2} \equiv \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}. \tag{6.51}$$

con una consideración análoga para la elección del signo.

Hay dos identidades para $\tan\theta/2$ que pueden obtenerse utilizando las ecs. (6.48) y (6.50). Si en la identidad

$$\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta/2}{\cos\theta/2},$$

amplificamos el segundo miembro por $2\operatorname{sen}\theta/2$, obtenemos

$$\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{2\operatorname{sen}^2\theta/2}{2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2}.$$

o

$$\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}. \tag{6.52}$$

En la misma expresión, amplificando por $2\cos\theta/2$, tenemos

$$\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2}.$$

o

$$\tan\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}. \tag{6.53}$$

Algunos de los usos de las identidades de la presente sección se verán más claramente al considerar los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\operatorname{sen}\pi/12$ y $\cos\pi/12$ a partir de las funciones de $\pi/6$.

Solución. Aplicando ec. (6.49) obtenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1-\cos\pi/6}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Además, de la ec. (6.51),

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1+\cos\pi/6}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Explíquese la diferencia entre este resultado y el del ejemplo 2, sección 6.9

Ejemplo 2. Exprésense sen 2θ, cos 2θ y tan 2θ en función de x si $x = \tan\theta$.

Solución. Determinaremos primeramente sen θ y cos θ en función de x. Puesto que

$$\sec\theta \equiv \pm\sqrt{1+\tan^2\theta} \equiv \pm\sqrt{1+x^2},$$

$$\cos\theta \equiv \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

También,

$$\operatorname{sen}\theta \equiv \tan\theta\cos\theta \equiv \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}2\theta \equiv 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \equiv \frac{2x}{1+x^2}.$$

Para demostrar que el signo se ha elegido correctamente en la expresión precedente es necesario analizar todos los casos posibles, según el cuadrante en que esté $P(\theta)$. Además, tenemos

$$\cos 2\theta \equiv \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \equiv \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

y

$$\tan 2\theta \equiv \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \equiv \frac{2x}{1-x^2}.$$

Ejemplo 3. Redúzcase $\operatorname{sen}^4\theta$ a una expresión que contenga sólo funciones de θ elevadas a la primera potencia.

Solución. De la ec. (6.48), tenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta \equiv \frac{1-\cos 2\theta}{2}.$$

Obsérvese que en esta expresión, al duplicarse θ, el exponente de la función circular se ha reducido de 2 a 1; por tanto,

$$\operatorname{sen}^4 \theta = (\operatorname{sen}^2 \theta)^2 \equiv \frac{(1 - \cos 2\theta)^2}{4} \equiv \frac{1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta}{4},$$

y substituyendo

$$\cos^2 2\theta \qquad \text{por} \qquad \frac{1 + \cos 4\theta}{2}$$

(¿por qué puede hacerse esto?), obtenemos

$$\operatorname{sen}^4 \theta \equiv \frac{3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}.$$

Las transformaciones de este tipo son muy útiles en cálculo.

PROBLEMAS

1 Verifíquense las identidades para sen 2θ y tan 2θ en el caso $\theta = \pi/3$.

2 Utilícense las identidades del valor doble para calcular sen $4\pi/3$, cos $4\pi/3$ y tan $4\pi/3$ a partir de las funciones de $2\pi/3$.

3 Calcúlese sen $7\pi/12$, cos $7\pi/12$ y tan $7\pi/12$ a partir de los valores de las funciones de $7\pi/6$.

4 Si sen $\theta = \frac{3}{5}$ y $P(\theta)$ está en el primer cuadrante, determínese el valor exacto de:

(a) sen 2θ	(b) cos 2θ	(c) tan 2θ
(d) sen $\theta/2$	(e) cos $\theta/2$	(f) tan $\theta/2$

5 Si cos $\theta = -\frac{5}{13}$ y $P(\theta)$ está en el segundo cuadrante, determínese el valor exacto de:

(a) sen 2θ	(b) cos 2θ	(c) tan 2θ
(d) sen $\theta/2$	(e) cos $\theta/2$	(f) tan $\theta/2$

6 Redúzcase sen$^2 \theta$ a una expresión que contenga sólo funciones circulares de θ elevadas a primera potencia.

7 Redúzcase cos$^4 \theta$ a una expresión que contenga sólo funciones circulares de θ elevadas a primera potencia.

8 Dedúzcase la identidad (6.53) utilizando la identidad sen $\omega/2 \equiv$ sen $(\omega - \omega/2)$.

Indicación: sen $\omega/2 \equiv$ sen $\omega \cos \omega/2$ ó $(1 + \cos \omega)$ sen $\omega/2$.

9 Dedúzcase la identidad (6.52) utilizando

$$\cos \frac{\omega}{2} \equiv \cos\left(\omega - \frac{\omega}{2}\right)$$

10 Dedúzcase la identidad

$$\tan\frac{\omega}{2} \equiv \pm\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}}.$$

11 Dedúzcase la identidad $\tan\omega/2 \equiv \csc\omega - \cot\omega$.

Demuéstrense las siguientes identidades:

12 $\operatorname{sen} 3\theta \equiv 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$

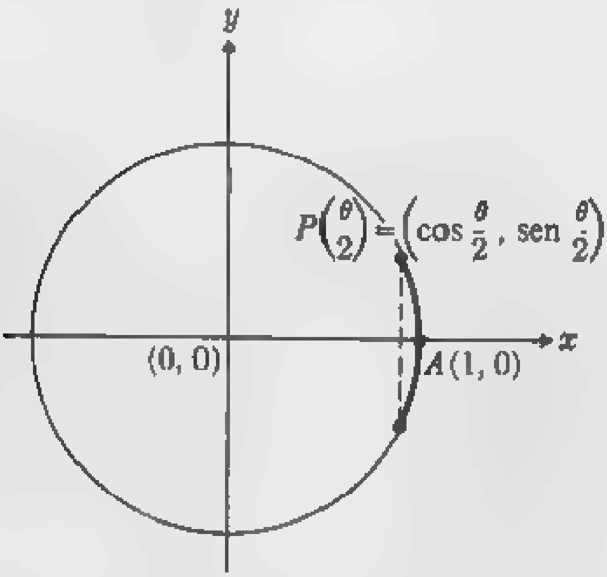
13 $\cos 3\theta \equiv 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

14 $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$

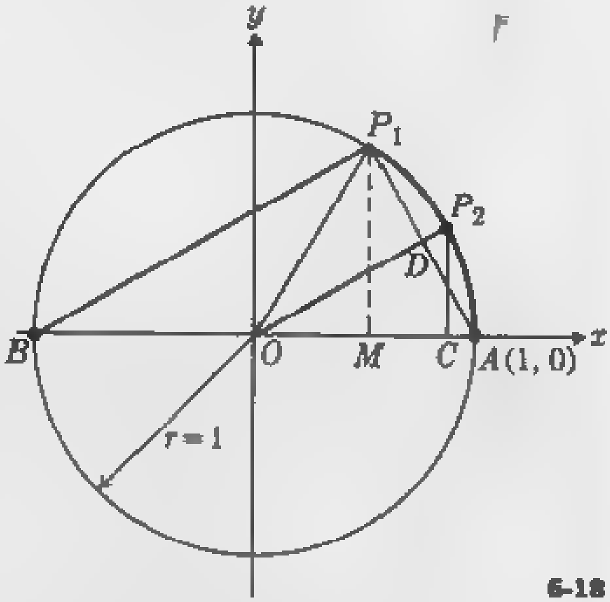
15 $\frac{1-\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} \equiv \tan\theta$

16 $\left(\cos\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^2 \equiv 1 - \operatorname{sen}\theta$

17 $\csc 2\theta - \cot 2\theta \equiv \tan\theta$



6-17



6-18

18 $\csc 2\theta + \cot 2\theta \equiv \cot\theta$

19 $\tan 3\theta \equiv \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

20 $\frac{\tan\theta/2 + \cot\theta/2}{\cot\theta/2 - \tan\theta/2} \equiv \sec\theta$

21 $\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \equiv \sec\theta$

22 $\frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} \equiv 2$

23 $\frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos 3\theta}{\operatorname{sen}\theta} \equiv 2\cot 2\theta$

24 $\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \equiv \operatorname{sen} 2\theta$

25 $\frac{\cot^2\theta - 1}{\csc^2\theta} \equiv \cos 2\theta$

26 $\sec\theta - \tan\theta \equiv \frac{1-\tan\theta/2}{1+\tan\theta/2}$

27 $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{4} + \cos\frac{\theta}{2} \equiv \cos^2\frac{\theta}{4}$

28 $2\operatorname{sen}^2\theta + \cos 2\theta \equiv 1$

29 $2\cot 2\theta \equiv \cot\theta - \tan\theta$

30 $\operatorname{sen} 4\theta \equiv 2\cos\theta(\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}^3\theta)$

31 En la fig. 6-17, A es el punto medio de un arco de longitud θ de la circunferencia unitaria, con $0 < \theta < \pi$. Utilizando esta figura y ec. (6.18), demuéstrese que:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \equiv \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}.$$

En la circunferencia unitaria de la fig. 6-18, P_2 es el punto medio del arco AP_1 cuya longitud es θ, con $0 < \theta < \pi/2$. Se traza BP_1 paralela a OP_2, resultando $\sphericalangle P_1BA = \sphericalangle P_2PA$. (¿Por qué?)

32 Verifíquese que $BP_1 = 2\cos\theta/2$ y $P_1A = 2\operatorname{sen}\theta/2$.

Indicación: $CP_2 = AD = P_1A/2$ y $OC = OD = BP_1/3$

33 Verifíquese de la figura que $\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\theta/2\cos\theta/2$.

34 Verifíquese de la figura que

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

35 Verifíquese por la figura que

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

6.12 Transformaciones de sumas y productos

A menudo se presenta el problema de transformar el producto de dos funciones circulares en una suma de dos funciones, y viceversa, esto puede lograrse utilizando las identidades (6.40) y (6.41). (Las identidades que siguen no son tan importantes como las anteriores del presente capítulo.) Sumando miembro a miembro las dos identidades de ec. (6.40), obtenemos

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \equiv \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]. \tag{6.54}$$

Restando miembro a miembro las mismas facilidades, obtenemos

$$\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \equiv \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]. \tag{6.55}$$

Análogamente, de la ec. (6.41) obtenemos, primero sumando y luego restando,

$$\cos\alpha\cos\beta \equiv \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)], \tag{6.56}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \equiv \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]. \tag{6.57}$$

Como ejemplo podemos transformar en suma $\cos 6\theta\cos 3\theta$. Utilizando ec. (6.56) con $\alpha = 6\theta$ y $\beta = 3\theta$, tenemos

$$\cos 6\theta\cos 3\theta \equiv \tfrac{1}{2}(\cos 9\theta + \cos 3\theta).$$

Las mismas cuatro identidades pueden también utilizarse para transformar una suma en producto, siendo estas últimas transformaciones de gran utilidad cuando deben emplearse logaritmos, ya que los productos pueden calcularse por logaritmos más fácilmente que las sumas. Por conveniencia, cambiaremos la notación y haremos $\alpha + \beta = \theta$ y $\alpha - \beta = \omega$. Despejando α y β, obtenemos $\alpha = (\theta + \omega)/2$ y $\beta = (\theta - \omega)/2$ y, substituyendo estos valores en las identidades precedentes y simplificando, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\omega \equiv 2\operatorname{sen}\frac{\theta+\omega}{2}\cos\frac{\theta-\omega}{2}, \tag{6.58}$$

$$\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\omega \equiv 2\cos\frac{\theta+\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}, \tag{6.59}$$

$$\cos\theta + \cos\omega \equiv 2\cos\frac{\theta+\omega}{2}\cos\frac{\theta-\omega}{2}, \tag{6.60}$$

$$\cos\theta - \cos\omega \equiv -2\operatorname{sen}\frac{\theta+\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}. \tag{6.61}$$

EJEMPLO Exprésese $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}3\theta + \operatorname{sen}5\theta + \operatorname{sen}7\theta$ como producto.

Solución. Agrupando los dos primeros y los dos últimos términos y utilizando ec. (6.58), obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}3\theta + \operatorname{sen}5\theta + \operatorname{sen}7\theta \\
&\qquad \equiv 2\operatorname{sen}\frac{\theta+3\theta}{2}\cos\frac{\theta-3\theta}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{5\theta+7\theta}{2}\cos\frac{5\theta-7\theta}{2} \\
&\qquad \equiv 2\operatorname{sen}2\theta\cos(-\theta) + 2\operatorname{sen}6\theta\cos(-\theta) \\
&\qquad \equiv 2\cos\theta(\operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}6\theta) \qquad \text{(¿Por qué?)} \\
&\qquad \equiv 2\cos\theta(2\operatorname{sen}4\theta\cos2\theta) \qquad \text{(¿Por qué?)} \\
&\qquad \equiv 4\cos\theta\cos2\theta\operatorname{sen}4\theta.
\end{aligned}$$

PROBLEMAS

Exprésese cada uno de los siguientes productos como suma.

1 $\operatorname{sen}3\theta\cos5\theta$

2 $4\cos\pi/3\cos\pi/6$

3 $\cos7\theta\operatorname{sen}5\theta$

4 $6\operatorname{sen}2\pi/3\operatorname{sen}\pi/3$

5 $\operatorname{sen}5\theta\cos2\theta$

6 $\cos2\theta\cos6\theta$

7 $\cos\theta\operatorname{sen}\theta/2$

8 $2\operatorname{sen}7\theta\operatorname{sen}2\theta$

Exprésese cada una de las siguientes sumas como producto.

9 $\operatorname{sen}\pi/9 + \operatorname{sen}2\pi/9$

10 $\cos2\theta - \cos\theta$

11 $\cos 7\pi/9 + \cos 2\pi/9$

12 $\operatorname{sen} \pi/4 - \operatorname{sen} \pi/5$

13 $\operatorname{sen} 8\theta + \operatorname{sen} 4\theta$

14 $\cos 4\theta - \cos 8\theta$

15 $\operatorname{sen} 5\theta/3 - \operatorname{sen} 5\theta/6$

16 $\cos 6\theta + \cos 7\theta$

Demuestrense las identidades siguientes.

17 $\dfrac{\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta}{\cos 5\theta + \cos 3\theta} = \tan \theta$

18 $\dfrac{\cos 6\theta + \cos 4\theta}{\operatorname{sen} 6\theta - \operatorname{sen} 4\theta} \equiv \cot \theta$

19 $\dfrac{\operatorname{sen} 8\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{\cos 8\theta + \cos 2\theta} \equiv \tan 5\theta$

20 $\dfrac{\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta} = 2 \operatorname{sen} \theta$

21 $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \equiv \tan \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

22 $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta} \equiv \dfrac{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$

23 $\dfrac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta}{\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta} \equiv \tan 3\theta$

24 $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) \equiv \dfrac{1}{2} \cos 2\theta$

6.13 Valores de las funciones para un número cualquiera

En diversas secciones del presente capitulo hemos calculado los valores de las funciones circulares para determinados números; asi, encontramos $\cos \pi/3 = 0{,}5000$, que es un valor decimal exacto, en tanto que $\operatorname{sen} \pi/3 = \sqrt{3}/2$ y $\tan \pi/3 = \sqrt{3}$ pueden aproximarse mediante decimales con la precisión que se requiera. Tales aproximaciones a valores exactos expresados por radicales pueden obtenerse sólo en ciertos casos especiales.

Para determinar los valores de las funciones para un θ cualquiera, podriamos aproximar $|\theta|$ sobre el arco de la circunferencia unitaria a partir de $(1, 0)$ y en esta forma ubicar la posición del punto terminal $P(\theta)$. Midiendo las coordenadas x e y de $P(\theta)$, podriamos determinar valores aproximados para las funciones coseno y seno. Sin embargo, en la práctica este método presenta limitaciones que lo hacen inconveniente por las imprecisiones inherentes a todo método que utiliza gráficos y mediciones de magnitudes en ellos. El método empleado habitualmente para determinar los valores de estas funciones con una buena precisión está basado en conceptos de cálculo y queda fuera del objetivo de este libro.

Es posible, sin embargo, determinar mediante procedimientos elementales los valores exactos de las funciones para cualquier múltiplo entero de $\pi/60$. Si bien este método no constituiría una manera eficiente para construir una tabla, tiene suficiente interés matemático como para justificar una breve explicación de él. Obtenemos nuestros resultados combinando los valores exactos de las funciones para $\theta = \pi/6, \pi/5, \pi/4, \pi/3$ y $\pi/2$ (ya determinados) y utilizando algunas de las relaciones de la sección 6.9.

Determinaremos los valores exactos de $\operatorname{sen} \pi/60$ y $\cos \pi/60$. Aplicando el valor determinado para $\cos \pi/5$ (sección 6.5) a las ecs. (6.49) y (6.50), tenemos

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/5}{2}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}$$

y

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1 + \cos\pi/5}{2}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}.$$

Además, por el ejemplo 2 y el problema 2, sección 6.9, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

y

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Puesto que $\pi/10 - \pi/12 = \pi/60$, tenemos, utilizando la ec. (6-31),

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{\pi}{60} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{12}\right) \\
&= \operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{10}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} \\
&= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}\,\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}\,\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\
&= \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})(8 + 4\sqrt{3})}{128}} - \sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(8 - 4\sqrt{3})}{128}},
\end{aligned}$$

de suerte que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{60} = \frac{\sqrt{12 - 2\sqrt{15} - 4\sqrt{5} + 6\sqrt{3}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{15} + 4\sqrt{5} - 10\sqrt{3}}}{8}. \tag{6.62}$$

Análogamente, aplicando la ec. (6.21), obtenemos

$$\cos\frac{\pi}{60} = \frac{\sqrt{20 + 2\sqrt{15} + 4\sqrt{5} + 10\sqrt{3}} + \sqrt{12 + 2\sqrt{15} - 4\sqrt{5} - 6\sqrt{3}}}{8}. \tag{6.63}$$

A partir de estos valores exactos pueden determinarse los de las demás funciones. Evidentemente, estos valores pueden expresarse en forma decimal con la aproximación que se desee, si bien el cálculo mismo resulta bastante laborioso.

En forma análoga pueden determinarse valores de las funciones para otros números, por ejemplo,

$$\pi/30 = \pi/5 - \pi/6, \qquad \pi/20 = \pi/4 - \pi/5, \qquad \pi/15 = \pi/6 - \pi/10,$$

y así sucesivamente.

El propósito de esta explicación era sólo mostrar cómo podría construirse una tabla mediante un procedimiento puramente elemental.

Los valores especiales que hemos considerado están incluidos en las tablas de valores de las funciones trigonométricas, las cuales pueden utilizarse tanto para determinar el valor aproximado de las funciones para un número dado como para determinar el número cuando se conoce el valor de alguna función para ese número. La tabla I del Apéndice da los valores, con aproximación de cuatro decimales, de las funciones seno, coseno, tangente y cotangente a intervalos de aproximadamente 0,0029 para números positivos hasta $\pi/2 = 1{,}5708$. A partir de estos valores, dados en la columna encabezada por la palabra radián (definiremos radián en el capítulo 15), pueden determinarse los valores aproximados de las funciones para un número real cualquiera.

Puesto que las funciones para un número cualquiera son iguales a las de la cofunción de $\pi/2$ menos el número, la tabla I se ha construido de modo que los números de 0 a $\pi/4 = 0{,}7854$ aparecen a la izquierda de la tabla, en tanto que los numeros de 0,7854 a 1,5708 estan a la derecha. Ademas, las funciones circulares indicadas en la parte superior corresponden a los números de la izquierda y las indicadas en la parte inferior, a los de la derecha.

Por ejemplo, frente a 0,4218 y en la columna bajo seno, encontramos 0,4094, esto es, sen 0,4218. El valor de sen $1{,}1926 = 0{,}9293$ lo encontramos en la columna que lleva el título seno en la parte inferior, puesto que 1,1926 aparece a la derecha. Mientras no estudiemos el proceso de interpolación, nos limitaremos a elegir el valor más cercano dado por la tabla.

Ejemplo 1. Determínese cos 1.

Solución. Puesto que el valor tabulado más cercano a 1 es 1,007, en la columna de la derecha, cos 1 es aproximadamente igual a 0,5398 (léase este valor en la columna que tiene en la parte inferior la palabra coseno).

Ejemplo 2. Determínese cos 12.

Solución. Aplicando el método indicado en la sección 6.10, tenemos $\cos 12 = \cos(7 \cdot 1{,}5708 + 1{,}0044) = \operatorname{sen} 1{,}0044$ (ec. 6.37), por tanto, $\cos 12 = 0{,}8434$.

Ejemplo 3. Determínese el número θ entre 0 y $\pi/2$ tal que sen $\theta = 0{,}6231$.

Solución Siendo 0,6225 el valor tabulado en la columna seno más cercano a 0,6231, $\theta = 0{,}6720$. Por la relación sen θ = sen $(\pi - \theta)$ y la periodicidad de la función, existen otros valores posibles para θ pero ninguno en el intervalo pedido; por ejemplo, puesto que $\theta = 0{,}6720$, sabemos que

$$\operatorname{sen}(3{,}1416 - 0{,}6720) = \operatorname{sen} 2{,}496 = 0{,}6231.$$

Además,

$$\operatorname{sen}(6{,}2832 + 0{,}6720) = \operatorname{sen} 6{,}9552 = 0{,}6231,$$

y así sucesivamente.

PROBLEMAS

1 Establézcase la ec. (6.63).

2 Represéntese $7\pi/60$, $2\pi/15$ y $3\pi/20$ mediante combinaciones similares a las usadas anteriormente y que puedan utilizarse para determinar el seno y el coseno para estos valores.

3 Repítase lo anterior ahora para $11\pi/60$, $13\pi/60$ y $7\pi/30$.

4 Si se dispone de una máquina calculadora, determínese la aproximación decimal para sen $\pi/60$ y cos $\pi/60$ utilizando las ecs. (6.62) y (6.63). Compárense estos valores con los dados en la tabla I.

5 Determínese el valor de cada una de las expresiones siguientes utilizando la tabla I.

(a) sen 0,4741 (b) cos 0,3869 (c) tan 1,15
(d) sen 0,17 (e) cos 3 (f) tan 4
(g) sen 30 (h) cos 60

6 Utilizando la tabla I, determínese el número θ entre 0 y $\pi/2 = 1{,}5708$ si:

(a) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}2979$ (b) $\cos\theta = 0{,}3365$ (c) $\tan\theta = 2{,}25$
(d) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}745$ (e) $\cos\theta = 0{,}1423$ (f) $\cot\theta = 10$

6.14 Aproximaciones de los valores funcionales para números pequeños

Utilizando las propiedades de ordenación y nuestra definición de la longitud de un arco de circunferencia (Definición 4.11), podemos determinar el valor aproximado de las funciones circulares para valores positivos pequeños de θ. Recordando las definiciones de sen θ y tan θ (problema 16, sección 6.3) y restringiendo θ a valores positivos pequeños, los valores de sen θ, tan θ y θ deben ser aproximadamente iguales. Del problema 9, sección 4.6, con fig. 4-10 y problema 19, sección 6.3, tenemos que, si $0 < \theta < \pi/2$,

$$\operatorname{sen}\theta < \theta < \tan\theta. \tag{6.64}$$

Esta desigualdad nos permite determinar una aproximación de sen θ y tan θ para valores pequeños de θ. Dividiendo ambos miembros de la ec. (6.64) por sen θ, tenemos $1 < \theta/\operatorname{sen}\theta < \sec\theta$, y tomando recíprocos, obtenemos

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1, \qquad (6.65)^*$$

* Considérese la desigualdad (6.65). A medida que θ se hace más y más pequeño, tomando siempre valores positivos (tiende a 0), cos θ tiende a 1. Un razonamiento similar puede utilizarse si θ es negativo. Luego, sen θ/θ, cuando θ tiende a 0, se encuentra siempre comprendido

y puesto que $\cos\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} > \sqrt{1 - \theta^2}$ (¿por qué?), tenemos

$$\sqrt{1 - \theta^2} < \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} < 1$$

o

$$\theta\sqrt{1 - \theta^2} < \text{sen}\,\theta < \theta \tag{6.66}$$

Dividiendo ahora ambos miembros de la ec. (6.64) por $\tan\theta$, tenemos

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\tan\theta} < 1 \tag{6.67}$$

o

$$\sqrt{1 - \theta^2} < \frac{\theta}{\tan\theta} < 1.$$

y tomando recíprocos, resulta

$$1 < \frac{\tan\theta}{\theta} < \frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}}. \tag{6.68}$$

o

$$\theta < \tan\theta < \frac{\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}}. \tag{6.69}$$

Las relaciones (6.66) y (6.69) nos dan cotas para $\text{sen}\,\theta$ y $\tan\theta$.

Ejemplo Determínese un valor aproximado de $\text{sen}\,\pi/60$.

Solución. Substituyendo en (6.66) θ por $\pi/60$, donde $\pi = 3{,}1416$, encontramos

$$0{,}05229 < \text{sen}\,\pi/60 < 0{,}05236.$$

Esto es, aproximado al cuarto decimal, $\text{sen}\,\pi/60 = 0{,}0523$. Compárese este valor con el de la tabla I.

También es posible determinar el valor de $\cos\theta$ para valores positivos pequeños de θ. Puesto que $\cos\theta \equiv 1 - 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$, tenemos

$$\cos\theta > 1 - 2\frac{\theta^2}{4},$$

y, por tanto,

$$1 > \cos\theta > 1 - \frac{\theta^2}{2}. \tag{6.70}$$

---

entre 1 y un número que tiende a 1; por tanto, el cuociente debe tender a 1. Esto se escribe

$$\lim_{\theta\to 0} \text{sen}\,\theta/\theta = 1,$$

y se lee: el límite de $\text{sen}\,\theta/\theta$, cuando θ tiende a cero, es 1. Este es un resultado de suma importancia en matemáticas más avanzadas.

PROBLEMAS

1 Tomando $\pi = 3{,}1416$, determínese la mejor aproximación para $\operatorname{sen} \pi/30$, $\cos \pi/30$ y $\tan \pi/30$ dada por las desigualdades precedentes.

2 Determínense aproximaciones para $\cos \pi/60$ y $\tan \pi/60$. Compárense estos valores con los dados en la tabla 1.

3 Utilizando la ec. (6.68), demuéstrese que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1.$$

4 Utilizando (6.65) o (6.67), demuéstrese que para $0 < \theta < \pi/2$,

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\tan \theta} < 1.$$

5 Utilizando el resultado del problema 4, demuéstrese que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\tan \theta} = 1.$$

6 Obténganse las siguientes cotas para $\operatorname{sen} \theta$, utilizando las ecs. (6.65) y 6.70).

$$\theta(1 - \tfrac{1}{2}\theta^2) < \operatorname{sen} \theta < \theta$$

Esta desigualdad no contiene raíz cuadrada y representa, por tanto, ventajas en ciertos casos.

7 El perímetro P del polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r es $P = 2nr \operatorname{sen} (\pi/n)$ y se tiene

$$\lim_{n \to \infty} P = 2\pi r$$

(el límite del perímetro de un polígono regular de n lados cuando el número de lados crece indefinidamente es la longitud de la circunferencia, $2\pi r$). Eliminado P, establézcase entre estas dos expresiones una relación que contenga un límite y, substituyendo en seguida π/n por θ, demuéstrese que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1.$$

PROBLEMAS DE REPASO

1 Si $f(n) = (n - 1)/(2n - 1)$, entonces $f(n + 1)$ es igual a

(a) $\dfrac{n+1}{2n+1}$ (b) $\dfrac{n+1}{2n+2}$ (c) $\dfrac{n}{2n+1}$

(d) $\dfrac{n}{2n}$ (e) ninguna de éstas.

2 Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (h \neq 0),$$

es igual a

(a) $\dfrac{\sqrt{h}}{h}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$

(c) 1 (d) ninguna de éstas.

3 Si $f(n) = -\frac{3}{2}(n^2 + 9)^{-3}$, encuéntrese el valor de $f(4) - f(-1)$.

4 Si $f(x) = x^2/(2x - 1)^{1/3}$, demuéstrese que

$$f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \tfrac{1}{4}(n^{4/3} + 2n^{1/3} + n^{-2/3}).$$

5 Si $f(x) = 6x^{1/3} + 8\sqrt[3]{4}x^{4/3} - \frac{18}{5}x^{5/3}$, encuéntrese el valor de $f(27) - f(8)$.

6 Trácese la gráfica del conjunto $A \cap B \cap C$ si

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) | 2x + y - 6 > 0\}, \\ B &= \{(x, y) | x - 2y + 2 < 0\}, \\ C &= \{(x, y) | y - 4 < 0\}. \end{aligned}$$

*7 Trácese la gráfica del conjunto $A \cap B$ si

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) | x + y - 7 < 0 \quad \text{y} \quad 2x + y - 6 > 0\}, \\ B &= \{(x, y) | x - 2y + 2 < 0 \quad \text{y} \quad y - 4 < 0\}. \end{aligned}$$

8 Trácese la gráfica de la función f dada por la expresión

$$f = \left\{(x, y) | y = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad x < 0 \\ 1 & \text{para} \quad 0 < x \end{cases}\right\}.$$

(a) Indíquense dominio y recorrido de f.
(b) ¿Cómo se compara f con

$$\left\{(x, y) | y = \frac{|x|}{x}\right\}?$$

9 Trácese la gráfica de la función g dada por la expresión

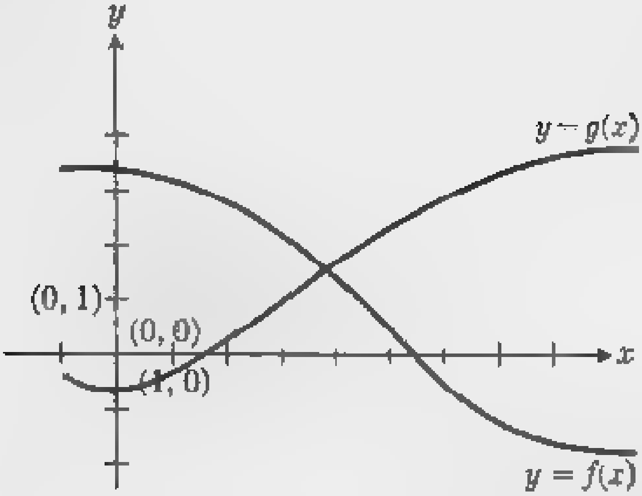
$$g = \left\{(x, y) | y = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{para} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{para} \quad x = 2 \end{cases}\right\}.$$

¿Es ésta la gráfica de una línea recta?

10 Demuéstrese que $|x - \frac{4}{7}| < \frac{3}{7}$ si y sólo si $|1/x - 4| < 3$.

---

* Problemas de este tipo son de gran importancia en el estudio de algunos temas de aplicaciones de matemáticas modernas; en especial, temas como la teoría de juegos y programación lineal.



6-19

11 En la figura 6.19 aparecen las gráficas de dos funciones f y g. Resuélvase gráficamente para x las dos ecuaciones siguientes.

(a) $f(x) = g(1)$ (b) $g(x) = f(2)$

12 (a) Explíquese por qué la gráfica de la ecuación $[y - f(x)][y - g(x)] = 0$ es la unión de las gráficas de f y de g.

(b) ¿Cómo podría describirse la gráfica de la ecuación $[y - f(x)]^2 + [y - g(x)]^2 = 0$ en términos de las gráficas de f y de g?

(c) ¿Cómo podría describirse la gráfica de la ecuación $[y - f(x)] + k[y - g(x)] = 0$ en términos de las gráficas de f y de g?

13 Demuéstrese que $(4 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\cos 2\theta)^2 + (2\cos 2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 \equiv 8$.

14 $\dfrac{(3\operatorname{sen}^2 3x - 3(1 - \cos 3x)\cos 3x)}{\operatorname{sen}^2 3x}$ es idéntica a

(a) $\dfrac{1 - 3\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 3x}$ (b) $\dfrac{3(1 - \cos 3x)}{\operatorname{sen}^2 3x}$ (c) $\dfrac{3\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 3x}$

(d) $\dfrac{3 - 9\cos x}{3\operatorname{sen}^2 x}$ (e) ninguna de éstas.

15 $\cos x/(1 - \operatorname{sen} x)^2$ es idéntica a

(a) $\dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ (b) 1 (c) $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

(d) $1/\cos x$ (e) ninguna de éstas.

16 Si $\tan\alpha = \sqrt{5}$, $\tan\beta = \sqrt{3}$, entonces $\tan(\alpha - \beta)$ es igual a

(a) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ (b) $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{16}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{15}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$ (e) ninguna de éstas.

17 Si $x = 3 \tan \theta$ e $y = \sec^2 \theta$, exprésese

$$\frac{y}{(9 + x^2)^{3/2}}$$

en términos de $\cos \theta$

18 Si $x = u \cos (\pi/4) - v \operatorname{sen} (\pi/4)$ e $y = u \operatorname{sen} \pi/4 + v \cos \pi/4$, encuéntrese A, B y C tales que

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = Au^2 + Buv + Cv^2.$$

19 Si $f(\theta) = \cos \dfrac{\pi - \theta}{3}$, encuéntrese $f(2\pi) - f(0)$.

20 Si (r, θ) satisface las ecuaciones $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, demuéstrese que $(-r, \theta + \pi)$ también satisface estas ecuaciones.

21 Elimínese t de las dos ecuaciones

$$x = vt \cos \theta, \qquad y = vt \operatorname{sen} \theta - \frac{gt^2}{2}.$$

y obténgase una relación entre x e y (suponemos que v, g y θ son constantes).

22 Si $u = \cos \theta$ y $v = \operatorname{sen} \theta$, demuéstrese que $\cos^2 \theta \operatorname{sen}^5 \theta = u^2(1 - u^2)v^3$.

23 Si $u = 4\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta$ y $v = 4\sqrt{2} \cos \theta$, exprésese

$$\frac{\sqrt{32}\, u^2 v}{\sqrt{32 - u^2}}$$

en términos de $\operatorname{sen} \theta$, donde $\pi/2 < \theta < \pi$.

24 Si $u = a \operatorname{sen} \theta$ y $v = a \cos \theta$, donde $a > 0$, y $0 < \theta < \pi/2$, demuéstrese que

$$vu^m \sqrt{(a^2 - u^2)^n} = a^{m+n+1} \operatorname{sen}^m \theta \cos^{n+1} \theta$$

25 Si $u = a \operatorname{sen} \theta$, $v = a \cos \theta$, $a > 0$, y $0 \leqslant \theta < \pi/2$, exprésese $u^4 v \sqrt{a^2 - u^2}$ en términos de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$.

26 Exprésese

$$\left(\frac{1}{ab}\right)\left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 \tan^2 \theta}\right)\left(\frac{b}{a} \sec^2 \theta\right)$$

en términos de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$.

27 Demuéstrese que

$$\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{(\cos h - 1)}{h} \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cos x.$$

28 Si $f(\theta) = a^2\theta/2 + (a^2/2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta$, encuéntrese el valor de $f(\pi/2) \quad f(\pi/4)$

29 Si $f(\theta) = 2 \tan \theta/2$, encuéntrese el valor de

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

30 Si $f(\theta) = 6/(5 + 2 \operatorname{sen} \theta)$, encuéntrese el valor de

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

31 Si $f(\theta) = \operatorname{sen} 3\theta/3$, encuéntrese el valor de

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) - f\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

32 Si $x = 2 \sec \theta$ e $y = 2 \sec \theta \tan \theta$ y $\pi/2 < \theta < \pi$, demuéstrese que

$$\frac{y}{x\sqrt{x^2 - 4}} = -\frac{1}{2}$$

33 Si $u = \cos^2 2x$ y $v = -2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x$, exprésese

$$\frac{\operatorname{sen} 2x \cos 2x}{\sqrt{9 - \cos^4 2x}}.$$

en términos de u y v.

34 Demuéstrese que

$$\frac{3 - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{1 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{3 - \operatorname{sen} 2\theta}{\cos^2 2\theta}$$

35 Encuéntrese el valor exacto de

(a) (u) $\operatorname{sen} 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$ (c) $\operatorname{sen} 3\theta$

si $\operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}$ y $0 < \theta < \pi/2$.

36 Encuéntrese el valor exacto de

(a) $\operatorname{sen} 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$ (c) $\operatorname{sen} 3\theta$

si $\operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}$ y $\pi/2 < \theta < \pi$.

7

Números complejos y vectores

En el capítulo 2 estudiamos un conjunto de propiedades algebraicas del sistema de los números reales las cuales se deducen a partir de los seis grupos de axiomas de un cuerpo.

En el presente capítulo nos proponemos examinar un conjunto mayor de números, el de los números complejos, que incluye los números reales como subconjunto y que también contiene un elemento cuyo cuadrado es -1. Este sistema no puede satisfacer los axiomas de orden; no obstante, demostraremos que los números complejos satisfacen todos los axiomas de un cuerpo del capítulo 2. Si bien no es posible representar los números complejos como puntos de una recta, es posible hacerlo como puntos de un plano, lo cual nos conducirá a examinar el álgebra de los pares ordenados en la sección 3 de este capítulo. En la última sección estudiaremos las propiedades algebraicas del conjunto de los vectores en el plano.

7.1. El álgebra de los números complejos

Nos proponemos considerar un sistema de números que contenga todos los elementos del conjunto R de los números reales y que también contenga un elemento i con la propiedad $i^2 = -1$. Como este sistema debe ser cerrado respecto a la multiplicación, el conjunto debe contener todas las expresiones de la forma bi con b en R, y como también debe ser cerrado respecto a la adición, debe contener además todas las expresiones de la forma $a + bi$, con a y b en R.

DEFINICION 7.1. *Un* número complejo Z *es una expresión de la forma* $Z = a + bi$, *donde* a *y* b *son números reales e* $i^2 = -1$. *Designamos al conjunto de los números complejos por* C *y escribimos* $C = \{z = a + bi | a \in R, b \in R, i^2 = -1\}$.

Dos números complejos $a + bi$ *y* $x + yi$ *son iguales si y sólo si* $a = x$ *y* $b = y$.

En la expresión $a + bi$, el número real a se llama *parte real* de $a + bi$ y el número real b se llama *parte imaginaria* de $a + bi$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. El número 1 está en C, ya que se puede escribir

$1 = 1 + 0i$. En forma más general, todo número real a puede escribirse $a = a + 0i$, de modo que todo número real es un número complejo y podemos escribir $R \subset C$. El número i está en C puesto que podemos escribir $i = 0 + 1i$. Un número complejo bi con $b \neq 0$ se llama *número imaginario puro.*

Ejemplo ilustrativo 2. El número i es una solución de la ecuación $z^2 = -1$ y $-i$ es también una solución de esta ecuación, ya que $(-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = (-1)\cdot i\cdot(-1)\cdot i = i\cdot i = i^2 = -1$. No existe numero real que sea solución de la ecuación $z^2 = -4$ pero hay dos soluciones complejas, $2i$ y $-2i$. En forma más general, la ecuación $z^2 = a$ tiene dos soluciones complejas para cada número real positivo a, a saber, $(\sqrt{a})i$ y $(-\sqrt{a})i$.

En los capítulos 2 y 3 estudiamos expresiones polinomiales de la forma $a + bx$, y demostramos que, utilizando las leyes de asociatividad, conmutatividad y distributividad para la adición y la multiplicación, tenemos las reglas siguientes:

$$(a + bx) + (c + dx) = (a + c) + (b + d)x. \tag{7.1}$$

$$(a + bx)\cdot(c + dx) = a\cdot c + (a\cdot d + b\cdot c)x + b\cdot dx^2. \tag{7.2}$$

Como el conjunto de los números complejos debe satisfacer estos mismos axiomas esto nos conduce a las siguientes definiciones para la adición y la multiplicación de números complejos, en que usamos además el hecho de que $i^2 = -1$.

Definición 7.2. *La suma y el producto de dos números complejos se definen como sigue:*

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \tag{7.3}$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (a\cdot c - b\cdot d) + (a\cdot d + b\cdot c)i. \tag{7.4}$$

Es claro que la suma y el producto de dos números complejos son también expresiones de la forma $x + yi$, con x e y números reales; esto es, el conjunto C de los números complejos es cerrado respecto de la adición y de la multiplicación, de modo que se verifican los Axiomas 1A y 1M del capítulo 2.

Ejemplo ilustrativo 3. El número $0 + 0\cdot i$ es la identidad para la adición, ya que para todo número complejo $a + bi$, tenemos $(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$ y, por tanto, el conjunto C satisface el Axioma 5A del capítulo 2.

Ejemplo ilustrativo 4. El número $1 + 0\cdot i$ es la identidad para la multiplicación, ya que para todo número complejo $a + bi$, tenemos $(a + bi)(1 + 0\cdot i) = (a\cdot 1 - b\cdot 0) + (a\cdot 0 + b\cdot 1)i = a + bi$ y, por tanto, el conjunto C satisface el Axioma 5M del capítulo 2.

Dado que $a = a + 0i$, según se indica en el ejemplo ilustrativo 1, puede defi-

nirse el producto del número real a por el complejo $z = x + yi$ de la manera siguiente:

DEFINICIÓN 7.3. *El producto del número complejo $z = x + yi$ por el número real a se define como*

$$az = a(x + yi) = ax + ayi.$$

Los Axiomas de asociatividad 2A y 2M, los Axiomas de conmutatividad 3A y 3M y el Axioma de distributividad 4 se deducen fácilmente de las definiciones de adición y multiplicación de números complejos y de los correspondientes axiomas para números reales. Los dos últimos axiomas, que garantizan la existencia de inverso aditivo e inverso multiplicativo, deben considerarse con más cuidado.

TEOREMA 7.1. *Todo número complejo tiene un inverso aditivo, esto es, para todo número complejo $a + bi$, existe un número complejo $x + yi$ que es solución de la ecuación $(a + bi) + (x + yi) = 0 + 0 \cdot i$.*

Demostración: Debemos encontrar números reales x e y tales que $a + x = 0$ y $b + y = 0$, y por tanto, tenemos $x = -a$ e $y = -b$; luego, el inverso aditivo único de $a + bi$ es $(-a) + (-b)i$.

El teorema anterior se puede utilizar para obtener la diferencia entre dos números complejos. Así, si $z_1 = 5 + 3i$ y $z_2 - 2 + 4i$, se tiene $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ y como $-z_2 = -2 - 4i$, resulta $z_1 - z_2 = 3 - i$.

TEOREMA 7.2. *Todo número complejo no nulo tiene un inverso multiplicativo; esto es, si $a + bi \neq 0 + 0i$, entonces, existe un número complejo $x + yi$ que es solución de la ecuación $(a + bi) \cdot (x + yi) = 1 + 0\ i$.*

Demostración: Por la definición de multiplicación de números complejos, debemos encontrar números reales x e y tales que

$$ax - by = 1. \tag{7.5}$$

$$bx + ay = 0. \tag{7.6}$$

Multiplicando la primera de estas expresiones por a y la segunda por b, obtenemos

$$a^2x - aby = a. \tag{7.7}$$

$$b^2x + aby = 0. \tag{7.8}$$

Sumando, obtenemos $(a^2 + b^2)x = a$. Como $a + bi \neq 0 + 0 \cdot i$, el número real $a^2 + b^2$ no es igual a cero, de modo que dividiendo por él obtenemos una

expresión para x; a saber, $x = a/(a^2 + b^2)$. Análogamente, podemos demostrar que $y = (-b)/(a^2 + b^2)$. Por tanto, el inverso multiplicativo del número complejo diferente de cero $a + bi$ está dado por $x + yi = a/(a^2 + b^2) + ((-b)/a^2 + b^2))i = (a - bi)/(a^2 + b^2)$. Podemos entonces escribir:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}. \tag{7.9}$$

Ejemplo ilustrativo 5. El inverso multiplicativo de $3 + 2i$ está dado por

$$1/(3 + 2i) = (3 - 2i)/13.$$

El cuociente $(1 + 4i)/(3 + 2i)$ puede expresarse como

$$(1 + 4i) \cdot (1/(3 + 2i)) = (1 + 4i)(3 - 2i)/13 = (11 + 10i)/13.$$

Definición 7.4. *El número complejo* conjugado *de un número complejo $a + bi$ se define como el número complejo $a - bi$, esto es, el número complejo con la misma parte real y con parte imaginaria igual al negativo de la parte imaginaria de $a + bi$.*

Ejemplo ilustrativo 6. El conjugado de $3 + 2i$ es $3 - 2i$. El conjugado del número complejo 3 es el mismo 3 y el conjugado de $4i$ es $-4i$.

El cuociente de dos números complejos puede obtenerse amplificando por el conjugado del complejo divisor. Así,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - cdi + cdi - d^2i^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Ejemplo ilustrativo 7.

$$\frac{3 + 4i}{2 - 3i} = \frac{6 - 12}{4 + 9} + \frac{8 + 9}{4 + 9}i = -\frac{6}{13} + \frac{17}{13}i.$$

El uso de la palabra «imaginario», en oposición a «real», para designar números de la forma $x + yi$, con $y \neq 0$, ha sido un tanto desafortunado. Si bien estos números fueron introducidos originalmente como soluciones de ecuaciones cuadráticas, posteriormente han sido de gran utilidad en física e ingeniería, en especial en el estudio de algunos fenómenos eléctricos. En este sentido, los números «imaginarios» pueden tener un significado tan «real» como los números «reales».

En este texto usaremos los números complejos principalmente al estudiar raíces de polinomios en los capítulos 8 y 10.

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8 efectúense las operaciones indicadas, expresando la respuesta como un número complejo de la forma $x + yi$.

1 (a) $(2 + 5i) + (4 - i)$ (b) $(2 + 5i) - (4 - i)$

2 (a) $(2 + 5i)(4 - i)$ (b) $(2 - 5i)(4 + i)$

3 (a) $\dfrac{2 + 5i}{4 - i}$ (b) $\dfrac{2 - 5i}{4 + i}$

4 (a) $i^3 = i^2 \cdot i$ (b) $i^4 = i^2 \cdot i^2$
(c) i^5 (d) $1/i$

5 $(a + bi)^2$

6 $(a + bi)(a - bi)$

7 $1/(a - bi)$

8 (a) $(1 + i)^2$ (b) $((\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2)i)^2$

9 Demuéstrese que la suma de dos números imaginarios puros es un numero imaginario puro o cero.

10 Demuéstrese que el conjugado del conjugado de $a + bi$ es $a + bi$.

11 Demuéstrese que la suma de un número complejo y su conjugado es el doble de la parte real del número y que la diferencia es el doble de la parte imaginaria del número multiplicado por i.

12 Demuéstrese que un número complejo es igual a su conjugado si y sólo si el número es real.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones (despéjese z):

13 $2z/3 - 5i = 0$ 14 $(4 + i)z = 2 - 5i$

15 $iz/2 = 3 - 4i$ 16 $(2z - 4i)/(z + i) = 1$

17 $z^2 = 8$ 18 $z^2 = -9$

19 $z^2 + 5z + 6 = 0$

Indicación: Descompóngase en factores.

20 $z^2 + (3 + 2i)z + 6i = 0$ 21 $z^2 + z + iz + i = 0$

22 $z^2 + 5iz - 6 = 0$ 23 $iz^2 + 7z - 12i = 0$

24 Demuéstrese que si la suma y el producto de dos números complejos son ambos reales, entonces, o bien ambos números son reales, o bien uno de los números es el conjugado del otro.

Indicación: Si $(a + bi) + (c + di)$ es real, entonces $b + d = 0$, y si $(a + bi)(c + di)$ es real, entonces $a \cdot d + b \cdot c = 0$.

¿Por qué? Usense estas dos ecuaciones para concluir que, o bien $b = 0 = d$, o bien $b = -d$ y $a = c$.

25 Demuéstrese que para todo entero positivo n, se tiene

(a) $i^{4n} = 1$ (b) $i^{4n+1} = i$
(c) $i^{4n+2} = -1$ (d) $i^{4n+3} = -i$
(e) $i^{n+4} = i^n$

26 Demuéstrese que el conjunto de los números complejos C no satisface los Axiomas de orden del capítulo 4.

Indicación: Considérense los números complejos i y 0.

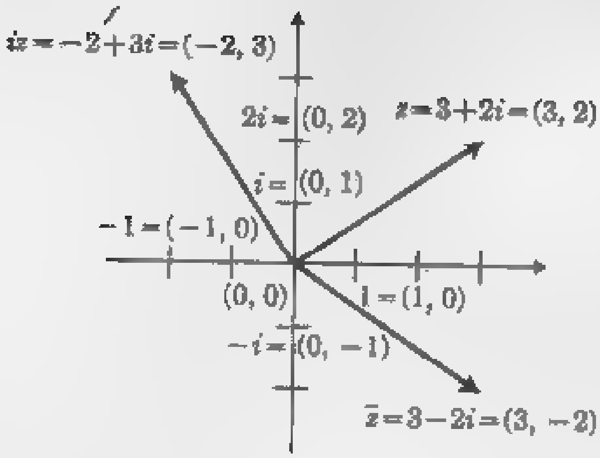
Si se satisface el Axioma 01, entonces $i = 0, i > 0$ ó $i < 0$ (1) $i \neq 0$, ya que $i^2 = -1 \neq 0$ (2) Si $i > 0$, por el Axioma 04, multiplicando ambos miembros por i, se obtiene $i^2 > 0$, o sea, $-1 > 0$, lo cual es imposible. (3) Si $i < 0$, ¿cual es el resultado?

7.2. La geometría de los números complejos

Hemos visto que si un conjunto de números puede ser colocado en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta, entonces los axiomas de orden implican que no puede haber solución para la ecuación $z^2 = -1$ en ese sistema. No podemos, por tanto, esperar que haya una correspondencia biunívoca entre los numeros complejos y los puntos de una recta. (Ver problema 26, sección 7-1.) Sin embargo, existe una correspondencia entre los números complejos y los pares ordenados de números reales; específicamente, ella se obtiene haciendo corresponder el número $x + yi$ con el par ordenado de reales (x, y). Como cada par ordenado (x, y) da las coordenadas de un punto del plano en un sistema de coordenadas cartesianas (como en la sección 2.3), obtenemos una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto C y los puntos de un plano. Este plano se denomina *plano complejo* y la figura en que se representan los números complejos se llama *diagrama de Argand.** Los números reales se representan en el eje x y los números imaginarios puros en el eje y. El número $2 + 3i$ se representa por el punto $(2, 3)$ y su conjugado $2 - 3i$ por el punto $(2, -3)$. En general, el punto que representa el conjugado de un número complejo z se obtiene reflejando el punto que representa a z con respecto al eje x. Simbolizaremos por $\bar{z}$ (léase «z barra» o «conjugado de z») al conjugado de un número complejo z, así, $\overline{x + yi} = x - yi$.

El diagrama de Argand es de utilidad para ilustrar diversas propiedades de los números complejos, por ejemplo, el punto que corresponde al número complejo $i(3 + 2i) = -2 + 3i$ es $(-2, 3)$ y éste se obtiene rotando el punto $(3, 2)$ alrededor del origen en un ángulo recto. (Véase fig 7-1) En general, multiplicar un número complejo i corresponde a rotar el punto que lo representa en un ángulo recto en torno al origen. Encontraremos nuevamente este *fenómeno* cuando analicemos la forma polar de los números complejos en la sección 16.3

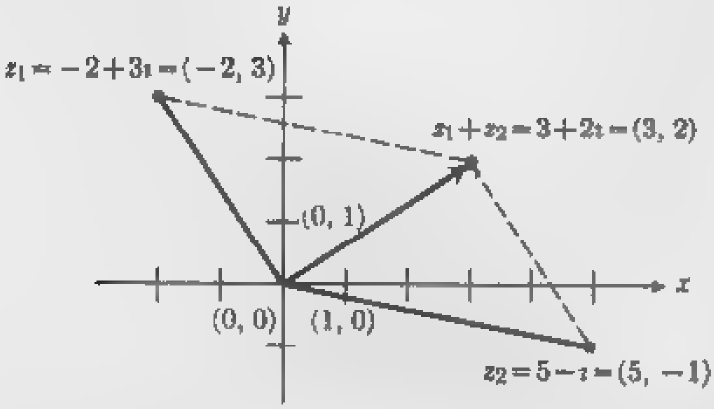
* Este sistema de representación gráfica de números complejos fue descubierto en forma independiente por Wessel (noruego), Argand (francés) y Gauss (alemán) alrededor del año 1800.



7-1

El punto del plano que corresponde a la suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ es el punto de coordenadas $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Esto motiva una definición de adición de pares ordenados, la cual estudiaremos en la próxima sección, y también una interpretación geométrica de la suma de números complejos como suma de vectores, la que se considerará en la sección 7.4.

Ejemplo ilustrativo 1. Si $z_1 = -2 + 3i$ y $z_2 = 5 - i$, entonces $z_1 + z_2 = 3 + 2i$. El diagrama de Argand de la fig. 7-2 indica la posición de los puntos correspondientes a estos números complejos.



7-2

La representación de un número complejo $z = x + yi$ como un punto (x, y) en el plano conduce además a dar una medida del tamaño de un número complejo mediante la distancia del punto (x, y) al origen.

Definición 7.5. *El* módulo o valor absoluto *de un número complejo* $z = x + yi$ *se define como*

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{7.10}$$

Si el número complejo z es real, esto es, si $z = x + 0 \cdot i$, entonces la definición del módulo o valor absoluto de z da $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2}$; luego, en este caso,

la definición coincide con la definición dada anteriormente para el valor absoluto de un número real x (Definición 4.4).

PROBLEMAS

1 Para los valores dados de los números complejos z_1 y z_2, encuéntrese $z_1 + z_2$ y represéntense los puntos z_1, z_2 y $z_1 + z_2$ en un diagrama de Argand.

a) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = -3 - i$ b) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 1 - 2i$

c) $z_1 = 3i, z_2 = -2$ d) $z_1 = 4i, z_2 = -3i$

2 Para los números complejos z dados, encuéntrense $\bar{z}$ e iz y represéntense los tres puntos en un diagrama de Argand.

a) $z = 3 + 4i$ b) $z = i$

c) $z = -2 - 3i$ d) $z = -3$

3 Encuéntrese el valor absoluto o módulo de cada uno de los números complejos del problema 2.

4 Demuéstrese que $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.

5 Demuéstrese que $|\bar{z}| = |z|$ para todo número complejo $z = x + yi$

6 Demuéstrese que $|z| = |iz|$ para todo número complejo $z = x + yi$.

7 Demuéstrese que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ para todo número complejo $z = x + yi$.

8 Demuéstrese que el conjugado de la suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ es igual a la suma de los conjugados de estos números; esto es, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

9 Demuéstrese que el conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de estos números; esto es, $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$.

10 Demuéstrese que para todo complejo $z = x + yi$, se cumple $x \leq |z|$ e $y \leq |z|$.

11 Demuéstrese que para todo complejo $z = x + yi$, se cumple $z + \bar{z} = 2x$ y $z - \bar{z} = 2y$.

12 Demuéstrese que para dos números complejos cualesquiera, el valor absoluto del producto es igual al producto de sus valores absolutos; esto es, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Indicación: Utilizando el problema 7, tenemos $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2})$; pero $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ por el problema 9, de modo que $|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.

13 Es posible demostrar que para dos números complejos cualesquiera, el valor absoluto de su suma es menor o igual a la suma de sus valores absolutos, esto es, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Indíquense las razones para cada paso en la siguiente demostración.

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\
&= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2.
\end{aligned}
$$

Ahora, $z_1\bar{z}_2$ y $z_2\bar{z}_1$ son conjugados, de modo que

$$
\begin{aligned}
z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 &= 2\,(\text{parte real de } z_1\bar{z}_2) \leq 2|z_1 \cdot \bar{z}_2| \\
&= 2|z_1| \cdot |\bar{z}_2| = 2|z_1| \cdot |z_2|.
\end{aligned}
$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &\leq z_1\bar{z}_1 + 2|z_1|\cdot|z_2| + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1|\cdot|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2,\end{aligned}$$

de modo que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

7.3. El álgebra de pares ordenados

En la sección anterior interpretamos los números complejos como pares ordenados de números reales correspondientes a puntos de un plano. La definición de suma de números complejos y la de multiplicación de los números complejos por números reales motiva definiciones para la suma de pares ordenados de numeros reales y el producto de un par ordenado por un escalar.

Antes de definir estas operaciones, debemos definir el concepto de igualdad de pares ordenados. (Recuérdese la explicación de la sección 1.3).

DEFINICIÓN 7.6. *Dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.*

Así, $(x + 2y, 2x - y) = (4, 3)$ si y sólo si $x + 2y = 4$ y $2x - y = 3$, o sea, $x = 2$ e $y = 1$.

Ahora podemos definir las operaciones de adición y de multiplicación por un número real (un *escalar*).

DEFINICIÓN 7.7. *La suma de dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es el par ordenado $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, y se escribe*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{7.11}$$

Por ejemplo, $(2, 1) + (3, 2) = (2 + 3, 1 + 2) = (5, 3)$.

A partir de la definición es evidente que P es cerrado respecto a la operación de adición; además, la operación es conmutativa y asociativa, puesto que los números reales tienen estas propiedades. (Véanse los problemas 2 y 3).

De la ec. (7.1), tenemos que

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) \tag{7.12}$$

para todo (x, y) y, por tanto, puesto que $(0, 0)$ es un par ordenado, existe un elemento identidad para la adición el cual es precisamente $(0, 0)$.

DEFINICIÓN 7.8. *El producto de un par ordenado (x, y) por un escalar $c \in R$ es el par ordenado (cx, cy) y se escribe*

$$c(x, y) = (cx, cy) \tag{7.13}$$

Por ejemplo, $5(2, -4) = (10, -20)$.

Un caso especial importante de la ec. (7.13) es aquel en que $c = -1$. En efecto, como para todo par ordenado (x, y) el par ordenado $-1(x, y) = (-x, -y)$ tiene la propiedad, por la Definición 7.7, de que

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0), \tag{7.14}$$

entonces existe un elemento inverso para la operación de adición.

Así como en el caso de los números reales, donde la solución de la ecuación $a + x = b$ se escribe $b - a$ y se llama diferencia de b y a (recuérdese la sección 2.3), la solución de la ecuación

$$(x_1, y_1) + (x, y) = (x_2, y_2) \tag{7.15}$$

se llama diferencia de los dos pares ordenados (x_2, y_2) y (x_1, y_1). Como por la ecuación (7.15)

$$x_1 + x = x_2,\ y_1 + y = y_2 \quad \text{o} \quad x = x_2 - x_1,\ y = y_2 - y_1,$$

la diferencia (x, y) se escribe como el par ordenado

$$(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1) \quad \text{o} \quad (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1). \tag{7.16}$$

Hemos indicado que el conjunto de pares ordenados,

$$P = \{(x, y)/x, y \in R\},$$

cumple ciertas leyes algebraicas. Específicamente,

(1) El conjunto P es cerrado respecto de la adición.

(2) La adición de pares ordenados en P es conmutativa.

(3) Se cumple la asociatividad para la adición de pares ordenados.

(4) Existe una identidad en P.

(5) Existe un inverso para cada par ordenado de P.

Todo conjunto cuyos elementos satisfacen estas cinco leyes se dice que forma un *grupo conmutativo* respecto de la adición.

Es posible probar además muchas otras propiedades. Enumeraremos cuatro de estas propiedades adicionales; sus demostraciones no son difíciles y se proponen como problemas.

(6) Para todo par ordenado (x, y) de P y escalares cualesquiera c y d.

$$(cd)(x, y) = c\big(d(x, y)\big). \tag{7.17}$$

(7) Para todo par ordenado (x, y) y escalares cualesquiera c y d,

$$(c + d)(x, y) = c(x, y) + d(x, y). \tag{7.18}$$

(8) Para pares ordenados cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y para todo escalar c,

$$c[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = c(x_1, y_1) + c(x_2, y_2). \tag{7.19}$$

(9) Para todo par ordenado,

$$1(x, y) = (x, y). \tag{7.20}$$

DEFINICIÓN 7.9. *Todo conjunto cuyos elementos satisfacen estos nueve axiomas se llama* espacio lineal o espacio vectorial sobre los números reales. *En la sección siguiente se verá claramente la razón del nombre espacio vectorial.*

Más adelante encontraremos otros sistemas algebraicos que satisfacen estos axiomas; por ejemplo, el conjunto de las matrices de $n \times m$ en la sección 9.1.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. El conjunto C de los números complejos satisface los axiomas de clausura, asociatividad y conmutatividad respecto de la adición; además, existen una identidad aditiva y un inverso aditivo para cada elemento de C, de modo que C satisface los cinco primeros axiomas de un espacio lineal sobre los números reales. También tenemos una definición de multiplicación de un número complejo $z = x + yi$ por un número real c; esto es, $cz = c(x + yi) = cx + (cy)i$; por tanto, el conjunto C satisface también los últimos cuatro axiomas de un espacio lineal sobre los números reales. (Véase problema 16.)

PROBLEMAS

1 Explíquese la proposición formulada en el texto:

«$P = \{(x, y) | x, y \in R\}$ es cerrado respecto de la operación de adición»

2 Demuéstrese que la adición definida para pares ordenados por la ec. (7.11) es conmutativa; es decir,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1).$$

3 Demuéstrese que la adición es asociativa, o sea,

$$[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)].$$

4 Demuéstrese que $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$ para todo $(x, y) \in P$. ¿Que axioma de un cuerpo representa esta igualdad?

5 Demuéstrese que $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$ para todo $(x, y) \in P$. ¿Qué axioma de un cuerpo representa esta igualdad?

6 Explíquese por qué es válida la ec. (7.17).

7 Explíquese por qué es válida la ec. (7.18).

8 Demuéstrese que la ec. (7.19) es válida. ¿Cómo podrá llamarse esta propiedad?

9 Explíquese por qué es válida la ec. (7.20).

Encuéntrese el valor del par ordenado (x, y) en cada uno de los problemas 10 a 15.

10 $(x, y) = (2, 3) + (4, 5)$

11 $(x, y) = (-2, 1) + (3, -7)$

12 $(x, y) = (3, -1) - (4, -2)$

13 $(3, 1) = (x, y) + (5, -1)$

14 $2(x, y) = (6, -4)$

15 $5(x, y) = 3(2, 1) + 2(x, y)$

16 ¿Qué axiomas de los números complejos justifican los siguientes cuatro axiomas para un espacio lineal sobre los números reales?

(a) Para todo z en C y todo c y d en R, $(cd)z = c(dz)$.
(b) Para todo z en C y todo c y d en R, $(c + d)z = cz + dz$.
(c) Para todo z_1 y z_2 en C y todo c en R, $c(z_1 + z_2) = cz_1 + cz_2$.
(d) Para todo z en C, $1 \cdot z = z$.

7.4. El álgebra de los vectores

La noción de vector en dos dimensiones* puede ser presentada de dos maneras. Sin embargo, antes de definir un vector estableceremos la notación a usar. En este libro usaremos «negrilla», tal como **v**, **i** o $\mathbf{v}_1$ para identificar un vector. Dado que el lector puede tener dificultades para escribir este tipo de letra, puede ser adecuado para él indicar los vectores colocando una pequeña flecha sobre las letras; por ejemplo, los vectores antes indicados pueden escribirse también $\vec{v}$, $\vec{i}$ o $\vec{v}_1$. Veamos ahora las definiciones.

DEFINICIÓN 7.10. *Un vector* **v** *es un par ordenado de números reales* (x, y). *Los números* x *e* y *se denominan* componentes *de* **v**. *Supondremos que estos vectores (pares ordenados) cumplen las leyes enunciadas en la sección 7.3, tales como las definiciones 7.6, 7.7 y 7.8. Como consecuencia de esto, estos vectores cumplen todas las leyes y tienen todas las propiedades que puedan demostrarse para el sistema matemático abstracto definido originalmente. De este modo, es posible desarrollar un estudio de los vectores sin poner demasiado énfasis en su interpretación geométrica. Daremos además una segunda definición*

* En tres dimensiones, una definición similar a la Definición 7.9 incluiría un trío ordenado (x, y, z); de hecho se podría dar una definición generalizada para cualquier número de dimensiones.

de vector, con representación geométrica; veremos que ambas definiciones pueden considerarse como equivalentes; es decir, definiendo el mismo concepto.

DEFINICIÓN 7.11. *Un vector* **v** *es un segmento rectilíneo dirigido de longitud fija.*

El segmento dirigido se puede marcar mediante una flecha colocada sobre él para indicar el sentido. Se acostumbra dar la posición del vector de modo que su extremo inicial coincida con el origen y su extremo terminal con el punto (x, y). Véase fig. 7-3. Tal vector se llama vector *ligado* en *posición estándar*, para distinguirlo de un vector libre (en que el extremo inicial puede tomar cualquier posición). Aquí nos referiremos casi exclusivamente a vectores ligados.

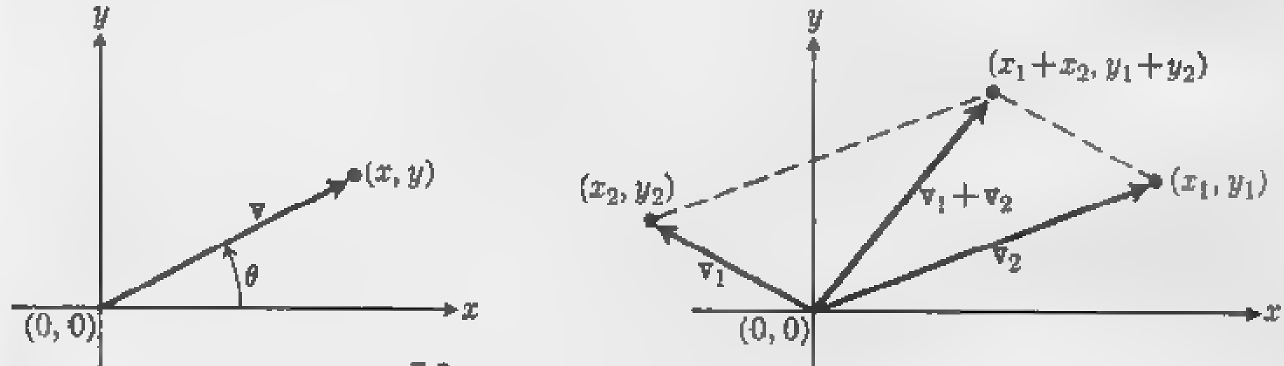
Veamos algunas definiciones para el concepto algebraico de vector como par ordenado y observemos su equivalencia geométrica.

1 a. Si $\mathbf{v} = (x, y)$, la *norma* de **v**, indicada por $|\mathbf{v}|$, se define como

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{7.21}$$

1 g. La magnitud o longitud del vector geométrico correspondiente o segmento rectilíneo entre los puntos $(0, 0)$ y (x, y) es la distancia dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$.

2 a. El vector 0 es el par ordenado $(0, 0)$. Su norma es 0 y se le puede asignar cualquier dirección que sea conveniente.



7-3

7-4

2 g. El vector geométrico cero correspondiente es un punto, el origen.

3 a. Si $\mathbf{v} = (x, y) \neq 0$, el *ángulo de dirección* de **v** designado por θ, será considerado en la sección 16.3, capítulo 16.

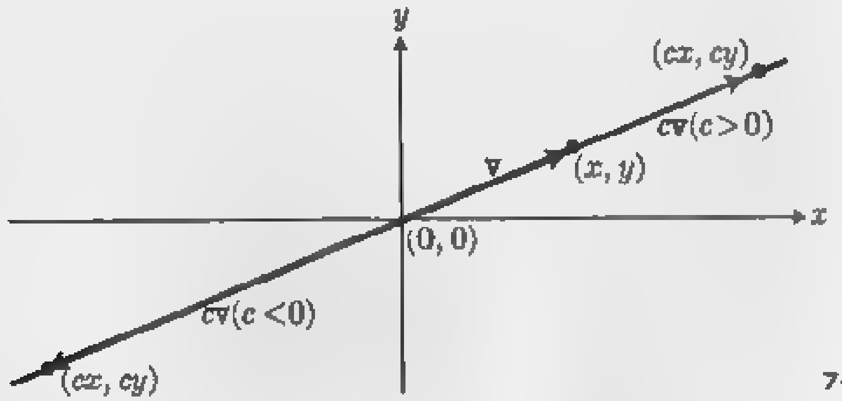
3 g. El ángulo que el vector geométrico forma con el eje x positivo se considera como la indicación del sentido del segmento rectilíneo, el cual, por supuesto, se puede indicar del mismo modo.

4 a. En las Definiciones 7.6, 7.7 y 7.8 enunciamos ciertas propiedades algebraicas para el conjunto de vectores

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = (x, y) | x \text{ e } y \in R\}.$$

4 g. La suma (o *resultante*) de dos vectores geométricos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es el vector geométrico $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, el cual termina en el vértice opuesto al origen del paralelogramo que tiene dos lados coincidentes con $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Véase fig. 7-4. El producto $c\mathbf{v}$ de un escalar y un vector geométrico es un vector colineal con $\mathbf{v}$. Su magnitud es $|c|\,|\mathbf{v}|$ y su sentido es el mismo de $\mathbf{v}$, si $c > 0$ y el opuesto si $c < 0$. Véase figura 7-5.

Consideremos ahora algunos ejemplos.



7-5

EJEMPLO 1. Si $\mathbf{v} = (2, -3)$, $c_1 = -2$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 4)$ y $c_2 = -3$, exprésese cada uno de los siguientes vectores como un par ordenado e indíquese el resultado gráficamente:

(a) $c_1\mathbf{v}_1$, (b) $c_2\mathbf{v}_2$, (c) $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$.

Solución:

(a) $c_1\mathbf{v}_1 = -2(2, -3) = (-4, 6)$, (b) $c_2\mathbf{v}_2 = -3(-1, 4) = (3, -12)$,
(c) $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = (-1, -6)$.

Las gráficas se indican en la fig. 7-6.

EJEMPLO 2. Si $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ y $\mathbf{v}_2 = (-2, -5)$, encuéntrese la norma de

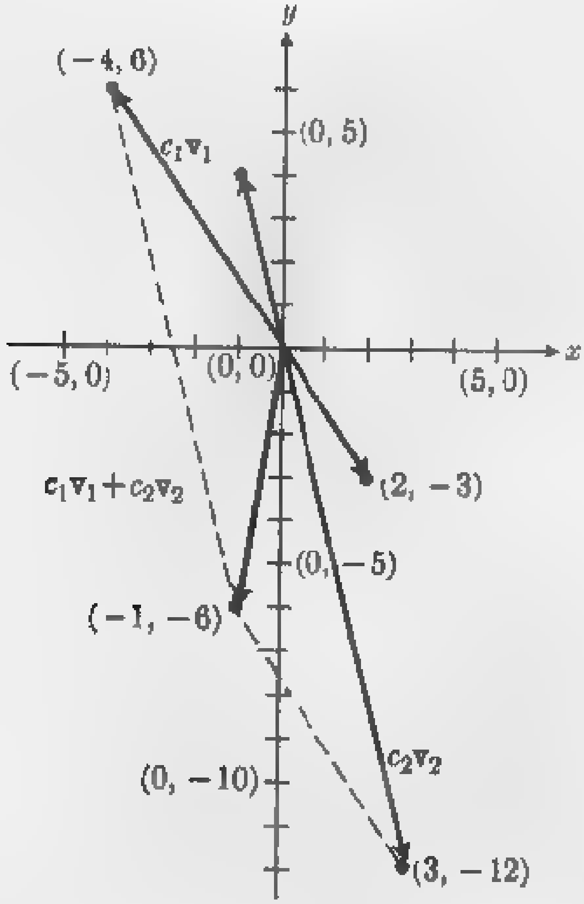
$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

Solución: Puesto que

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (1, -1) - (-2, -5) = (3, 4),$$

tenemos

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5.$$



7-6

Es importante hacer notar que la definición y la interpretación de los vectores como pares ordenados son compatibles con lo que deseamos, si suponemos dado el conjunto $P = \{(x, y), x \in R \text{ e } y \in R\}$, el cual obedece las Definiciones 7.6, 7,7 y 7.8.

Problemas

Represéntese gráficamente cada vector en los problemas 1 a 9, indicando cada vez su norma.

1 $\mathbf{v} = (2, 3)$ 2 $\mathbf{v} = (-3, 4)$

3 $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{3})$ 4 $\mathbf{u} = (-2, -3)$

5 $\mathbf{w} = (-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$

6 $\mathbf{v} = (-4, 4)$

7 $\mathbf{u} = (-1, 4)$

8 $\mathbf{v} = (7, -8)$

9 $\mathbf{w} = (-5, 12)$

Si $\mathbf{u} = (-2, 3)$ y $\mathbf{v} = (4, -1)$, encuéntrese la norma e indíquense la dirección y el sentido en una figura, para cada uno de los vectores dados en los problemas 10 a 12.

10 (a) $-\mathbf{u}$ (b) $2\mathbf{v}$

11 (a) $-\mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

12 (a) $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ (b) $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

Si $\mathbf{u} = (-2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, -1)$, $c = 2$ y $d = -3$, encuéntrese, en la forma de un par ordenado, cada uno de los vectores indicados en los problemas 13 a 20. Represéntense los resultados gráficamente.

13 $c\mathbf{u}$

14 $d\mathbf{v}$

15 $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

16 $(c + d)\mathbf{u}$

17 $c(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

18 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$

19 $(c + d)(\mathbf{u} - \mathbf{v})$

20 $cd(d\mathbf{u} - c\mathbf{v})$

21 Por definición, dos vectores $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ son colineales si $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$, o sea, $(x_1, y_1) = c(x_2, y_2)$. Demuéstrese que $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ son colineales si y sólo si $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

22 Si $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ no son colineales, demuéstrese que todo vector $\mathbf{v}_3 = (x_3, y_3)$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Indicación: Debe demostrarse que existen escalares c_1 y c_2 tales que $\mathbf{v}_3 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$; esto es, $(x_3, y_3) = c_1(x_1, y_1) + c_2(x_2, y_2)$. Utilícense los resultados del problema 21.

23 Una aplicación especial y muy importante de los resultados enunciados en el problema 22 está representada por el caso en que

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1).$$

Si escribimos $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$, demuéstrese que todo vector $\mathbf{v} = (x, y)$ puede expresarse como $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

24 Siguiendo la idea dada en el problema 23, exprésese cada uno de los vectores siguientes como una suma de múltiplos escalares de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

(a) $(2, -3)$ (b) $(-4, 3)$ (c) $(5, 0)$
(d) $(-2, 1)$ (e) $(0, -2)$ (f) $(0, 0)$

25 Encuéntrense vectores unitarios con dirección y sentido iguales a los de los vectores siguientes:

(a) $(2, -3)$ (b) $(-4, 3)$ (c) $2(1, -3) - 3(2, 3)$
(d) $5(-2, -3)$ (e) $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (f) $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$

26 Demuéstrese que dos vectores $\mathbf{v}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ son perpendiculares si y sólo si $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Utilizando los resultados del problema 26, indíquese cuáles de los vectores de los problemas 27 y 28 son perpendiculares.

27 (a) $\mathbf{v}_1 = (2, 3)$ y $\mathbf{v}_2 = (-2, \frac{4}{3})$
(b) $\mathbf{u}_1 = (0, 2)$ y $\mathbf{u}_2 = (-3, 0)$

28 (a) $\mathbf{w}_1 = 4\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$ y $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j}$
(b) $\mathbf{z}_1 = (-\sqrt{3}/2)\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ y $\mathbf{z}_2 = (\sqrt{3}/2)\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$

29 (a) Demuéstrese que $\mathbf{v}_1 = (-4, 3)$ y $\mathbf{v}_2 = (3, 4)$ son vectores perpendiculares.
(b) Encuéntrense escalares c_1 y c_2 de modo que $c_1\mathbf{v}_1$ y $c_2\mathbf{v}_2$ sean vectores unitarios.
(c) Si $\mathbf{e}_1 = c_1\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{e}_2 = c_2\mathbf{v}_2$ se usan para expresar estos dos vectores mutuamente perpendiculares, exprésese $\mathbf{v} = (5, -2)$ como combinación lineal de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$

30 Sean (a, b) y (c, d) vectores fijos. Para todo escalar t tal que $0 < t < 1$, sea el vector $\mathbf{v} = (x, y) = (1 - t)(a, b) + t(c, d)$. ¿Qué puede decirse acerca de la ubicación del punto (x, y) en relación con las de los puntos (a, b) y (c, d)?

8

Funciones lineales y cuadráticas

8.1. La función lineal

Las funciones circulares, que consideramos en el capítulo anterior, no fueron definidas mediante expresiones algebraicas sino mediante una regla; aún más, estas funciones no pueden expresarse algebraicamente. La más simple de las funciones que puede definirse mediante una expresión algebraica no trivial es probablemente la que queda definida por la ecuación $y = f(x) = mx + b$.

DEFINICIÓN 8.1. *La función f, definida por la ecuación de primer grado*

$$f = \{(x, y) | y = mx + b\},$$

donde m y b son constantes, recibe el nombre de función lineal.

El nombre de esta función proviene del hecho de que su gráfica es una línea recta.* Por otra parte, toda línea recta que no sea $x = k$ (recta paralela al eje y) puede representarse mediante una ecuación de este tipo con valores determinados de m y b. En este libro nos interesarán principalmente las propiedades algebraicas y los ceros de las funciones lineales, antes que sus propiedades geométricas.

Recordemos (sección 5.2) que cero de una función es todo valor de la abscisa x para el cual y, valor de la función, es igual a cero. Por tanto, podemos encontrar el cero de la función lineal haciendo $y = 0$ y resolviendo la ecuación $mx + b = 0$. En general, los ceros de una función son las *raíces* o *soluciones* de la ecuación $f(x) = 0$. Antes de considerar la resolución de una ecuación lineal en forma específica, analicemos el problema de resolver una ecuación cualquiera.

Existen diversos métodos para resolver una ecuación; en general, podemos emplear cualquier transformación que dé una *ecuación equivalente*, esto es, una ecuación que tenga las mismas raíces, y sólo estas raíces. Algunas transformaciones, por ejemplo, elevar al cuadrado, pueden introducir nuevos factores y otras, por ejemplo, dividir, pueden hacer desaparecer algunos factores, de modo que será siempre necesario emplear estos procedimientos con gran precaución.

* El hecho de que $y = mx + b$ representa la ecuación de una línea recta se demuestra en geometría analítica. Nosotros lo daremos por establecido.

Por otra parte, es siempre conveniente verificar toda posible solución, ya que, en última instancia, el criterio decisivo para que un número sea raíz de una ecuación es que satisfaga la ecuación. Las operaciones siguientes reciben el nombre de *permisibles*, puesto que ellas dan origen siempre a una ecuación equivalente a la original; esto es, la nueva ecuación tiene exactamente las mismas raíces.

(1) Un mismo número o expresión algebraica puede sumarse a o restarse de ambos miembros de una ecuación.

(2) Los dos miembros de una ecuación pueden multiplicarse o dividirse por un mismo número diferente de cero.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. Si en la ecuación $4x - 5 = x + 7$, sumamos 5 y restamos x en ambos miembros, tenemos $3x = 12$; en seguida, dividiendo por 3 obtenemos $x = 4$.

Debe quedar claramente entendido que toda operación permisible es reversible (puede invertirse).

Además de las operaciones permisibles mencionadas, a veces se utilizan otras, como elevar al cuadrado ambos miembros; esta operación, sin embargo, no es reversible. Si bien al elevar al cuadrado no se pierden raíces de la ecuación original, es posible que existan ciertos valores que son raíces de la nueva ecuación pero no de la original, por lo que será siempre necesario en este caso examinar las raíces de la nueva ecuación para determinar si son raíces de la ecuación primitiva.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. Si en la ecuación $x - 1 = 3$, que tiene la raíz $x = 4$, elevamos al cuadrado ambos miembros, obtenemos $(x - 1)^2 = 9$, una de cuyas raíces es -2, que, sin embargo, no satisface la ecuación original.*

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. Resolviendo la ecuación $\operatorname{sen}^2 \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta = 0$ para valores de θ entre 0 y $\pi/2$, encontramos $\operatorname{sen} \theta = 0$ ó $\frac{1}{2}$ y $\theta = 0$ ó $\pi/6$. Si hubiéramos dividido previamente por $\operatorname{sen} \theta$, tendríamos solamente el valor $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ y habríamos «perdido» el valor $\operatorname{sen} \theta = 0$.†

Pasemos ahora a considerar la resolución de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 1. Resuélvase la ecuación

$$\frac{2x + 5}{2} - \frac{5x}{x - 1} = x$$

para todos los valores posibles de x.

---

* Toda ecuación en la cual, mediante una cierta operación matemática, se ha introducido una raíz adicional se llama a veces *ecuación redundante*.

† Toda ecuación que, a causa de una cierta operación matemática, tiene menos raíces que la original se llama a veces *ecuación defectiva*.

Solución: Primeramente, eliminamos fracciones multiplicando por el MCD, $2(x-1)$,

$$(2x+5)(x-1)-(5x)(2)=(x)(2)(x-1),$$

o

$$2x^2+3x-5-10x=2x^2-2x.$$

Reduciendo términos semejantes, tenemos

$$-7x-5=-2x$$

Sumando $2x+5$ a ambos miembros, tenemos $-5x=5$, y dividiendo por -5, obtenemos $x=-1$. Este resultado debe verificarse substituyendo $x=-1$ en la ecuación original.

EJEMPLO 2. Resuélvase la ecuación $2\cos\theta+3=2$ para todos los valores de θ entre 0 y 2π.

Solución: Si bien esta ecuación no es algebraica y, por tanto, no es lineal, es lineal en $\cos\theta$ y puede resolverse respecto a esta función como si fuera lineal; en seguida pueden determinarse los valores de θ. El problema 6 de la sección 6.13 es un ejemplo sencillo de este tipo.

$$\begin{aligned} 2\cos\theta+3&=2\\ 2\cos\theta&=-1\\ \cos\theta&=-\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\theta=2\pi/3$ ó $4\pi/3$, puesto que $P(\theta)$ debe estar en el segundo o tercer cuadrante, por ser negativa su abscisa x.

EJEMPLO 3. Resuélvase respecto a r la ecuación

$$s=\frac{a-rl}{1-r}$$

Solución. Una ecuación como la propuesta, en la cual algunas o todas las cantidades conocidas son letras, se llama ecuación *literal*. Cada paso de la solución debe justificarse.

$$s=\frac{a-rl}{1-r},$$

$$s(1-r)=a-rl,$$

$$s - rs = a - rl,$$
$$rl - rs = a - s,$$
$$r(l - s) = a - s,$$
$$r = \frac{a - s}{l - s}, \quad \text{si} \quad s \neq l.$$

Problemas

Determínense los ceros de las funciones f definidas mediante las expresiones siguientes para $f(x)$.

1 $2x + 4$

2 $-5x + 10$

3 $10 - 12x$

4 $6x - 9$

5 $8x + 24$

6 $5x - 17$

Resuélvanse las siguientes ecuaciones lineales y verifíquense los resultados.

7 $4x - 2 = 6x + 12$

8 $3x + 7 = 5x - 13$

9 $5 + 2(3 - x) = 4 + 2(x - 2) + 5x$

10 $x^2 - 7x + 10 = x^2 + 5x - 6$

11 $\dfrac{3x + 5}{12} - \dfrac{4 - x}{6} = \dfrac{x - 2}{3}$

12 $\dfrac{3x - 6}{5} = \dfrac{2x - 5}{10} + \dfrac{x - 4}{2}$

13 $\dfrac{3x + 2}{x - 1} - \dfrac{6}{5} = 0$

14 $\dfrac{2}{6x - 7} - \dfrac{5}{3x - 4} = 0$

Utilizando la tabla 1 cuando sea necesario, determínense los valores de θ entre 0 y 2π que satisfacen las ecuaciones siguientes:

15 $2 \operatorname{sen} \theta - \sqrt{3} = 0$

16 $\dfrac{\cos\theta - 2}{3} = 3 - \dfrac{\cos\theta + 9}{3}$

17 $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = 2$

18 $\operatorname{sen} 3\theta = 2 - 3 \operatorname{sen} 3\theta$

19 $\dfrac{4\cos(2\theta + \pi/6)}{5} = \dfrac{4 + \cos(2\theta + \pi/6)}{10}$

20 $\dfrac{1}{2\tan(\theta + \pi)} = \dfrac{2}{\tan(\theta + \pi)} + 1$

Resuélvanse las ecuaciones siguientes con respecto a las letras que en cada caso se indican.

21 $ax - bx = c$, para x

22 $ay + by = c + dy$, para y

23 $A = \frac{1}{2}bh$, para b

24 $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$, para b_1

25 $l = a + (n - 1)d$, para d

26 $l = a + (n - 1)d$, para n

27 $S = \dfrac{a - rl}{1 - r}$, para l

28 $S = \dfrac{a - rl}{1 - r}$, para a

29 $S = \frac{n}{2}(a + l)$, para l

30 $S = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$, para v_0

31 $\frac{y}{\tan\theta_1} = \frac{a + y}{\tan\theta_2}$, para y

32 $\tan\theta_1\left(\frac{x}{\tan\theta_2} + a\right) = x$, para x

En los problemas 33 a 40 bosquéjese la gráfica de la función lineal $f : x \longrightarrow y$ si $f(x)$ está dado por las expresiones siguientes:

33 $f(x) = 2x - 7$

34 $f(x) = (x/3) + 5$

35 $f(x) = -4x + 8$

36 $f(x) = 6 - (x/2)$

37 $f(x) = 4$

38 $f(x) = 3x + 6$

39 $f(x) = 20x - 30$

40 $f(x) = -(x/50) + (1/100)$

En los siguientes problemas, *léase el enunciado cuidadosamente*, represéntese una de las magnitudes desconocidas por x y exprésense todas las otras en términos de x. Determínense dos expresiones que sean iguales, fórmese la ecuación y resuélvase ésta. Compruébense todos los resultados.

41 La edad de un hombre es 42 años y la de su hijo, 12. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble de la del hijo?

42 La cifra de las decenas de un número es 3 unidades menos que la de las unidades. Si el número se divide por la suma de sus cifras, el cuociente es 4 y el residuo 2. ¿Cuál es el número?

Indicación: Si x es la cifra de las unidades, $x - 3$ será la de las decenas y el número puede escribirse $10(x - 3) + x$.

43 Un hombre deja $\frac{1}{2}$ de sus bienes a su esposa, $\frac{1}{6}$ a su hija y el resto, \$15 000, a su hijo. ¿Cuál es el total de los bienes?

44 A comienza a andar por un camino a 5 kilómetros/hora; dos horas después B parte en la misma dirección a 5,5 kilómetros/hora. ¿A qué distancia del punto de partida alcanzará B a A?

Indicación: velocidad $\times$ tiempo $=$ distancia.

45 A demora 3 horas en hacer cierto trabajo, en tanto que B demora 4 horas. ¿Cuánto demorarán ambos trabajando juntos?

Indicación: Si $x =$ número de horas que demoran en hacer el trabajo juntos, $1/x$ será la cantidad de trabajo hecha por ambos en 1 hora.

46 La suma de dos enteros es 88. Si el mayor se divide por el menor el cuociente es 5 y el residuo 10. ¿Cuáles son los números?

8.2. Progresiones aritméticas

Consideremos la función lineal definida por la ecuación $f(x) = 2x - 1$, siendo el dominio de la función el conjunto de los enteros positivos. En este caso,

la función toma los valores $1, 3, 5, \ldots, 2n - 1$. Análogamente, si el dominio de la función definida por $y \doteq 2^x$ es el conjunto de los enteros positivos, los valores funcionales correspondientes son $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ Los dos conjuntos de valores funcionales indicados son ejemplos de *sucesiones*. En general, una sucesión es el recorrido de una función cuyo dominio es todo o parte del conjunto de los enteros positivos. El valor funcional del entero 1 es el primer término de la sucesión; el de 2 es el segundo término; el de 3, el tercero; etc. En esta forma quedan determinados en forma específica el primer, segundo, tecer, etc., valor de la sucesión. Si el dominio es todo el conjunto de los enteros positivos la sucesión es *infinita*, en tanto que si el dominio consta sólo de los n primeros enteros positivos, la sucesión es *finita*. En esta sección estudiaremos un tipo bien específico de sucesión.

DEFINICIÓN 8.2. *Una progresión aritmética es una sucesión en la cual cada término después del primero se obtiene sumando al término precedente el mismo número fijo llamado diferencia común.*

DEFINICIÓN ALTERNA 8.2. *Una* progresión aritmética *es una sucesión definida por una función lineal.* (Véase problema 33.)

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. La sucesión finita 2, 5, 8, 11, 14 es una progresión aritmética de diferencia común 3. La función que define esta sucesión es $f: x \to 3x - 1$ y su dominio es $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. La sucesión infinita $7, 2, -3, -8, -13, \ldots$ es una progresión aritmética de diferencia común -5; $f(x) = 12 - 5x$

Utilicemos la siguiente notación general para las progresiones aritméticas:

t_1, el primer término,
d, la diferencia común,
n, el número de términos,
t_n, el último o n-ésimo término.

Así, en el ejemplo ilustrativo 1, $t_1 = 2$, $d = 3$, $n = 5$ y $t_n = 3n - 1$, en tanto que en el ejemplo ilustrativo 2, $t_1 = 7$, $d = -5$ y $t_n = 12 - 5n$. Nótese que el n-ésimo término representa en realidad la función que define a la sucesión.

En general, los primeros n términos de una progresión aritmética pueden representarse por

$$t_1,\ t_1 + d,\ t_1 + 2d,\ t_1 + 3d, \ldots, t_1 + (n - 1)d.$$

El último valor da además la expresión del n-ésimo término en función de t_1, n y d,

$$t_n = t_1 + (n - 1)d. \tag{8.2}$$

Ejemplo 1. Determínese el 25º término de la progresión aritmética 2, 5, 8, 11, ...

Solución: En esta progresión, puesto que $t_1 = 2$ y $d = 3$, tenemos

$$t_{25} = t_1 + (n-1)d = 2 + (24)3 = 74.$$

Ejemplo 2. Si el 6º término de una progresión aritmética es 27 y el 12º es 48, determínese el primer término.

Solución: Tenemos las dos relaciones

$$t_6 = 27 = t_1 + 5d \quad \text{y} \quad t_{12} = 48 = t_1 + 11d.$$

Restando miembro a miembro la primera ecuación de la segunda, obtenemos $21 = 6d$, o

$$d = \tfrac{7}{2}.$$

Substituyendo este valor en la primera ecuación, tenemos

$$27 = t_1 + 5(\tfrac{7}{2}),$$

y así encontramos

$$t_1 = 9\tfrac{1}{2}.$$

Ejemplo 3. Determínese la progresión aritmética de 6 términos si el primero es $\frac{2}{3}$ y el último, $7\frac{1}{3}$.

Solución: Aplicando la ec. (8.2), tenemos

$$t_6 = \tfrac{22}{3} = \tfrac{2}{3} + 5d,$$

y resolviendo,

$$d = \tfrac{4}{3}.$$

Por tanto, la progresión pedida es

$$\tfrac{2}{3},\quad 2,\quad \tfrac{10}{3},\quad \tfrac{14}{3},\quad 6,\quad \tfrac{22}{3}.$$

A menudo, interesa calcular la suma de los términos de una progresión aritmética finita. Haciendo

$$S_n = t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + \cdots + [t_1 + (n-1)d] \tag{8.3}$$

y escribiendo esta expresión en orden inverso, tenemos

$$S_n = [t_1 + (n-1)d] + [t_1 + (n-2)d] + \cdots + (t_1 + d) + t_1.$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades y agrupando los términos correspondientes, obtenemos

$$2S_n = [2t_1 + (n-1)d] + [2t_1 + (n-1)d] + \\ [2t_1 + (n-1)d] + \cdots + [2t_1 + (n-1)d].$$

Puesto que en el segundo miembro hay n términos, $2t_1 + (n-1)d$, la expresión se reduce a

$$2S_n = n[2t_1 + (n-1)d],$$

o

$$S_n = \frac{n[2t_1 + (n-1)d]}{2}. \tag{8.4}*$$

Recordando que

$$t_n = t_1 + (n-1)d,$$

(8.4) puede también escribirse

$$S_n = \frac{n(t_1 + t_n)}{2}. \tag{8.5}$$

Ejemplo 4. Determínese la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética $-15, -13, -11, \ldots$

Solución: Puesto que $t_1 = -15$, $d = 2$ y $n = 30$, tenemos

$$S_{30} = \frac{30[2(-15) + (30-1)2]}{2} = \frac{30(-30+58)}{2} = 420.$$

Ejemplo 5. La suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética es 270. Determínese el primer término y la diferencia común si el 15º término es 39.

---

* Esta relación puede también demostrarse por inducción completa o matemática. (Véase problema 17, sección 13.1.)

Solución: Aplicando (8.5), obtenemos

$$270 = \frac{15(t_1 + 39)}{2}.$$

y despejando t_1

$$15t_1 + 585 = 540, \quad 15t_1 = -45, \quad t_1 = -3.$$

Puesto que $t_{15} = t_1 + (n - 1)d$,

$$39 = -3 + 14d, \quad \text{o} \quad d = 3.$$

Problemas

Escríbanse los tres términos siguientes en cada una de las progresiones aritméticas que siguen y determínense t_n y S_n.

1. $1, 4, 7, \ldots$ (9 términos)
2. $27, 25, 23, \ldots$ (30 términos)
3. $10, 7, 4, \ldots$ (15 términos)
4. $-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$ (8 términos)

En los problemas 5 a 11 se dan tres de los elementos t_1, t_n, n, d y S_n de la progresión aritmética. Determínense en cada caso los elementos restantes.

5. $t_1 = 2, d = 4, n = 12$
6. $t_1 = 3, n = 4, t_n = 12$
7. $t_1 = -2, n = 14, S_n = 20$
8. $d = 3, n = 5, t_n = 14$
9. $d = \frac{1}{2}, n = 14, S_n = 30$
10. $t_1 = 4, d = 4, S_n = 40$
11. $t_1 = 6, d = 5, t_n = 36$

12. Determínese k de modo que $8k + 4$, $6k - 2$ y $2k - 7$ formen una progresión aritmética.
13. ¿Cuáles son los tres primeros términos de una progresión aritmética si el 9º término es 16 y el 40º es 47?
14. El 18º y el 52º términos de una progresion aritmética son 3 y 173, respectivamente. Determínese el 25º término.
15. Determínese la suma de los enteros pares entre 12 y 864, ambos inclusive
16. Determínese la suma de los enteros impares entre 27 y 495, ambos inclusive.
17. ▶ Los términos comprendidos entre dos términos cualesquiera de una progresión aritmética se llaman *medios aritméticos* entre estos dos términos. Intercálense 4 medios aritméticos entre -1 y 14.
18. Intercálense 5 medios aritméticos entre 14 y 86.
19. Intercálense 3 medios aritméticos entre -18 y 4.
20. ▶ Intercálese un medio aritmético entre 24 y 68. Este número se llama *media aritmética* de los dos números.

21 Determínese la media aritmética de (a) 7 y -15, (b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{3}$.

▶22 Una *progresión armónica* es una sucesión de números cuyos recíprocos están en progresión aritmética. Intercálense dos medios armónicos entre 4 y 8.

23 Para una sucesión cualquiera de términos que forman una progresión aritmética, demuéstrese que los productos obtenidos multiplicando cada término por una constante forman también una progresión aritmética.

24 Si a^2, b^2 y c^2 forman una progresión aritmética demuéstrese que $a + b$, $c + a$ y $b + c$ forman una progresión armónica

25 ¿Cuántos números entre 10 y 200 son divisibles exactamente por 7? Determínese su suma.

26 ¿Cuántos números entre 28 y 400 son divisibles exactamente por 11? Determínese su suma.

27 Si un reloj da el número correspondiente de campanadas a cada hora, ¿cuántas campanadas dará en una semana?

28 Un hombre toma un empleo con un sueldo de $9.600 al año en el entendido de que recibirá un aumento de $650 cada seis meses. ¿Cuál será su sueldo después de haber trabajado 15 años? ¿Cuánto habrá ganado en todo ese tiempo?

29 La fuerza de gravedad hace caer un cuerpo 4,9 metros durante el primer segundo; 14,7 durante el segundo; 24,5 el tercero, etc. ¿Cuánto caerá el cuerpo en 10 segundos?

30 Un hombre compró una casa a comienzos de 1945 en $10.000. Si aumenta de valor $500 por año, ¿cuánto costará al final de 1959?

31 Un equipo costó a una fábrica $29.000. Si la depreciación es de 15% el primer año; 13,5% el segundo año; 12% el tercero y así sucesivamente, ¿cuál será el valor del equipo al cabo de 10 años si todos los porcentajes se calculan a base del costo inicial?

32 Una pieza de antigüedad que originalmente valía $1.600 es valuada en $5.660 después de 80 años. Determínese su valor al final de cada década (período de 10 años) si el aumento de valor en cada década es $125 más que el aumento en la década anterior.

33 Aplicando la ec. (8.2), demuéstrese que las dos definiciones de progresión aritmética son equivalentes.

8.3. La función cuadrática

El segundo tipo de función algebraica que generalmente se presenta es el que está definido por una ecuación de segundo grado.

DEFINICIÓN 8.3. *La función f, definida por la expresión de segundo grado*

$$f = \{(x, y) | y = ax^2 + bx + c\}, \qquad (8.6)$$

se llama función cuadrática.

La gráfica de una función de este tipo fue considerada brevemente en el ejemplo 2, sección 5.2. Veamos otro ejemplo a continuación

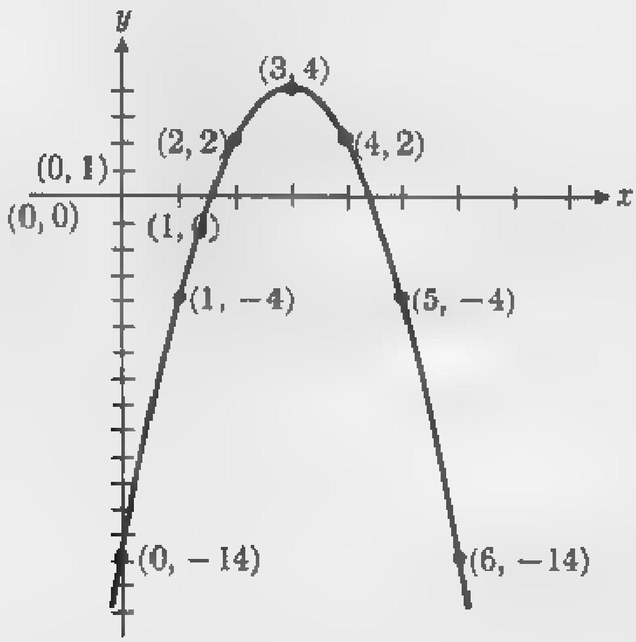
EJEMPLO. Trácese la gráfica de la función cuadrática

$$q : x \to -2x^2 + 12x - 14.$$

Solución: La gráfica (fig. 8-1) se puede trazar tabulando un número suficiente de puntos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación $y = \quad 2x^2 + 12x - 14$.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	-14	-4	2	4	2	-4	-14

Comparando esta curva con la de la fig. 5-5, vemos que ambas tienen la misma forma general. La gráfica de una función cuadrática es siempre de esta forma y se llama *parábola*. Cuando el coeficiente de x^2 es positivo, la curva es cóncava hacia arriba (se abre hacia arriba) y cuando el coeficiente de x^2 es negativo, es cóncava hacia abajo. (Esta proposición no la demostraremos.) Como comprobación, compárense los dos ejemplos.



8-1

La gráfica de la función cuadrática general puede bosquejarse mediante el procedimiento más directo de expresar la función cuadrática en términos del cuadrado de una función lineal. Consideremos

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{8.7}$$

Sacando factor común a y agrupando los términos en x^2 y x, tenemos

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a}\right].$$

Recordando la ec. (3.13), debemos sumar $(b/2a)^2$ a $x^2 + (b/a)x$ para completar un cuadrado perfecto; luego, sumando y restando $(b/2a)^2$ dentro de los paréntesis angulares,

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right],$$

y simplificando, tenemos

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \tag{8.8}$$

Puesto que $(x + b/2a)^2 \geqslant 0$, la expresión entre paréntesis angulares toma su valor mínimo cuando $x = -b/2a$. Si $a > 0$, también la función toma su valor mínimo cuando $x = -b/2a$; este valor de la función, $(4ac - b^2)/4a$ se llama su *mínimo*. Si $a < 0$, la función toma su valor máximo cuando $x = -b/2a$; este valor se llama su *máximo* y es también igual a $(4ac - b^2)/4a$. En ambos casos, el punto

$$\left[\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$$

se llama *vértice* de la parábola. Una vez ubicados este punto y uno o dos puntos adicionales, puede bosquejarse la gráfica. Generalmente, es más sencillo completar el cuadrado en cada caso que utilizar las fórmulas empleadas en esta explicación.

EJEMPLO 2. Determínese el vértice de la parábola representada por la ecuación

$$y = x^2 - x - 6.$$

Compárese con el ejemplo 2, sección 5.2.

Solución: Agrupando los dos primeros términos del segundo miembro y completando el cuadrado, obtenemos

$$y = (x^2 - x) - 6 = (x^2 - x + \tfrac{1}{4}) - 6 - \tfrac{1}{4} = (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{25}{4}.$$

El vértice es $(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4})$. Puesto que $a = 1$, que es positivo, el valor mínimo de la función es $\frac{25}{4}$ y ocurre para $x = \frac{1}{2}$. La gráfica de esta función aparece en la figura 5-5.

PROBLEMAS

Para cada una de las funciones f, en que $f(x)$ está dado por las expresiones siguientes, determínese el máximo o mínimo y trácese la gráfica.

1 $x^2 + 6x + 5$ 2 $x^2 + x - 6$

3 $2x^2 + 5x - 12$ 4 $-2x^2 + 11x - 15$

5 $6x^2 - 17x + 5$ 6 $-2x^2 + 5x + 8$

7 $x^2 + 6x + 11$ 8 $-3x^2 + 5x - 4$

9 Determínense dos números cuya suma sea 16 y cuyo producto sea máximo

Indicación: Sea x uno de los números y $16 - x$ el otro; el producto y puede expresarse en función de x, a saber,

$$y = x(16 - x) = 16x - x^2.$$

10 Divídase 40 en dos partes de modo que la suma de los cuadrados de estas partes sea un mínimo.

11 Un hombre que dispone de 160 metros de cerco desea cercar una superficie de forma rectangular. ¿Qué dimensiones debe tener esta superficie para que su área sea un máximo?

12 Un hombre que dispone de 160 metros de cerco desea cercar una superficie de forma rectangular Si uno de los lados no necesita cerco, ¿cuáles deben ser las dimensiones para que el área sea máxima?

8.4. Resolución de la ecuación cuadrática

Estamos ahora en situación de determinar las raíces de una ecuación cuadrática cualquiera Recordando la definición de ceros de una función (sección 5.2), nos interesa determinar las abscisas de los puntos donde la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ cruza o toca el eje x Esto puede hacerse gráficamente trazando la curva; por ejemplo, según la fig 5-5 las raíces de $x^2 - x - 6$ son -2 y 3; asimismo, de la fig 8-1 obtenemos que las raíces de $-2x^2 + 12x - 14$ son aproximadamente 1,3 y 4,7 Estos valores pueden comprobarse, por supuesto, substituyéndolos en la función original igualada a cero.

Existen métodos más precisos para determinar los ceros de la función $f: x \to ax^2 + bx + c$. En la determinación de los ceros de esta función o, equivalentemente, en la resolución de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0), \tag{8.9}$$

es posible que podamos descomponer en factores el primer miembro. Este método, llamado *método de la descomposición en factores*, está basado en el hecho de que cada factor puede ser cero si el producto es cero (Teorema 2.5).

EJEMPLO 1. Resuélvase la ecuación $x^2 - 7x + 10 = 0$ mediante la descomposición en factores.

Solución: Puesto que $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$, [véase ec. (3.14)], la ecuación puede escribirse

$$(x - 5)(x - 2) = 0.$$

Queremos encontrar un valor que, al substituirlo en lugar de x en el primer miembro, el producto sea cero. Podemos encontrar estos valores resolviendo

$$x - 5 = 0 \quad \text{y} \quad x - 2 = 0.$$

De aquí encontramos $x = 5$ ó $x = 2$, siendo ambos valores raíces de la ecuación original. Todos los resultados deben comprobarse.

EJEMPLO 2. Resuélvase la ecuación $2 \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$ para todos los valores posibles de θ entre 0 y 2π.

Solución: Al igual que la del ejemplo 2, sección 8.1, esta ecuación no es algebraica pero puede ser considerada como ecuación cuadrática en $\operatorname{sen} \theta$. Descomponiendo en factores el primer miembro, obtenemos

$$2 \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta - 1 \equiv (2 \operatorname{sen} \theta - 1)(\operatorname{sen} \theta + 1)$$

En esta forma, tenemos las dos ecuaciones

$$2 \operatorname{sen} \theta - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta + 1 = 0$$

y, despejando en ellas $\operatorname{sen} \theta$, tenemos

$$\operatorname{sen} \theta = \tfrac{1}{2} \quad \text{ó} \quad -1.$$

Puesto que $\operatorname{sen} \theta$ es positivo en el primero y segundo cuadrantes, hay dos valores de θ entre 0 y 2π para los cuales $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$; luego

$$\theta = \pi/6, \quad 5\pi/6 \quad \text{ó} \quad 3\pi/2.$$

PROBLEMAS

A partir de las gráficas de las funciones enumeradas en los problemas 1 a 8, sección 8.3, indíquense las raíces de las ecuaciones correspondientes. Compruébense estas raíces substituyéndolas en las ecuaciones originales.

Resuélvanse los problemas 9 a 26 mediante la descomposición en factores y compruébense por substitución. En las ecuaciones que contienen funciones circulares, indíquense todas las raíces entre 0 y 2π.

9 $9x^2 - 16 = 0$ 10 $2x^2 - 5x - 12 = 0$

11 $4\,\mathrm{sen}^2\theta = 1$

12 $4\cos^2\theta = 3$

13 $6x^2 - 5x = 50$

14 $2x^2 - 2 = x - 4x$

15 $1 - \cos^2\theta = \cos^2\theta$

16 $\tan\theta(2\,\mathrm{sen}\,\theta - \sqrt{3}) = 0$

17 $3x^2 - x = 10$

18 $4x^2 - 12x + 9 = 0$

19 $2\cot\theta\cos\theta - \cot\theta = 0$

20 $2\tan^2\theta + \tan\theta = 0$

21 $x^2 + 2ax = b^2 - a^2$

22 $8x^2 + 14ax + 3a^2 = 0$

23 $2\,\mathrm{sen}^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta = 1$

24 $2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = 0$

25 $\dfrac{x-2}{x+3} - 3 = \dfrac{4(x+3)}{x-2}$

26 $(x-2)(x+3) = 6$

En algunos casos, la descomposición en factores de la expresión cuadrática puede presentar dificultades; aún más, en muchos casos puede sencillamente no haber factores reales. En consecuencia, el método más útil para resolver una ecuación cuadrática es mediante la llamada *fórmula cuadrática*. Obtenemos esta fórmula completando el cuadrado al igual que en la determinación del vértice de la parábola.

TEOREMA 8.1. *Las dos raíces de la ecuación cuadrática*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0), \tag{8.9}$$

son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{8.10}$$

Demostración: Si dividimos por el coeficiente de x^2 en la ec. (8.9) y pasamos el término constante al segundo miembro de la ecuación, tenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Podemos completar el cuadrado en el primer miembro sumando $b^2/4a^2$ en ambos miembros de la ecuación,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

o

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada, resulta

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{o} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tomando en un caso el signo más y en el otro el signo menos, obtenemos las dos raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, lo cual completa la demostración. El lector debe verificar que cada una de estas raíces es en realidad una solución, substituyéndolas en la ec. (7.9).

Si bien cualquier ecuación cuadrática puede resolverse por el método de *completar el cuadrado* que se emplea para obtener esta formula, es mucho más frecuente la substitución directa de los valores particulares de a, b y c en la ec. (7.10) por ser este procedimiento más eficaz. Considérense los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3. Resuélvase la ecuación $4x^2 + 5x = 21$.

Solución: Pasando todos los términos al primer miembro para dar a la ecuación la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y comparando, tenemos $a = 4$; $b = 5$ y $c = -21$. Reemplazando estos valores en la ec. (8.10), resulta

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(4)(-21)}}{2(4)},$$

y simplificando

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 336}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{-5 \pm 19}{8}.$$

Luego, eligiendo en un caso el signo más y en el otro el signo menos,

$$x = \tfrac{7}{4} \quad \text{ó} \quad -3.$$

Ambos resultados deben verificarse substituyéndolos en la ecuación original. El hecho de que la cantidad subradical sea un cuadrado perfecto indica que las raíces son racionales; luego la ecuación podía haberse resuelto por descomposición en factores. Así,

$$4x^2 + 5x - 21 \equiv (4x - 7)(x + 3).$$

Ejemplo 4 Resuélvase $\cos^2\theta + 5 \operatorname{sen}\theta + 2 = 0$ para todos los valores de θ entre 0 y 2π.

Solución: Puesto que $\cos^2\theta$ puede expresarse como $1 - \operatorname{sen}^2\theta$, podemos escribir la ecuación en términos únicamente de $\operatorname{sen}\theta$; así,

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta + 5 \operatorname{sen}\theta + 2 = 0,$$
$$\operatorname{sen}^2\theta - 5 \operatorname{sen}\theta - 3 = 0.$$

Considerando a $\operatorname{sen}\theta$ como la variable y utilizando la ec. (8.10), encontramos $a = 1$, $b = -5$ y $c = -3$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 12}}{2} = \frac{5 \pm 6{,}0828}{2},$$

o

$$\operatorname{sen}\theta = 5{,}5414 \quad \text{ó} \quad -0{,}5414.$$

Puesto que $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$, consideramos sólo el valor $-0{,}5414$, que da para θ un valor entre π y $3\pi/2$ y otro entre $3\pi/2$ y 2π. Utilizando la tabla I, tenemos que $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}5414$ corresponde a $\alpha = 0{,}5721$. Luego

$$\theta = 3{,}1416 + 0{,}5721 = 3{,}7137$$

o

$$6{,}2832 - 0{,}5721 = 5{,}7111.$$

Ejemplo 5. Resuélvase la ecuación $x^2 - 4x + 6 = 0$.

Solución: Utilizando la fórmula cuadrática, ec. (8.10), con $a = 1$, $b = -4$ y $c = 6$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{-2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}i. \end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene raíces reales. En la sección 10.5 haremos algunos comentarios adicionales acerca de raíces imaginarias.

El método general para resolver una ecuación cuadrática puede resumirse así:

1. Trátese de resolver la ecuación mediante la descomposición en factores.
2. Si este método falla, ya sea porque los factores no se evidencian de inmediato o porque estos no existen como factores racionales, aplíquese la fórmula (8.10).

Problemas

Resuélvanse las ecuaciones de los problemas 1 a 19 aplicando la fórmula cuadrática. Si la ecuación contiene funciones circulares determínense todos los valores entre 0 y 2π. Verifíquense todos los resultados.

1 $2x^2 + 5x - 12 = 0$

2 $4x^2 - 2x = 7$

3 $x^2 + x - 1 = 0$

4 $2x^2 + x - 12 = 0$

5 $\tan^2\theta - 3\sec\theta + 3 = 0$

Indicación: $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$.

6 $2\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}\theta = 0$

7 $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

8 $6x^2 + 17x + 12 = 0$

9 $(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$

10 $4\operatorname{sen}^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

11 $3\sec^2\theta + \tan\theta - 5 = 0$

12 $x^2 - 2x + 1 = 4a^2$

13 $\dfrac{x-1}{x^2-9} - \dfrac{3x+5}{x+3} = \dfrac{x+3}{x-3}$

14 $\cot 2\theta = 2 + \tan 2\theta$

15 $4\operatorname{sen}^2 2\theta + 2\cos 2\theta = 3$

16 $6ax^2 - 2bx + 3b = 9ax$

17 $s = v_0x - gx^2/2$

18 $\tan 2\theta + 5 = 3\sec^2 2\theta$

19 $\dfrac{1}{x^2+3x+2} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{x^2-1}$

20 El producto de dos enteros positivos consecutivos es 72. Determínense estos enteros.

21 La suma de un número y su recíproco es 34/15. Determínese el número.

22 Un hombre que está viajando 40 kilómetros encuentra que, si aumentara la velocidad en un kilómetro por hora, haría el viaje en dos horas menos. ¿A cuántos kilómetros por hora hizo efectivamente el viaje?

23 Si las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son $(6 - x)$, $(13 - x)$ y $(14 - x)$, determínese x.

24 ¿En cuánto debe reducirse un radio de 24 cm para disminuir el área del círculo en 49π cm^2?

25 Un jardín rectangular de 30 metros de largo por 24 de ancho tiene a su alrededor una vereda de ancho uniforme. Si el área de la vereda es un cuarto de la del jardín, determínese el ancho de la vereda.

26 Dos hombres, trabajando juntos, pueden hacer un trabajo en 20 días. Trabajando solo, uno de los hombres emplearía 9 días más que lo que demoraría el otro en hacer el trabajo. ¿Cuánto tardaría cada uno trabajando separadamente?

8.5. Desigualdades

Puesto que la mayor parte de las desigualdades consideradas en este libro contienen expresiones algebraicas de primero o segundo grado, parece apropiado estudiarlas en este capítulo. Recomendamos al estudiante repasar los axiomas de orden y los teoremas básicos de la sección 4.1.

La proposición de que una expresión algebraica es mayor que o menor que otra se llama *desigualdad*. Al igual que para las igualdades, existen dos tipos generales de desigualdades en matemáticas, la desigualdad condicional o inecuación,

correspondiente a la igualdad condicional o ecuación, y la desigualdad absoluta, que corresponde a la identidad

DEFINICIÓN 8.4. *Una desigualdad se llama* desigualdad absoluta *si es verdadera (se satisface) para todos los valores permisibles de las variables que aparecen en ella*

Si bien a menudo una desigualdad puede ser vedadera para todo un conjunto de valores, si no es verdadera para todos los valores permisibles no es una desigualdad absoluta.

DEFINICIÓN 8.5. *Una desigualdad se llama* desigualdad condicional *o* inecuación *si no es verdadera para todos los valores permisibles de las variables que aparecen en ella*

EJEMPLO ILUSTRATIVO La desigualdad $a^2 + b^2 + 1 > 0$ es una desigualdad absoluta; también lo es $-4 < 3$; pero $2x - 6 > 0$ es una desigualdad condicional o inecuación, puesto que es verdadera sólo para los valores de x mayores que 3. También, sen $\theta < 0$ es condicional porque se satisface sólo si $P(\theta)$ está en el tercero o cuarto cuadrante

Tal como en el caso de las ecuaciones, hay ciertas propiedades importantes que deben recordarse al trabajar con desigualdades. Las demostraciones de los teoremas siguientes son consecuencia directa de los axiomas y teoremas de la sección 4.1

TEOREMA 8.2. *El sentido de una desigualdad no cambia si se aumentan o disminuyen ambos miembros en una misma cantidad.*

Demostración: Esto es consecuencia directa del Axioma O3, pudiendo c ser positivo o negativo. La utilidad de esta propiedad está en el hecho de que puede pasarse un término de un miembro al otro de una desigualdad, cambiando el signo del término y sin que por eso cambie el sentido de la desigualdad.

TEOREMA 8.3. *El sentido de una desigualdad no cambia si se multiplican o dividen ambos miembros por una misma cantidad* positiva.

Esto es el Axioma O4 expresado en otras palabras.

TEOREMA 8.4. *El sentido de una desigualdad se invierte si se multiplican o dividen ambos miembros por la misma cantidad* negativa.

Esto es el Teorema 4.7 expresado en otras palabras.

Puesto que limitaremos nuestra explicación a desigualdades con una variable, nos interesarán aquellas desigualdades que pueden escribirse $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$. Consideraremos, en primer lugar, desigualdades condicionales. Para resolver estas desigualdades debemos determinar el conjunto de valores de x que satisfacen la desigualdad. Si $f(x)$ es lineal o cuadrática, este conjunto puede ser determinado algebraica o gráficamente

EJEMPLO 1. Resuélvase

$$\frac{x}{3} - 2 < \frac{5x + 9}{2}$$

tanto algebraica como gráficamente.

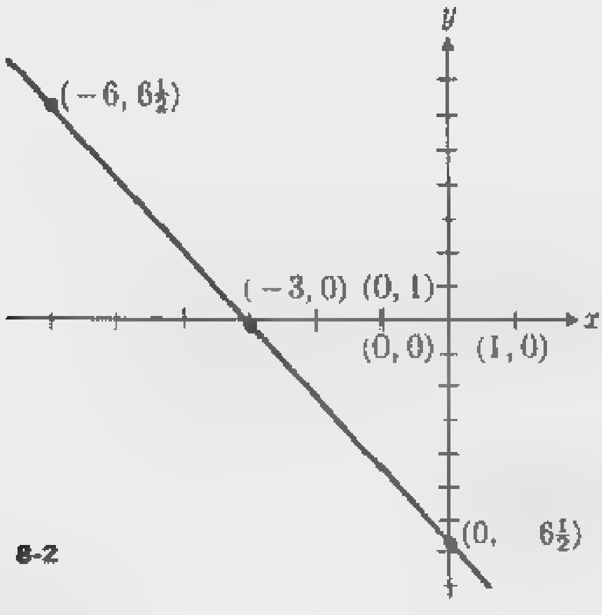
Solución algebraica: Multiplicando ambos miembros por 6, tenemos

$$2x - 12 < 15x + 27.$$

Ordenando y reduciendo términos semejantes, $-13x < 39$, y dividiendo por -13, obtenemos $x > -3$; luego, la solucion es $\{x|x > -3\}$.

Solución gráfica: Pasando todos los términos al primer miembro, tenemos

$$\frac{x}{3} - 2 - \frac{5x + 9}{2} < 0.$$



8-2

Designando el primer miembro por $f(x)$, obtenemos

$$f(x) = \frac{2x - 12 - 15x - 27}{6}$$

$$= \frac{-13x - 39}{6}$$

Por la gráfica de $y = f(x)$ en la fig 7-2, que puede trazarse fácilmente a partir

de la tabla que sigue, se ve claramente que la inecuación se satisface para $x > -3$, puesto que, para estos valores de x, $y = f(x)$ está bajo el eje x, o sea, $f(x) < 0$. En el caso de inecuaciones cuadráticas, el método más empleado es el gráfico

x	0	-3	-6
y	$-6\frac{1}{2}$	0	$6\frac{1}{2}$

EJEMPLO 2. ¿Para qué valores de x se satisface $x^2 - x - 6 > 0$?

Solución: Descomponiendo la expresión en factores, tenemos

$$x^2 - x - 6 \equiv (x - 3)(x + 2).$$

Puesto que el producto de dos factores es positivo sólo si ambos son positivos o ambos negativos (problema 7, sección 4.1), $x - 3$ y $x + 2$ deben ser ambos mayores que cero o ambos menores que 0. Así, resulta

$$\begin{Bmatrix} x - 3 > 0 \\ \text{y} \\ x + 2 > 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{Bmatrix} x > 3 \\ \text{y} \\ x > -2 \end{Bmatrix} \text{ serán ambas verdaderas si } x > 3,$$

y

$$\begin{Bmatrix} x - 3 < 0 \\ \text{y} \\ x + 2 < 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{Bmatrix} x < 3 \\ \text{y} \\ x < -2 \end{Bmatrix} \text{ serán ambas verdaderas si } x < -2.$$

Luego, la solución de la inecuación es

$$\{x | x > 3 \text{ ó } x < -2\}.$$

Esto puede comprobarse gráficamente. A menudo es útil probar algunos elementos del conjunto para el cual la desigualdad se cumple; si bien esto no garantiza que se ha obtenido la solución completa correcta, constituye una comprobación útil.

EJEMPLO 3. ¿Para qué valores de x se satisface $-2x^2 + 12x - 14 > 0$?

Solución: Puesto que el primer miembro no puede descomponerse en factores racionales, utilizaremos el método gráfico. En la fig. 8-1 tenemos la gráfica de la función

$$y = f(x) = -2x^2 + 12x - 14,$$

cuyos ceros son aproximadamente 1,6 y 4,4. Luego la desigualdad se satisface para el conjunto $\{x | 1{,}6 < x < 4{,}4\}$.

Si queremos determinar las raíces con mayor precisión, podemos aplicar la fórmula cuadrática a la ecuación $-2x^2 + 12x - 14 = 0$ ó a la ecuación equivalente $x^2 - 6x + 7 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Luego, $x = 4{,}414$ ó $1{,}586$, aproximadamente, y, en consecuencia, la solución puede escribirse

$$\{x | 1{,}586 < x < 4{,}414\}.$$

Ejemplo 4. Determínense los valores de θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, que satisfacen la desigualdad $2\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta < 2$.

Solución: Puesto que $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, podemos expresar todos los términos de la desigualdad en función de $\operatorname{sen}\theta$,

$$2(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + \operatorname{sen}\theta < 2,$$

y simplificando tenemos:

$$2 - 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 2 < 0, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}\theta(1 - 2\operatorname{sen}\theta) < 0.$$

Puesto que el producto de dos cantidades es negativo sólo si una es negativa y la otra positiva (problema 7, sección 4.1), podemos tener

$$\left\{\begin{matrix} \operatorname{sen}\theta < 0 \\ \text{y} \\ 1 - 2\operatorname{sen}\theta > 0 \end{matrix}\right\}, \quad \text{que da} \quad \left\{\begin{matrix} \operatorname{sen}\theta < 0 \\ \text{y} \\ \operatorname{sen}\theta < \frac{1}{2} \end{matrix}\right\},$$

o

$$\left\{\begin{matrix} \operatorname{sen}\theta > 0 \\ \text{y} \\ 1 - 2\operatorname{sen}\theta < 0 \end{matrix}\right\}, \quad \text{que da} \quad \left\{\begin{matrix} \operatorname{sen}\theta > 0 \\ \text{y} \\ \operatorname{sen}\theta > \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}.$$

El primer conjunto se satisface si $\operatorname{sen}\theta < 0$, en tanto que el segundo se satisface si $\operatorname{sen}\theta > \frac{1}{2}$. El conjunto solución es

$$\left\{\theta \middle| \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6} \text{ ó } \pi < \theta < 2\pi\right\}.$$

PROBLEMAS

Determínense los valores de x para los cuales las inecuaciones siguientes se satisfacen. Utilícese el método algebraico o el gráfico.

1 $3x - 27 > 0$

2 $2x - 12 < 0$

3 $2x + 5 > 4x - 9$

4 $5x - 3 < 8x - 12$

5 $x^2 + 2x > 99$

6 $2x^2 + 3x < 14$

7 $6x^2 + x < 1$

8 $6x^2 - x > 35$

9 $x^2 + 2x > 12$

10 $x^2 + 2x + 4 > 0$

11 $x^4 + x^2 < 0$

12 $\dfrac{x-2}{x-5} > 0$

13 $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{5}$

14 $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{1}{3}$

15 $|x - 4| < 1$

Indicación: problema 9, sección 4.2.

16 $|x - 3| > 2$

Indicación: problema 13, sección 4.2.

17 $|2x - 3| \leqslant 4$

18 $\left|\dfrac{x}{3} - 7\right| \leqslant 5$

19 $\left|\dfrac{x}{4} + 6\right| \geqslant \dfrac{1}{2}$

20 $|5x + 1| \geqslant 4$

Determínense los valores de θ que satisfacen las desigualdades siguientes. Limítense las respuestas a valores de θ tales que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

21 $2 \operatorname{sen}^2 \theta < 1$

22 $4 \cos^2 \theta > 1$

23 $\operatorname{sen}^2 \theta > \operatorname{sen} \theta$

24 $\cos^2 \theta < \cos \theta$

25 $\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} < 0$ *Indicación:* problema 14, sección 6.11.

26 $\operatorname{sen} \theta + \cos \dfrac{\theta}{2} > 0$

27 $2 \cos^2 \theta + \operatorname{sen} \theta > 1$

28 $2 \operatorname{sen}^2 \theta + \cos \theta > 2$

29 $\tan^2 \theta + \sec \theta + 1 \geqslant 0$

30 $\sqrt{3} \operatorname{sen}^2 \theta + 2\sqrt{3} > 5 \operatorname{sen} \theta$

31 $\operatorname{sen} \theta > \cos \theta$

Evidentemente, las desigualdades absolutas satisfacen también las propiedades mencionadas en esta sección, además de las de la sección 4.1. El problema común al considerar una desigualdad absoluta es establecer su validez para todos los valores permisibles. Como en toda demostración deberemos partir de una desigualdad válida, a menudo es conveniente suponer verdadera la proposición que queremos demostrar y reducirla a una desigualdad más sencilla y de la cual ya sabemos su validez. Entonces, la demostración consta en realidad de los mismos pasos pero en orden inverso. Este método se ilustra a continuación.

EJEMPLO 5. Demuéstrese que para todo valor real de x, $x^2 + 1 \geq 2x$.

Solución: Queremos encontrar una desigualdad que sepamos verdadera. Restando $2x$ en ambos miembros de

$$x^2 + 1 \geq 2x, \tag{8.11}$$

tenemos

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0, \tag{8.12}$$

que sabemos verdadera, puesto que $x^2 - 2x + 1 \equiv (x - 1)^2$ (Teorema 4.5). Nuestra demostración, entonces, parte de la desigualdad (8.12). Puesto que

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

para todo valor real de x, sumando $2x$ en ambos miembros obtenemos el resultado pedido,

$$x^2 + 1 \geq 2x.$$

EJEMPLO 6. Demuéstrese que la suma de todo número *positivo* y su recíproco es mayor que o igual a 2.

Solución: Sea x un número positivo; queremos demostrar

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \tag{8.13}$$

Si bien ésta no es una desigualdad absoluta, partiremos de una que lo es para establecerla. Dividiendo ambos miembros de la ec. (7.11) por x, que es positivo, obtenemos la desigualdad pedida.

Demostraremos ahora una desigualdad absoluta que contiene funciones circulares.

EJEMPLO 7. Demuéstrese la desigualdad absoluta $3 \operatorname{sen} \theta + 4 \cos \theta \leq 5$.

Solución: Del ejemplo 5, sección 6.9, tenemos

$$3 \operatorname{sen} \theta + 4 \cos \theta = 5 \operatorname{sen} (\theta + \theta_1) \leq 5,$$

puesto que $\operatorname{sen} \alpha \leq 1$ para todo α.

PROBLEMAS

Demuéstrese cada una de las desigualdades siguientes. Las letras en los problemas 1 a 10 representan numeros positivos distintos, y θ, α y β representan números reales cualesquiera. Indíquese cuáles desigualdades son condicionales y cuáles son absolutas.

1 $a^2 + b^2 > 2ab$

2 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

3 $\frac{x + y}{2} > \sqrt{xy}$

4 $\frac{a + b}{2} > \frac{2ab}{a + b}$

5 $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} > x + y$

6 $x^3 + y^3 > x^2y + xy^2$

7 $x^2 + y^2 + z^2 < (x + y + z)^2$

8 $a^2 + 2a + 2 > 0$

9 $|a + b| \leq |a| + |b|$

10 $|a - b| \geq |a| - |b|$

11 $|\operatorname{sen}\theta| + |\csc\theta| \geq 2$

12 $|\cos\theta| + |\sec\theta| \geq 2$

13 $|\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta| \leq 1$

14 $|\operatorname{sen}(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)| \leq 1$

15 $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta \leq \sqrt{2}$

16 $\operatorname{sen}^2\theta + \cot^2\theta \geq 2\cos\theta$

17 $12\operatorname{sen}\theta - 5\cos\theta \leq 13$

18 $4\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta \leq 6$

8.6. Relaciones entre raíces y coeficientes de una ecuación cuadrática

Además de la ec. (8.10), que da los ceros de la función $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$ en términos de los coeficientes, existen otras relaciones entre las raíces y los coeficientes. Si r_1 y r_2 son los ceros de $ax^2 + bx + c$, donde

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\
r_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

tenemos la suma de los dos ceros,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}. \tag{8.15}$$

Análogamente, el producto es

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2},$$

o

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}. \tag{8.16}$$

Puesto que los ceros de la función $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$ y las raíces de la ecuación

formada igualando a cero el valor funcional $f(x)$ son los mismos, las ecs. (8.15) y (8.16) son de utilidad para formar esta ecuación. El teorema siguiente hará más clara esta observación.

TEOREMA 8.5. *Si la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se escribe*

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \tag{8.17}$$

de modo que el coeficiente de x^2 sea la unidad, (1) *la suma de las raíces es igual al coeficiente de x con signo contrario y* (2) *el producto de las raíces es igual al término constante.*

Demostración: Basta comparar el coeficiente de x con la ec. (8.15) y el término constante con la ec. (8.16).

EJEMPLO 1 Sin determinar sus valores, encuéntrese la suma y el producto de los ceros de $f: x \to 3x^2 - 4x + 8$.

Solución: Puesto que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 8$, la suma es $-(-4/3) = \frac{4}{3}$ y el producto es $\frac{8}{3}$.

EJEMPLO 2. Escríbase una ecuación cuadrática cuyas raíces sean $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$.

Solución: Puesto que

$$(3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6,$$

y

$$(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7,$$

una ecuación del tipo pedido es

$$x^2 - 6x + 7 = 0.$$

EJEMPLO 3. Sin resolver la ecuación dada, fórmese una ecuación cuadrática cuyas raíces sean los cuadrados de las raíces de $2x^2 + x - 6 = 0$

Solución: Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación dada, tenemos

$$r_1 + r_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad r_1 r_2 = -3.$$

Como $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2$, la suma de las raíces de la ecuación pedida será

$$r_1^2 + r_2^2 \equiv (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2 = \tfrac{1}{4} + 6 = \tfrac{25}{4}.$$

y el producto

$$(r_1 r_2)^2 = 9.$$

Por tanto, la ecuación pedida es

$$x^2 - \tfrac{25}{4}x + 9 = 0$$

o, eliminando fracciones,

$$4x^2 - 25x + 36 = 0.$$

La expresión $b^2 - 4ac$, bajo el radical de la ec. (8.14), es otra cantidad que juega un rol de importancia al considerar la naturaleza de los ceros de la función. Si esta expresión, llamada *discriminante*, es negativa, no existirán raíces cuadradas reales; los ceros serán *imaginarios*. Si $b^2 - 4ac = 0$, $r_1 = r_2$ y los ceros son iguales, en tanto que si $b^2 - 4ac > 0$, los ceros son reales y distintos. Puesto que los ceros de $f: x \to ax^2 + bx + c$ y las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los mismos, tenemos de inmediato el siguiente teorema.

TEOREMA 8.6. *Consideremos la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.*

1. *Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son imaginarias.*
2. *Si $b^2 - 4ac = 0$, las raíces son reales e iguales.*
3. *Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son reales y distintas.*

Si quisiéramos poner el énfasis en la gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, más que en las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, podríamos enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA 8.7. *Consideremos la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

1. *Si $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de la parábola no toca ni cruza el eje x.*
2. *Si $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica de la parábola tiene su vértice en el eje x.*
3. *Si $b^2 - 4ac > 0$, la gráfica de la parábola corta al eje x en dos puntos reales.*

EJEMPLO 4. Sin resolver ecuaciones, determínese la naturaleza de los ceros de la función $f: x \to 2x^2 - 9x - 35$.

Solución Puesto que $a = 2$, $b = -9$ y $c = -35$, $b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(2)(-35) = 81 + 280 = 361 > 0$; luego, los ceros son reales y distintos. Además, puesto que $b^2 - 4ac = 361$ es un cuadrado perfecto, los ceros serán racionales. ¿Es esto verdadero siempre que $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto?

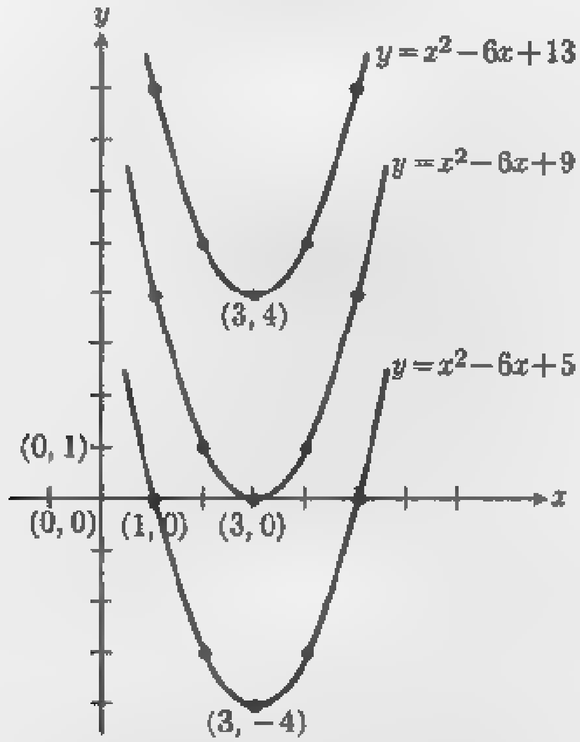
EJEMPLO 5. En un mismo sistema de coordenadas, bosquéjense las gráficas de

$$\text{(a)} \quad y = x^2 - 6x + 5,$$

(b) $y = x^2 - 6x + 9$,

(c) $y = x^2 - 6x + 13$.

Verifíquense los resultados determinando $b^2 - 4ac$ en cada caso.



8-3

Solución: Las gráficas de cada función aparecen en la fig. 8-3 y concuerdan con los valores de $b^2 - 4ac$, puesto que tenemos

(a) $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(5) = 16$,

(b) $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$,

(c) $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(13) = -16$.

PROBLEMAS

1 Sin resolver las ecuaciones, determínense la suma y el producto de los ceros de las funciones dadas en los problemas 1 a 8, sección 8.3.

Fórmense ecuaciones cuadráticas con coeficientes enteros y que tengan por raíces los números siguientes:

2 $2, -3$ 3 $-5, 4$

4 $\frac{2}{3}, -2$ 5 $-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$

6 $+\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

7 $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$

8 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

9 $\frac{-3+\sqrt{7}}{4}, \frac{-3-\sqrt{7}}{4}$

Fórmese una ecuación cuadrática cuyas raíces sean:

10 Los cuadrados de las de $4x^2 + 8x - 5 = 0$.

11 Los recíprocos de las de $4x^2 + 8x - 5 = 0$.

Indicación: $\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right]$

12 Los cuadrados de las de $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

13 Los recíprocos de las de $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

14 El doble de las de $4x^2 + 8x - 5 = 0$.

15 Un tercio de las de $4x^2 + 8x - 5 = 0$.

16 El triple de las de $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

17 La mitad de las de $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Determínese k de modo que la ecuación:

18 $4x^2 + kx + 6 = 0$ tenga una raíz $= -2$.

19 $2x^2 + kx - 15 = 0$ tenga una raíz $= 3$.

20 $3x^2 + kx - 2 = 0$ tenga raíces cuya suma sea igual a 6.

21 $5x^2 - 8x + k = 0$ tenga raíces cuyo producto sea igual a $\frac{1}{5}$.

22 $4x^2 + 20x + k = 0$ tenga raíces iguales.

23 $3x^2 - 7x + k = 0$ tenga raíces iguales.

24 $2x^2 + (4 - k)x - 17 = 0$ tenga raíces iguales en valor absoluto pero de signo contrario.

25 $3x^2 - 5x + 8 = kx$ tenga raíces iguales en valor absoluto pero de signo contrario.

26 $3x^2 - 7x + 6 = k$ tenga una raíz igual a cero.

27 $4x^2 + 20x + k = 0$ tenga una raíz igual a cero.

Determínese el conjunto de valores de k para los cuales la ecuación:

28 $3x^2 - 4kx + k = 0$ tiene raíces reales.

29 $2x^2 + 3kx - 9 = 0$ tiene raíces reales.

30 $x^2 + (k - 2)x + 4 = 0$ tiene raíces reales.

31 $2x^2 - kx + 8 = 0$ tiene raíces imaginarias.

32 $kx^2 + 4\sqrt{3}x + k = 1$ tiene raíces imaginarias.

Determínese el conjunto de valores de k o el valor de k de modo que la gráfica de la función en que y está dado por:

33 $3x^2 - 9x + k$ toque (tenga su vértice en) el eje x.

34 $x^2 + 2kx + \frac{3}{2} - k$ no corte al eje x.

35 $4x^2 + 4\sqrt{2}kx + k + 3$ corte al eje x en dos puntos reales.

36 Demuéstrese que no existen valores reales de x e y tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}.$$

8.7. Ecuaciones reducibles a cuadráticas

En las secciones precedentes hemos estudiado la función y las ecuaciones cuadráticas. En los problemas resueltos, aquellos que contenían funciones circulares no eran propiamente ecuaciones cuadráticas, sino que más bien podríamos haberlas denominado reductibles a cuadráticas. En general, toda ecuación que puede escribirse en la forma

$$av^2 + bv + c = 0 \quad (a \neq 0), \tag{8.18}$$

donde v está expresada en terminos de otra variable, se llama *ecuación reductible a cuadrática*. Los métodos desarrollados en las secciones anteriores pueden aplicarse también a estas ecuaciones.

EJEMPLO 1. Resuélvase $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$.

Solución. Haciendo $v = x^2$ y substituyendo, tenemos

$$9v^2 - 37v + 4 = 0,$$

o

$$(9v - 1)(v - 4) = 0.$$

Luego,

$$v = x^2 = \tfrac{1}{9} \quad ó \quad 4,$$

y

$$x = \pm\tfrac{1}{3}, \quad \pm 2.$$

EJEMPLO 2. Resuélvase $(x^2 - 5x)^2 + (x^2 - 5x) - 30 = 0$.

Solución: Haciendo $v = x^2 - 5x$, resolvemos

$$v^2 + v - 30 = 0,$$

ecuación cuadrática en v, cuyas raíces son

$$v = 5 \quad \text{ó} \quad -6.$$

Por tanto, debemos resolver

$$x^2 - 5x - 5 = 0$$

y

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

La solución es $x = (5 \pm 3\sqrt{5})/2$, 3 y 2.

PROBLEMAS

Resuélvanse respecto de x las ecuaciones:

1 $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$

2 $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

3 $x^{-4} - 13x^{-2} + 36 = 0$

4 $x^{-4} - 8x^{-2} + 15 = 0$

5 $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

6 $8x^{-6} + 7x^{-3} = 1$

7 $x^{2/3} + 2x^{1/3} - 8 = 0$

8 $x + x^{1/2} = 20$

9 $(x^2 - 7x)^2 + 9(x^2 - 7x) - 10 = 0$

10 $(x^2 + 2x)^2 + (x^2 + 2x) = 12$

11 $\dfrac{2 + x}{2 - x} + \dfrac{2}{2} \dfrac{x}{+ x} = 2$

12 $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 1 = 0$

13 $3(x + 3) + \sqrt{x + 3} = 2$

14 $2x - 9\sqrt{x + 2} + 14 = 0$

15 $2x^2 - 5x + 10 = 7\sqrt{2x^2 - 5x}$

16 $x^2 - x - 4 = \sqrt{x^2 - x - 2}$

8.8. Ecuaciones que contienen radicales

Los últimos cuatro problemas de la sección 8.7 contienen radicales; felizmente, ellos tienen una forma especial y pueden ser resueltos por el método ahí indicado. Sin embargo, muchas ecuaciones que contienen radicales no pueden resolverse mediante este método, debiéndose previamente proceder a la eliminación de los radicales y, en seguida, la aplicación de los métodos usuales. Debe tenerse la precaución de substituir todas las posibles raíces en la ecuación original, puesto que el método de eliminación de radicales requiere elevar a cierta potencia ambos miembros de una igualdad. Este proceso (recuérdese el ejemplo ilustrativo 2, sección 8.1) puede introducir raíces de la ecuación final que no lo son de la ecuación original.

EJEMPLO 1. Resuélvase $\sqrt{2x + 5} = 3$.

Solución: En una ecuación que contiene un radical, eliminamos éste elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación $2x + 5 = 9$

Resolviendo, encontramos $x = 2$ y, substituyendo, vemos que $x = 2$ satisface la ecuación original

$$\sqrt{2(2) + 5} = \sqrt{9} = 3,$$

de modo que $x = 2$ es la única solución de la ecuación propuesta.

EJEMPLO 2. Resuélvase $\sqrt{1 - 5x} + \sqrt{1 - x} = 2.$

Solución: Con dos radicales, es más fácil pasar uno al otro miembro antes de elevar al cuadrado. Así,

$$\sqrt{1 - 5x} = 2 - \sqrt{1 - x}.$$

Elevando al cuadrado, encontramos

$$1 - 5x = 4 - 4\sqrt{1 - x} + 1 - x,$$

y tenemos

$$-4x - 4 = -4\sqrt{1 - x} \quad \text{ó} \quad 1 + x = \sqrt{1 - x}.$$

Elevando otra vez al cuadrado, obtenemos

$$1 + 2x + x^2 = 1 - x, \quad x^2 = -3x, \quad x = 0, -3.$$

Por tanto, sólo 0 y -3 pueden ser raíces de la ecuación original; substituyendo encontramos que 0 satisface la ecuación original pero no -3. Por tanto, $x = 0$ es la única solución.

EJEMPLO 3. Resuélvase $3 \operatorname{sen} \theta + 4 \cos \theta = 5$ para todos los valores de θ entre 0 y 2π.

Solución: Aunque ésta no es una ecuación algebraica, podemos resolverla por el método indicado en la presente sección. Para expresar $\cos \theta$ en función de $\operatorname{sen} \theta$ recordamos que $\cos \theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$; luego,

$$\pm 4\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = 5 - 3 \operatorname{sen} \theta.$$

Elevando al cuadrado y despejando $\operatorname{sen} \theta$, tenemos

$$16 - 16 \operatorname{sen}^2 \theta = 25 - 30 \operatorname{sen} \theta + 9 \operatorname{sen}^2 \theta,$$
$$25 \operatorname{sen}^2 \theta - 30 \operatorname{sen} \theta + 9 = 0,$$
$$(5 \operatorname{sen} \theta - 3)^2 = 0,$$
$$\operatorname{sen} \theta = \tfrac{3}{5}.$$

Por tanto, $\theta = 0{,}6464$ ó $3{,}1416 - 0{,}6464 = 2{,}4952$. Substituyendo estos resultados en la ecuación original, encontramos que $\theta = 0{,}6464$ es la única solución.

Problemas

Resuélvanse y verifíquense las ecuaciones:

1 $\sqrt{2x+5} = 4$

2 $\sqrt{6x-3} = 7$

3 $\sqrt{8x-7} - x = 0$

4 $\sqrt{3x+1} + 1 = x$

5 $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x} + 3$

6 $2\sqrt{4x+5} = \sqrt{8-x} - 1$

7 $\sqrt{11-x} - \sqrt{x+6} = 3$

8 $\sqrt{3-x} - \sqrt{2+x} = 3$

9 $\sqrt{2x + \sqrt{2x+4}} = 4$

10 $\sqrt{2x + \sqrt{7+x}} = 3$

Determínense y verifíquense los valores de θ entre 0 y 2π que satisfacen las ecuaciones siguientes:

11 $4 \operatorname{sen} \theta + 3 \cos \theta = 2$

12 $\cos \theta - 2 = \sqrt{3} \operatorname{sen} \theta$

13 $\operatorname{sen} \theta + \cos \theta = 1$

14 $12 \cos \theta - 5 \operatorname{sen} \theta = 13$

15 $5 \tan \theta - \sqrt{2} \sec \theta + 3 = 0$

16 $\tan \theta + \sec \theta = 1$

8.9. Proporcionalidad

Muchas aplicaciones a las ciencias físicas y sociales hacen uso de una dependencia funcional conocida como *proporcionalidad*; y, a menudo, estas relaciones son lineales o cuadráticas, si bien éste no es siempre el caso. Por ejemplo, la ley de Ohm expresa que en un circuito eléctrico la intensidad de corriente es *directamente proporcional* a la fuerza electromotriz e *inversamente proporcional* a la resistencia; de este modo, la intensidad es función de la fuerza electromotriz y de la resistencia. Esta relación funcional puede escribirse

$$I = k \cdot \frac{E}{R},$$

donde k es la *constante de proporcionalidad*. Definamos los tres tipos más comunes de proporcionalidad.

Definición 8.6 *Si dos variables x e y están relacionadas en forma tal que el cuociente de y por x, llamado la razón de y a x, es constante, entonces se dice que y es* directamente proporcional *a x. Esta relación puede escribirse* $y/x = k$, *o*

$$y = kx. \tag{8.19}$$

DEFINICIÓN 8.7. *Si dos variables x e y están relacionadas en forma tal que el producto de x e y es constante, entonces se dice que y es* inversamente proporcional *a x. Esta relación puede escribirse $yx = k$, o*

$$y = \frac{k}{x}. \tag{8.20}$$

DEFINICIÓN 8.8. *Si la variable z es directamente proporcional a x cuando y se mantiene constante y es directamente proporcional a y cuando x se mantiene constante, entonces se dice que z es* directamente proporcional *a x e y, y se escribe*

$$z = kxy. \tag{8.21}$$

EJEMPLO 1. Exprésese z en función de x e y si z es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de y, y $z = 18$ cuando $x = 3$ e $y = 2$.

Solución: La función puede escribirse $z = k(x/y^2)$. Substituyendo los valores de x, y y z, tenemos $18 = k(\frac{3}{4})$ y $k = 24$. Por tanto,

$$z = \frac{24x}{y^2}.$$

EJEMPLO 2. A temperatura constante, la resistencia eléctrica de un alambre es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro. Si un trozo de alambre de 0,1 cm de diámetro y 50 m de largo tiene una resistencia de 0,1 ohm, ¿cuál es la resistencia de un alambre del mismo material, de 2000 metros de largo y 0,2 cm de diámetro?

Solución: Sean R, L y d la resistencia, la longitud y el diámetro, respectivamente, del alambre; tenemos $R = kL/d^2$. Substituyendo, $0{,}1 = k(50)/(0{,}1)^2$ o $k = (0{,}1)^3/50$; luego

$$R = \frac{(0{,}1)^3}{50} \cdot \frac{L}{d^2}.$$

Por tanto,

$$R = \frac{(0{,}1)^3}{50} \cdot \frac{(2000)}{(0{,}2)^2} = \frac{(0{,}001)(2000)}{50(0{,}04)} = 1 \text{ ohm}.$$

Obsérvese que no es necesario expresar las diferentes magnitudes en las mismas unidades, si bien éstas deben ser siempre las mismas para una misma variable.

EJEMPLO 3. Si y es inversamente proporcional al cuadrado de x, ¿cuánto varía y si x se aumenta en un 25%?

Solución: Tenemos $y = k/x^2$. Si $x = x_1$, entonces $y = k/x_1^2$; pero $x = 5x_1/4$. Luego,

$$y = \frac{k}{(5x_1/4)^2} = \frac{16}{25} \cdot \frac{k}{x_1^2} = 0{,}64\,\frac{k}{x_1^2}.$$

Por tanto, y pasa a ser 0,64 veces su valor original.

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8, exprésese la ecuación funcional como una ecuación algebraica única, dando el valor especifico de k cuando sea posible.

1 La variable z es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a y.

2 La variable z es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de y.

3 La variable z es directamente proporcional a x e y, y $z = 72$ cuando $x = 4$ e $y = 3$

4 La variable z es inversamente proporcional a x, y $z = 8$ cuando $x = 16$.

5 El área de un circulo es directamente proporcional al cuadrado de su diametro.

6 El área de un triángulo es directamente proporcional a la base y a la altura.

7 El área de un triángulo equilátero es directamente proporcional al cuadrado del lado (Compárese con el problema 14, sección 5.1.)

8 La distancia recorrida por un cuerpo en caida libre (despreciando la resistencia del aire) es directamente proporcional al cuadrado del tiempo empleado, y un cuerpo que parte del reposo cae 19,6 metros en 2 segundos.

9 (a) Si $y = f(x)$ es directamente proporcional a x y el punto $(3, 2)$ está en su gráfica, determínese la ecuación especifica de y en función de x.
(b) Indíquense las coordenadas de otro punto de la grafica.

10 (a) Si $y = f(x)$ es inversamente proporcional a x y el punto $(3, 2)$ está en su gráfica, determínese la ecuacion especifica de y en función de x.
(b) Indíquense las coordenadas de otro punto de la gráfica.

11 Si z es directamente proporcional a x^2 e y, y $z = 24$ cuando $x = 2$ e $y = 3$, determínese el valor de z cuando $x = 3$ e $y = 5$.

12 Si z es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a y, y si $z = 5$ cuando $x = 2$ e $y = 3$, determínese z cuando $x = 4$ e $y = 2$.

13 La superficie de una esfera es directamente proporcional al cuadrado del radio. Si la superficie es 36π cm^2 cuando el radio es 3 cm, ¿cuál es la superficie cuando el radio es 12 cm?

14 Con la información del problema 8, determínese:

(a) La distancia que el cuerpo cae en 5 segundos.
(b) La distancia que cae durante el quinto segundo.

15 La energía cinética K es directamente proporcional a la masa m y al cuadrado de la velocidad v. Si K es 36 ergios cuando m es 8 gr y v es 3 cm/seg, determínese K cuando $m = 4$ gr y $v = 6$ cm/seg.

16 La frecuencia de vibración, o tono, de una cuerda vibrante es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda. Si una cuerda vibra 216 veces por segundo con una tensión de 3 kilogramos, determínese su frecuencia de vibración con una tensión de 12 kilogramos.

17 La intensidad luminosa es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente de luz. ¿Cuánto debe alejarse de la fuente luminosa un objeto, situado a 2 metros de ésta, para recibir un cuarto de la cantidad de luz que está recibiendo?

18 Si z es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a y, ¿cómo varía z si x se duplica e y se triplica?

19 La atracción de gravedad F entre dos cuerpos es directamente proporcional a sus masas m_1 y m_2 e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d entre ellos. ¿Cómo cambia la atracción de gravedad cuando las masas de los cuerpos se duplican y la distancia se reduce a la mitad?

20 La rigidez de una viga es directamente proporcional a su anchura y a su altura e inversamente proporcional al cuadrado de su longitud.
(a) Determínese la variación en rigidez si cada una de las dimensiones se aumenta en un 10%.
(b) Determínese la variación en longitud necesaria para aumentar la rigidez en 20%, si la anchura y la altura permanecen invariables.

21 Trácese la gráfica de $y = kx$ para $k > 0$. Nótese en la gráfica que y crece cuando x crece.

Indicación: Utilícense unidades de longitud k en el eje y.

22 Diagrámese $y = k/x$ para $k > 0$. Nótese que y decrece cuando x crece.

23 (a) Si y es directamente proporcional a x, demuéstrese que

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_1}{x_2}.$$

(b) Si y es inversamente proporcional a x, demuéstrese que

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_2}{x_1}$$

24 La ley de la sucesión áurea o divina, según los antiguos egipcios y griegos, expresa: «La división más hermosa de un trazo en dos partes es aquella en la cual la razón de la parte mayor al trazo total es igual a la razón de la parte menor a la mayor».
(a) Si consideramos la longitud del trazo como unidad y designamos por t la longitud de la parte mayor, determínese t.
(b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este caso?*

* Recuérdese la ec. (6.19), sección 6.5.

8.10. Resolución de un sistema de 2 ecuaciones lineales

Recordemos la definición general de una función (Definición 5.1)

$$f: P \to Z,$$

que asocia a cada elemento de P exactamente un elemento de Z. Si P es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales y Z es el conjunto de todos los números reales, podríamos escribir esta función

$$f: (x, y) \longrightarrow z, \tag{8.22}$$

donde la correspondencia va de un par ordenado a un número real. En muchos casos, esta función es tal que z se puede expresar en forma algebraica en términos de x e y.*

Nos interesa especialmente el caso lineal en que z está dada por una expresión de primer grado de este tipo, a saber,

$$z = ax + by + c.$$

Como una primera generalización de la ec. (8.1), nuestro principal interés es determinar «los ceros» de esta función. Procediendo en forma análoga a la de la sección 8.1, hacemos $z = 0$ y tratamos de determinar el conjunto de pares ordenados (x, y) tales que $ax + by + c = 0$. Este conjunto,

$$\{(x, y) | ax + by + c = 0\}, \tag{8.23}$$

se llama *conjunto solución*, en tanto que un elemento cualquiera del conjunto es una raíz o solución de la ecuación

$$ax + by + c = 0. \tag{8.24}$$

En la sección 8.1, bosquejamos la gráfica de ecuaciones del tipo $ax + by + c = 0$** (problemas 33 a 40) despejando y y obteniendo una ecuación equivalente de la forma $y = mx + b$,† que representaba una línea recta. Evidentemente, hay infinitas soluciones de la ecuación $ax + by + c = 0$, puesto que hay infinitos puntos (x, y) en una recta. Un valor cualquiera de x determina un valor correspondiente de y. Por ejemplo, una solución de la ecuación

---

* Muchos libros se refieren a esta relación como a una función de dos variables y escriben $z = f(x, y)$.

** Si $b = 0$, $x = -c/a$ es una recta paralela al eje y. Si $b \neq 0$, $by = -ax + c$ o $y = -(a/b)x + c/b$.

† Las dos «b» no son una misma cosa en las ecs. (8.1) y (8.24). El lector debe distinguir entre ambas.

$$3x - 2y - 5 = 0$$

es (3, 2), puesto que $x = 3$, $y = 2$ satisface la ecuación; otras soluciones son (1, −1), (−1, −4), etc. En este caso el conjunto solución es

$$\{(x, y)|3x - 2y - 5 = 0\}.$$

A menudo, interesa la resolución no de una ecuación, sino la de un sistema de dos ecuaciones lineales en x e y, tales como

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \tag{8.25*}$$

Esto es, nos interesa determinar todos los pares ordenados (x, y) cuyos valores satisfagan ambas ecuaciones. Si escribimos nuestro problema en notación de conjuntos, haciendo

$$A = \{(x, y)|a_1x + b_1y = c_1\} \quad \text{y} \quad B = \{(x, y)|a_2x + b_2y = c_2\},$$

nos interesa determinar la intersección de A y B, a saber,

$$A \cap B = \{(x, y)|a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{y} \quad a_2x + b_2y = c_2\}.$$

Desde un punto de vista geométrico, la gráfica de cada ecuación en la ec. (8.25) es una recta y, por tanto, debemos encontrar las coordenadas de los puntos (x, y) que se encuentran en ambas rectas. Puesto que, en general, dos rectas se cortan en un punto, la solución constará de un elemento. Trazando la gráfica de cada recta, podemos obtener aproximadamente las coordenadas del punto de intersección.

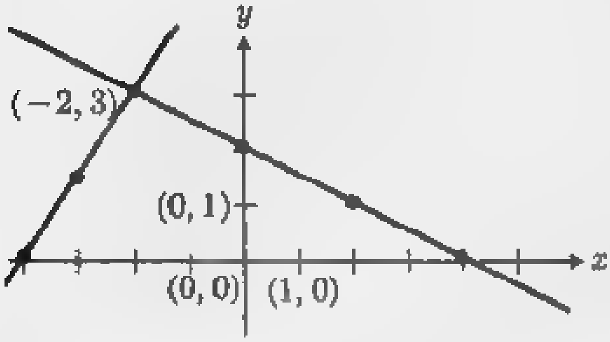
EJEMPLO 1. Resuélvase gráficamente el sistema

$$x + 2y = 4 \quad \text{y} \quad 3x - 2y = -12.$$

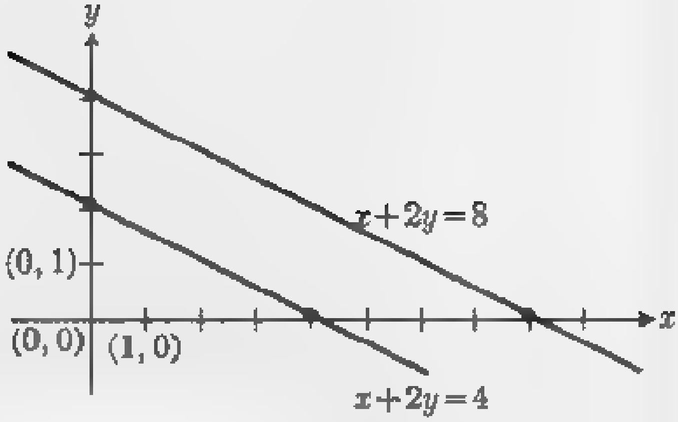
Solución: La gráfica de cada recta aparece en la fig. 8-4; en ésta se ve que las rectas se cortan en el punto (−2, 3). Como puede verificarse por substitución directa, ésta es la solución exacta; o sea, $x = -2$, $y = 3$ y el par ordenado es (−2, 3). Si hacemos

$$A = \{(x, y)|x + 2y = 4\} \quad \text{y} \quad B = \{(x, y)|3x - 2y = -12\},$$

* Elegimos esta forma para escribir estas ecuaciones, puesto que a menudo es más conveniente escribir el término constante en el segundo miembro.



8-4



8-5

el conjunto solución es:

$$A \cap B = \{(-2, 3)\},$$

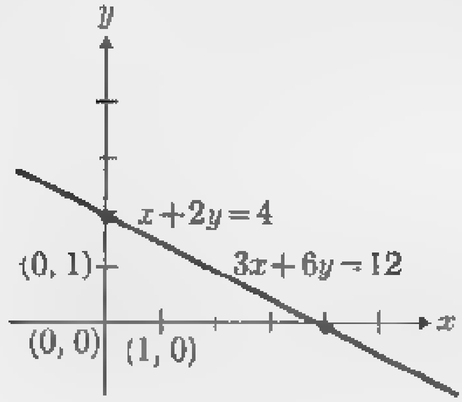
que contiene el único elemento $(-2, 3)$.

Debe observarse que, al diagramar dos rectas paralelas tales como $x + 2y = 4$ y $x + 2y = 8$, sus gráficas no se cortan. El hecho de que no haya puntos de intersección puede verse, evidentemente, por las mismas ecuaciones, puesto que no puede existir un par de números tales que el primero más el doble del segundo sea igual a 4, y al mismo tiempo, a 8. Si consideramos la intersección de $\{(x, y)|x + 2y = 4\}$ y $\{(x, y)|x + 2y = 8\}$, el resultado

$$\{(x, y)|x + 2y = 4\} \quad \text{y} \quad \{(x, y)|x + 2y = 8\},$$

es el conjunto vacío $\emptyset$. Dos ecuaciones de este tipo se llaman *incompatibles.*

Si las gráficas de dos rectas, tales como $x + 2y = 4$ y $3x + 6y = 12$, coinciden, todo par de valores (x, y) que satisface una de las ecuaciones satisface también la otra. Dos ecuaciones de este tipo tienen un número infinito de soluciones y se dice que son *dependientes.*



8-6

En resumen, las dos ecuaciones (8.25) satisfacen una y sólo una de las siguientes proposiciones:

(1) Tienen una solución única; sus gráficas son dos rectas que se cortan en un punto.
(2) No tienen solución; sus gráficas son dos rectas paralelas no coincidentes.
(3) Tienen un número infinito de soluciones; sus gráficas son dos rectas paralelas coincidentes.

Puesto que el método gráfico es sólo aproximado, debemos considerar además un método exacto. Una de las dos variables puede eliminarse mediante una combinación adecuada de las dos ecuaciones (o ecuaciones equivalentes), y la ecuación resultante puede resolverse respecto a la otra variable. La variable eliminada puede determinarse en seguida por substitución.

Ejemplo 2. Resuélvase algebraicamente el sistema de las dos ecuaciones del ejemplo 1.

Solución: Puesto que los coeficientes de y son iguales pero de signo contrario, las dos ecuaciones pueden sumarse miembro a miembro y en esa forma se elimina y.

$$\begin{array}{rcr} x + 2y & = & 4 \\ \underline{3x - 2y} & = & \underline{-12} \\ 4x \quad & = & -8 \end{array}$$

Resolviendo esta ecuación en una variable, tenemos $x = -2$; substituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones originales, determinamos $y = 3$. Por tanto, la solución pedida es

$$x = -2, \quad y = 3,$$

o $(-2, 3)$. También podríamos haber obtenido y, multiplicando la primera ecuación por -3 y sumando miembro a miembro la ecuación resultante, $-3x - 6y = -12$, con la segunda ecuación $3x - 2y = -12$, obteniendo así $-8y = -24$, ó $y = 3$.

Ejemplo 3. Resuélvase el sistema general de dos ecuaciones lineales en x e y, ec. (7.25), en función de los coeficientes.

Solución: Multiplicando la primera ecuación por b_2 y la segunda por b_1, tenemos

$$\begin{aligned} a_1b_2x + b_1b_2y &= c_1b_2, \\ a_2b_1x + b_1b_2y &= c_2b_1. \end{aligned}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos

$$a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1,$$

y despejando x,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0).$$

Multiplicando la primera ecuación por a_2, la segunda por a_1 y procediendo en forma análoga, encontramos

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0).$$

Aunque no se usen en esta forma, estos valores para x e y pueden considerarse como una *solución por fórmula* del sistema.

Problemas

Resuélvanse algebraicamente los sistemas siguientes; el método gráfico puede utilizarse para una comprobación aproximada. En los casos en que aparecen funciones circulares, determínense todos los valores posibles entre 0 y 2π

1 $2x - y = 5,\ x - 3y = 5$

2 $3x - 2y = -14,\ 2x + 3y = 8$

3 $4x + 3y = 27,\ 2x - 5y + 19 = 0$

4 $2x - 5y + 43 = 0,\ 6x - y + 31 = 0$

5 $3x + 4 = 4y,\ 9x + 2y = 9$

6 $6x + 9y = 7,\ 3x - 6y + 14 = 0$

*7 $4 \operatorname{sen} \alpha + \cos \beta = 3,\ 6 \operatorname{sen} \alpha - 2 \cos \beta = 1$

8 $\sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha - \cos \beta = 1,\ \operatorname{sen} \alpha - 3\sqrt{3} \cos \beta = -\sqrt{3}$

9 $2 \sec \alpha - 4 \tan \beta = 0,\ \sec \alpha + \tan \beta = \sqrt{3}$

10 $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 2,\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{9}{y} + 1 = 0$

11 $\dfrac{15}{x} + \dfrac{4}{y} = 1,\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{12}{y} = 7$

12 $\dfrac{15}{2x} - \dfrac{16}{3y} = \dfrac{23}{6},\ \dfrac{4}{3x} + \dfrac{7}{2y} + \dfrac{31}{72} = 0$

13 $ax + by = a^2 + 2ab + b^2,\ bx - ay = b^2 + 2ab - a^2$

14 $ax - by = a^2 - b^2,\ bx + ay = 2ab$

---

* Si bien los problemas 7 a 12 no son lineales, pueden ser resueltos mediante el método explicado en esta sección.

▶ 15 $\tan k_1 = \frac{y}{x}$, $\tan k_2 = \frac{y + a}{x}$

▶ 16 $\tan k_1 = \frac{a}{y}$, $\tan k_2 = \frac{a}{y + x}$

▶ 17 Resuélvase el sistema

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha, \quad y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$$

despejando x' e y' en función de x e y.

Determínese $A \cap B$ en los problemas 18 a 20 si:

18 $A = \{(x, y)|3x - 4y = -7\}$, $B = \{(x, y)|x + y = 7\}$.

19 $A = \{(x, y)|x + y = 1\}$, $B = \{(x, y)|2x + 3y = 4\}$.

20 $A = \{(x, y)|3x + y = 5\}$, $B = \{(x, y)|6x + 2y = 7\}$.

21 Trácese la gráfica de $\{(x, y)|x - y = 3 \text{ y } x + 2y > 4\}$.

22 Trácese la gráfica de $\{(x, y)|x + 2y = 6 \text{ y } x - y < 3\}$.

23 Trácese la gráfica de

(a) $A = \{(x, y)|2x + y > 3\}$, (b) $B = \{(x, y)|x - y > 6\}$.
(c) Demuéstrese algebraicamente que

$$A \cap B = \{(x, y)|x > 3 \quad \text{y} \quad 3 - 2x < y < x - 6\}.$$

(d) Trácese la gráfica de $A \cap B$.

24 Trácese la gráfica de $A = \{(x, y)|x > 0, y > 0, x + 3y < 15, \text{ y } 2x + y < 10\}$.

25 Trácese la gráfica de $|x| + |y| = 1$.

26 Trácese la gráfica de $|x - 4| + |y - 3| = 2$.

27 Trácese la gráfica de $4|x| + 4|y| = 12$.

28 La suma de las dos cifras de un número es 9. Si se invierte el orden de las cifras, el nuevo número es 9 unidades menor que el número primitivo. Determínense los dos números.

29 El valor de cierta fracción es $\frac{3}{4}$. Si el numerador se disminuye en 7 y el denominador se aumenta en 4, la fracción resultante tiene por valor $\frac{1}{2}$. Determínese la fracción original.

30 La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es, evidentemente, 90°. Si el doble del primero es 40° más que el triple del segundo, determínense ambos ángulos.

31 Un avión viaja 2.240 kilómetros en 7 horas con viento a favor y en 8 horas con viento en contra. Determínese la velocidad del avión en aire en calma y la velocidad del viento.

32 La suma de los recíprocos de dos números es 9. El doble del recíproco del primero es 12 unidades menor que el cuádruple del recíproco del segundo. Determínense los números.

33 A y B, trabajando juntos, pueden hacer cierta obra en $6\frac{2}{3}$ horas. Después de trabajar juntos por 3 horas, A se enferma y B continúa solo, terminando la obra en $8\frac{1}{4}$ horas más. ¿Cuánto habría tardado cada uno trabajando solo?

34 Determínese α y β, valores comprendidos entre 0 y $\pi/2$, de modo que:

$$2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2 \cos(\alpha - \beta) = \sqrt{3}.$$

35 Determínense las coordenadas de los vértices del triángulo formado por las líneas

$$x - y = -3, \quad 3x + 4y = 5, \quad 6x + y = 17.$$

36 Verifíquense las coordenadas determinadas en el problema 35 en las ecuaciones de las líneas dadas.

37 Demuéstrese que las rectas

$$2x - y = 4, \quad x + 3y = 6, \quad 2x - y = 8, \quad x + 3y = -1$$

forman un paralelogramo y determínense sus vértices.

38 Recordando que $y = mx + b$ representa la ecuación de una recta (no paralela al eje y), determínense los valores de m y b de modo que $y = mx + b$ pase por $(-3, 1)$ y $(1, 9)$. (Si un punto se encuentra en una línea, sus coordenadas satisfacen su ecuación.) Substituyendo estos valores de m y b en la ecuación $y = mx + b$, determinamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados.

39 Utilizando el método del problema 38, determínese la ecuación de la recta que pasa por:

(a) $(2, 3)$ y $(-1, 4)$ (b) $(-4, 2)$ y $(6, -1)$.

40 Determínese la relación lineal existente entre la temperatura C en grados centígrados y la temperatura F en grados Fahrenheit de un cuerpo cualquiera.

Indicación: $F = mC + b$; además, $F = 32$ cuando $C = 0$ y $F = 212$ cuando $C = 100$.

8.11. Resolución algebraica de un sistema de tres ecuaciones lineales

Toda ecuación de la forma

$$ax + by + cz = d, \tag{8.26}$$

en que a, b, c y d son constantes, y a, b y c no son todas iguales a cero, recibe el nombre de *ecuación lineal en tres variables*. Una solución de esta ecuación es todo conjunto de tres números x, y y z que satisface la ecuación. Al igual que en el caso de la ec. (8.24), hay un número infinito de soluciones para una ecuación de este tipo.

Aunque no lo demostraremos en este libro, la ec. (8.26) puede interpretarse geométricamente como la ecuación de un plano en un sistema rectangular de coordenadas de tres dimensiones.* Dos planos no paralelos se cortan en una

---

* Un sistema rectangular de coordenadas de tres dimensiones es una generalización de los sistemas de una y dos dimensiones estudiadas en las secciones 4.2 y 4.3. Por ejemplo, cada punto en el espacio tiene tres coordenadas y se designa por el trío ordenado (x, y, z); etc. (Recuérdese el problema 16, sección 4.3.)

línea recta y esta línea corta a un tercer plano, no paralelo a los anteriores, en un punto. En general, entonces, tres planos tienen un punto común. Algebraicamente, esto puede interpretarse como que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{8.27}$$

tiene una única solución para x, y y z.

Para resolver un sistema de este tipo, seguimos un método que es una generalización del utilizado para resolver el sistema de dos ecuaciones (8.25). Elegimos dos de entre las tres ecuaciones y eliminamos una de las variables, obteniendo así una ecuación con dos variables. Repitiendo esta operación con otro par de ecuaciones, obtenemos una segunda ecuación en las mismas dos variables. Resolvemos en seguida el sistema formado de dos ecuaciones en dos variables y completamos la solución mediante substitución en una de las ecuaciones originales. Veamos un ejemplo.

Ejemplo. Resuélvase el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 8, \\ x + 2y + 3z &= 9, \\ 4x + y - 2z &= 1. \end{aligned}$$

Solución: Eliminemos z combinando las dos primeras ecuaciones y en seguida la primera y la tercera. Multiplicando la primera ecuación por -3 y sumando miembro a miembro el resultado con la segunda ecuación, tenemos

$$\begin{array}{rcr} -6x + 3y - 3z &=& -24 \\ \underline{\quad x + 2y + 3z} &=& \underline{\quad 9} \\ -5x + 5y \qquad &=& -15 \end{array}$$

ó $x - y = 3$.

Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando miembro a miembro el resultado con la tercera ecuación, resulta

$$\begin{array}{rcr} 4x - 2y + 2z &=& 16 \\ \underline{4x + \ \ y - 2z} &=& \underline{1} \\ 8x - \ \ y \qquad &=& 17 \end{array}$$

Resolvemos en seguida el sistema en dos variables resultante. Dense las razones para cada paso.

$$\begin{array}{rcr} 8x - y &=& 17 \\ \underline{x - y} &=& \underline{3} \\ 7x \qquad &=& 14 \end{array}$$

Por tanto, $x = 2$ e $y = -1$. Substituyendo estos valores en la primera ecuación del sistema dado, tenemos

$$2(2) - (-1) + z = 8, \quad z = 3$$

Por tanto, la solución completa es

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = 3$$

que puede escribirse $(2, -1, 3)$. Todas las soluciones deben verificarse.

Problemas

Resuélvase cada sistema de ecuaciones.

1 $x + 3y - z = 4 \quad ; \quad 3x - 2y + 4z = 11 \quad ; \quad 2x + y + 3z = 13$

2 $3x - y - 2z = -13 \quad ; \quad 5x + 3y - z = 4 \quad ; \quad 2x - 7y + 3z = -36$

3 $2x - y + 3z = 19 \quad ; \quad 5x - 2y + 4z = 33 \quad ; \quad 3x + 3y - z = 2$

4 $6x + 4y - z = 13 \quad ; \quad 5x - 2y + 7z = 18 \quad ; \quad x + y - 8z = -35$

5 $3x + 5y + 2z = 0 \quad ; \quad 12x - 15y + 4z = 12 \quad ; \quad 6x + 25y - 8z = -12$

6 $7x - 3y + 4z = 18 \quad ; \quad 13x + 6y + 8z = 30 \quad ; \quad 11x - 9y - 12z = 16$

7 $2x + 3y = 28 \quad ; \quad 3y + 4z = 46 \quad ; \quad 4z + 5x = 53$

8 $x - 3y = -11 \quad ; \quad 2y - 5z = 26 \quad ; \quad 3z - 7x = 2$

9 $\dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{6}{z} = 1 \quad ; \quad \dfrac{9}{x} + \dfrac{8}{y} - \dfrac{12}{z} = 3 \quad ; \quad \dfrac{9}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{12}{z} = 4$

10 $x + y + z = a + b + c \quad ; \quad bx - ay + cz = b^2 \quad ; \quad ax - ay + cz = ab$

11 Dados los tres conjuntos de tríos ordenados

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) | x - 2y + 3z = 4\}, \\ B &= \{(x, y, z) | 2x - y + z = -1\}, \quad \text{y} \\ C &= \{(x, y, z) | 4x + y + 2z = 4\}, \end{aligned}$$

determínese $(A \cap B) \cap C$.

12 La suma de las tres cifras de un número es 13. Si se permutan las cifras de las decenas y las centenas, el nuevo número es 90 unidades menor que el original y si se permutan las cifras de las unidades y las centenas el nuevo número es 99 unidades menor que el número original. Determínese el número original

13 Veinticinco monedas, con un valor total de \$2,75, consisten en monedas de 5 centavos, 10 centavos y 25 centavos. Si las monedas de 5 cts fueran de 10, las de 10 fueran de 25 y las de 25 fueran de 5, el valor total sería de 3,75. ¿Cuántas monedas de cada denominación hay?

14 Recordemos que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° ¿Cuáles son los tres

ángulos si la suma de dos es igual al tercer ángulo, pero la diferencia de los mismos dos es sólo los dos tercios del tercer ángulo?

15 Si la ecuación general (4.10) de la circunferencia se desarrolla, puede escribirse en la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Recordando que las coordenadas de un punto de la circunferencia deben satisfacer su ecuación, determínense los valores de A, B y C y, por tanto, la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(-2, 3)$, $(3, 4)$.

16 A, B y C, trabajando juntos, hacen cierta obra en $1\frac{1}{3}$ horas. Si A y B trabajan solos tardan $1\frac{5}{7}$ horas, pero si lo hacen B y C tardan $2\frac{2}{5}$ horas. ¿Cuánto emplearía cada hombre, trabajando solo, en completar la obra?

17 Recordemos por la nota al pie en esta sección que $ax + by + cz = d$ representa la ecuación de un plano en un sistema de coordenadas de tres dimensiones, siendo al menos uno de los coeficientes distinto de cero. Dividiendo por este coeficiente, la ecuación equivalente puede escribirse, por ejemplo, $x = ey + fz + g$ Determínese una ecuación del plano que pasa por los tres puntos $(4, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$ y $(\quad 6, \quad 1, -2)$.

18 Determínese una ecuación del plano que pasa por los tres puntos $(1, -5, -2)$, $(0, 5, 2)$ y $(3, 2, -1)$.

8.12. Resolución del sistema formado por una ecuación lineal y una ecuación cuadrática

En las secciones 8.10 y 8.11 hemos estudiado sistemas de ecuaciones lineales. Estos sistemas se pueden generalizar, ya sea considerando un número de variables superior a 3, o bien considerando funciones de grado superior a las lineales. Las soluciones de estos sistemas, si existen, son a menudo difíciles de obtener. Consideraremos una generalización simple, pero de gran utilidad, consistente en un sistema en dos variables en el cual una de las ecuaciones es lineal y la otra, de segundo grado o cuadrática. Un sistema de este tipo puede escribirse, en general,

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0, \\ gx + hy + k &= 0, \end{aligned} \tag{8.28}$$

donde a, b, c, d, e, f, g, h y k son constantes; a, b y c no son todos ceros; y, g y h no son ambos cero. Si cada ecuación (condición) en la ec. (8.28) se considera como definiendo un conjunto de puntos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación respectiva al igual que en la Sección 8.10, la intersección de estos dos conjuntos tiene por elementos los puntos de intersección de las dos curvas representadas por estas ecuaciones.

Al igual que en el caso de dos ecuaciones lineales, podemos resolver este sistema tanto gráficamente como algebraicamente. La gráfica de la ecuación cuadrática puede diagramarse despejando una de las variables en función de la otra y, en seguida, construyendo una tabla de valores. Los puntos de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones se determinan aproximadamente y sus coordenadas constituyen las soluciones del sistema.

El método algebraico más simple consiste en eliminar una de las variables; más precisamente, despejamos una de las variables en función de la otra en la ecuación lineal, substituimos su valor en la ecuación cuadrática y resolvemos ésta con respecto a la otra variable. Substituyendo los resultados en la ecuación lineal primitiva, obtenemos la solución completa del sistema.

Puesto que el problema se reduce fundamentalmente a la resolución de una ecuación cuadrática, tendremos como solución del sistema dos pares ordenados reales y distintos, un par ordenado real o ningún par ordenado real. (Recuérdese la sección 8 6.)

Ejemplo 1. Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - y + 4 &= 0, \\ x - 4y &= 1. \end{aligned}$$

Solución algebraica: Si bien es posible eliminar x o y, despejaremos y en función de x en la ecuación lineal y substituiremos este valor en la ecuación cuadrática, puesto que esta forma aparece como más sencilla. Así,

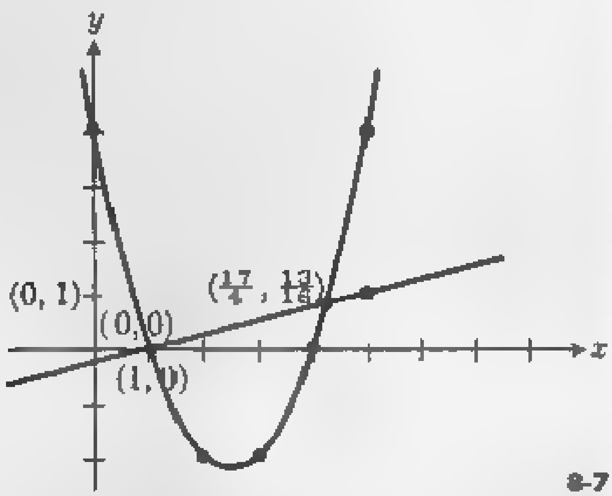
$$4y = x - 1$$

o

$$y = \frac{x-1}{4}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - \left(\frac{x-1}{4}\right) + 4 &= 0, \\ 4x^2 - 20x - x + 1 + 16 &= 0, \\ 4x^2 - 21x + 17 &= 0, \\ (4x - 17)(x - 1) &= 0. \end{aligned}$$



8-7

Luego, $x = 1$ ó $\frac{17}{4}$. Substituyendo estos valores en la ecuación lineal obtenemos los valores correspondientes de $y = 0, \frac{13}{16}$. Las dos soluciones son, entonces, $x = 1$, $y = 0$ y $x = \frac{17}{4}$, $y = \frac{13}{16}$, ó $(1, 0)$ y $(\frac{17}{4}, \frac{13}{16})$.

Solución gráfica: Las ecuaciones dadas quedan representadas por la parábola y la recta cuyas gráficas aparecen en la fig. 8-7. Las intersecciones de las dos curvas muestran las soluciones ya encontradas por el método algebraico.

Ejemplo 2. Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 20 &= 0, \\ 2x - y &= 1. \end{aligned}$$

*Solución.** Por parecer más sencillo, despejamos y en la ecuación lineal y substituimos su valor en la ecuación cuadrática. De la ecuación lineal, $y = 2x - 1$ y, substituyendo en la cuadrática,

$$x^2 - 2(2x - 1)^2 + 3x - 4(2x - 1) + 20 = 0.$$

Simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 - 8x^2 + 8x - 2 + 3x - 8x + 4 + 20 &= 0, \\ -7x^2 + 3x + 22 &= 0, \\ 7x^2 - 3x - 22 &= 0, \\ (7x + 11)(x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$x = 2, \quad -\tfrac{11}{7}.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación lineal, obtenemos los valores correspondientes de $y = 3$, $-\frac{29}{7}$ Las dos soluciones son entonces $x = 2$, $y = 3$ y $x = -\frac{11}{7}$, $y = -\frac{29}{7}$, ó $(2, 3)$ y $(-\frac{11}{7}, -\frac{29}{7})$

Problemas

Resuélvanse los sistemas de los problemas 1 a 6 tanto gráfica como algebraicamente.

1 $y = 4x^2$; $y = 8x$

2 $x - 2y = 10$; $y = x^2 + 2x - 15$

3 $y^2 = 4x$; $x - y = -4$

4 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$; $x + y + 3 = 0$

5 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$; $x + y = 4$

6 $xy = 1$; $x + y = 2$

Indicación: Recuérdese la sección 4.5 para la gráfica de esta ecuación cuadrática.

En cada uno de los problemas 7 a 10, determínese $A \cap B$ si

7 $A = \{(x, y) | y^2 + 2xy - 3x^2 + 7 = 0\}$; $B = \{(x, y) | x - 3y + 1 = 0\}$

8 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2x = 1\}$; $B = \{(x, y) | 2x + y - 5 = 0\}$

9 $A = \{(x, y) | 3xy + 6x = 4y\}$; $B = \{(x, y) | 2y - 3x - 4 = 0\}$

10 $A = \{(x, y) | 4x^2 + 3xy - 2y^2 - x - y + 1 = 0\}$; $B = \{(x, y) | x - 2y + 3 = 0\}$

11 La circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y la recta $y = mx + b$ se cortan en dos puntos, son tangentes o no se cortan, según que las soluciones del sistema formado por las ecuaciones

* La resolución gráfica de este sistema implica la representación gráfica de $x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 20 = 0$. En la Sección 11.2 estudiaremos problemas de esta especie.

sean reales y distintas, reales e iguales o imaginarias. Determínese el valor de b en función de a y m de modo que la recta sea tangente a la circunferencia.

12 Determínense las dimensiones de un rectángulo si su diagonal mide 17 centímetros y su perímetro es 46 centímetros.

13 El producto de un número de dos cifras por el número obtenido invirtiendo el orden de estas cifras es 736. Si la diferencia de los dos números es 9, determínense los números.

14 A y B, trabajando juntos, pueden completar cierta obra en $7\frac{1}{2}$ horas. Si A trabaja solo tardaría 8 horas más que B en completar la obra. ¿Cuánto tardaría cada uno trabajando solo?

15 La suma de dos números es 11 y la suma de sus recíprocos es $\frac{11}{28}$. Determínense los números.

9
Matrices y determinantes

En el capítulo anterior estudiamos sistemas de ecuaciones lineales del tipo

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v. \end{aligned}$$

En muchos casos, las propiedades de estos sistemas, en particular el hecho de que exista o no una solución única, depende de las propiedades de la disposición de coeficientes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Una disposición rectangular de números como ésta se denomina *matriz*. En este capítulo estudiaremos algunas de las propiedades básicas del conjunto de las matrices; mostraremos que algunos de los axiomas (pero no todos) de los números reales se cumplen para algunos importantes conjuntos de matrices. Indicaremos la forma en que los métodos matriciales se pueden usar no sólo para determinar si un sistema dado de ecuaciones tiene o no solución, sino también como medio de obtener la solución. Estos métodos matriciales son muy importantes en la operación de los computadores electrónicos de alta velocidad que hay en la actualidad.

9.1. Propiedades básicas de las matrices

Llamamos *matriz* a una disposición rectangular de números, por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Los números 1, 2, -3, etc., que aparecen en la matriz se llaman *elementos* de la matriz. En este texto consideraremos solamente matrices cuyos elementos son

números reales. Las líneas horizontales se llaman *filas* o *renglones* y las verticales *columnas*. En general, si una matriz tiene m filas y n columnas, la llamaremos matriz de $m \times n$ (elementos). El número de filas se indica primero y, en seguida, el de columnas. Así, en los ejemplos anteriores, la primera es una matriz de 2×3, en tanto que la segunda es de 3×1. Designaremos las matrices mediante letras mayúsculas y utilizaremos paréntesis cuadrados* para encerrar la disposición de sus elementos. Por ejemplo,

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para determinar si dos matrices son iguales utilizaremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 9.1. *Dos matrices A y B son iguales si y sólo si*

(1) *Las dos disposiciones rectangulares tienen igual número de filas e igual número de columnas.*

(2) *Los elementos correspondientes son iguales.*

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{2}{1} & 3-2 & 3 \\ -\frac{2}{2} & 2 \times 0 & \frac{2}{1} \end{bmatrix},$$

entonces, $A \neq B$, $B \neq C$, pero $A = C$.

Si x e y son números reales que constituyen una solución para los sistemas

$$a_1x + b_1y = u_1 \quad ; \quad a_2x + b_2y = u_2$$

y

$$c_1x + d_1y = v_1 \quad ; \quad c_2x + d_2y = v_2,$$

entonces, sumando las dos ecuaciones de arriba y las dos de abajo y usando la distributividad, obtenemos

$$(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = u_1 + u_2$$
$$(c_1 + c_2)x + (d_1 + d_2)y = v_1 + v_2.$$

Por tanto, x e y constituyen también una solución para el sistema cuyos coeficientes se obtienen sumando los coeficientes correspondientes de los dos sistemas.

---

* Otras notaciones utilizan paréntesis normales o barras verticales dobles.

Utilizamos esta propiedad como motivación para definir la suma de dos matrices con igual número de filas e igual número de columnas.

Definición 9.2. *La suma de dos matrices A y B, que designamos por $A + B$, es la matriz tal que cada uno de sus elementos es la suma de los elementos correspondientes de A y B.*

En el ejemplo anterior,

$$A + B = \begin{bmatrix} 2-1 & 1+0 & 3+2 \\ -1+2 & 0+1 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

La suma de dos matrices de 2 por 3 es también una matriz de 2 por 3; en general, la suma de dos matrices de m por n es también una matriz de m por n; podemos decir entonces que el conjunto de las matrices de m por n es cerrado respecto de la operación de adición. Así, todo conjunto de matrices con igual número de filas e igual número de columnas satisface el Axioma 1A. La operación de adición de matrices también satisface las propiedades de asociatividad y de conmutatividad (véanse ejemplos en los problemas 13 y 14), de modo que los Axiomas 2A y 3A también se cumplen para el conjunto de matrices de m por n.

Definamos ahora una matriz que sirve de identidad para la adición de matrices.

Definición 9.3. *Si todos los elementos de una matriz son iguales a* 0, *entonces la matriz se llama* matriz cero *o* nula *y se designa por* 0.

Así, la matriz cero de 2 por 3 es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $A + 0 = A$ para cada matriz A (se subentiende en este caso que 0 tiene el mismo número de filas y de columnas que A). Por tanto, la matriz 0 es la solución única de la ecuación matricial $A + X = A$ y podemos entonces decir que el conjunto de las matrices de m por n satisface el Axioma 5A.

Para hacer ver que todo conjunto de matrices satisface el Axioma 6A, debemos mostrar que toda matriz A tiene una inversa aditiva, esto es, una solución única para la ecuación matricial $A + X = 0$.

Definición 9.4. *La* negativa *de una matriz A es la matriz cuyos elementos son los negativos de los elementos correspondientes de A. Designamos la negativa de A por $-A$.*

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ entonces, } -A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

La negativa $-A$ de una matriz A tiene siempre el mismo número de filas y de columnas que A; por consiguiente, podemos sumar: $A + (-A) = 0$, tal como se requiere.

Ahora podemos definir la operación de *substracción* de matrices del mismo modo en que definimos la substracción de números reales en la sección 2.2. a saber,

$$A - B = A + (-B).$$

Si x e y son números reales que constituyen solución del sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v, \end{aligned}$$

entonces, multiplicando cada ecuación por el mismo número k, obtenemos

$$\begin{aligned} (ka)x + (kb)y &= ku \\ (kc)x + (kd)y &= kv, \end{aligned}$$

de modo que x e y constituyen también una solución del sistema cuyos coeficientes se obtienen multiplicando los coeficientes correspondientes del sistema original por el mismo número k. Usamos esta propiedad para motivar la definición de la aplicación de multiplicación de una matriz por un escalar (esto es, un número real que actúa como «factor escalar»).

DEFINICIÓN 9.5. *El producto de un escalar k y una matriz A, designado por kA, es la matriz tal que cada elemento de ella es k veces el elemento correspondiente de A.*

Nuevamente, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

entonces,

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad -3A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Nótese que en el caso de que $k = -1$, obtenemos el resultado $(-1)A = -A$, el cual es análogo a la propiedad probada para los números reales en la sección 2.2.

El conjunto de las matrices de m por n, junto con las operaciones de adición y de multiplicación por escalar, constituye un espacio vectorial sobre los reales (compárese con la sección 7.3). Véanse los problemas 13 a 24 para el caso de 2 por 3

PROBLEMAS

Encuéntrense los valores de a, b, c y d en los problemas 1 a 4.

1 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} a+3 & 2b+1 \\ c-3 & 2d-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 2a+3 & 2b-2 & c+1 \\ a & 4 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-5 & b+1 & 2c+3 \\ -8 & 4 & 2d \end{bmatrix}$

En los problemas 5 a 10, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

encuéntrese una matriz de 2 por 3 igual a la expresión dada.

5 $A + B$ 6 $2A + 3B$ 7 $A - B$

8 $3A - 2B$ 9 $A + 2(B - A)$ 10 $-3(A + 2B)$

Efectúense las operaciones indicadas.

11 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & x \\ 3 & y & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} x & y & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

12 $2\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ a & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \\ a & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & b \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

Si

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix}$$

son tres matrices de 2 por 3 y k y h son números reales, demuéstrese que:

13 La adición de matrices es conmutativa, es decir,

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1.$$

14 La adición de matrices es asociativa, es decir,

$$(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3).$$

15 $A_1 + A_2$ es una matriz de 2 por 3.

16 Si $A_1 + A_2 = A_1 + A_3$, entonces $A_2 = A_3$.

17 $A_1 + O = A_1$. 18 $A_1 + (-A_1) = O$.

19 $k(A_1 + A_2) = kA_1 + kA_2$. 20 $(k + h)A_1 + hA_1 + hA_1$.

21 $0A_1 = O$. 22 $kO = O$.

23 $1 \cdot A_1 = A_1$ 24 $k(hA_1) = (kh)A_1$.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones matriciales, esto es, encuéntrese la matriz

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

que satisface la ecuación dada.

25 $X + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Indicación. Para obtener el resultado, hágase la multiplicación escalar del segundo miembro, y en seguida, súmese el inverso aditivo de

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a cada miembro de la ecuación

Resuélvanse las ecuaciones matriciales en los problemas 26 a 28.

26 $X - 2\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

27 $2X + 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

28 $2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

29 Considérense las matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La segunda matriz se llama *traspuesta* de la primera, ya que se obtiene intercambiando filas y columnas. Para una matriz cualquiera A, su traspuesta se designa por A^T. ¿Está definida siempre la adición de A y de su traspuesta A^T? Explíquese

30 Demuéstrese que para toda matriz de 2 por 3

(a) $-A^T = (-A)^T$ (b) $(A^T)^T = A$.

¿Se cumplen estas propiedades para una matriz cualquiera?

31 Como resultado de la explicación del problema 27, debe entenderse que $A + A^T$ está definida si A es una matriz de n por n, o sea, una matriz *cuadrada* Si A y B son matrices de 2 por 2, demuéstrese que

$$A^T + B^T = (A + B)^T.$$

32 Con las mismas condiciones del problema 31, demuéstrese que

$$A^T + B = (A + B^T)^T.$$

9.2. Productos de matrices

En la sección anterior definimos una operación de adición para matrices que tienen igual número de filas e igual número de columnas y también definimos una operación de multiplicación de matrices por un escalar. En la presente sección definiremos una operación de multiplicación de una matriz por otra.

Primeramente presentaremos una manera de representar una ecuación lineal en forma de producto y en seguida mostraremos la forma en que pueden utilizarse las matrices para representar sistemas de ecuaciones. Si $[a, b]$ es una matriz de 1 por 2 y

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

es una matriz de 2 por 1, entonces definimos su producto como

$$[a \quad b]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [ax + by];$$

esto es, multiplicamos el primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna y sumamos a este producto el producto de los segundos elementos. Análogamente, definimos

$$[a \quad b \quad c]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [ax + by + cz],$$

y así podemos dar una definición similar para el producto de una fila de n elementos por una columna con el mismo número de elementos.

Para representar un sistema de ecuaciones en forma matricial, escribimos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 39 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, obtenemos el elemento 23 en la primera fila y primera columna del producto, haciendo el producto matricial de la primera fila $[2 \quad 3]$ del primer factor con la primera columna $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]$ del segundo factor. Análogamente, obtenemos el primer elemento 39 de la segunda fila del producto, haciendo el producto

matricial de la segunda fila $[4 \quad 5]$ del primer factor con la primera columna $\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}$ del segundo factor.

Definiremos ahora el producto de dos matrices A y B donde el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

DEFINICIÓN 9.6. *El* producto *de dos matrices A y B es la matriz AB cuyo elemento en la i-ésima columna y j-ésima fila es el producto matricial de la i-ésima columna de A por la j-ésima fila de B.*

Esta definición puede parecer complicada en un comienzo; sin embargo, no será difícil trabajar con ella una vez que se hayan examinado algunos ejemplos.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. Si A y B son matrices de 2 por 2, entonces su producto AB es una matriz de 2 por 2; por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces el elemento de AB en la segunda fila y segunda columna está dado por

$$[4 \quad 5]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 8.$$

El producto AB es, entonces,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 7 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 4 \\ 39 & 8 \end{bmatrix}.$$

Para todo trío de matrices A, B y C tales que están definidos los productos AB, $(AB)C$, BC y $A(BC)$, se puede demostrar que vale la ley de asociatividad, esto es, $A(BC) = (AB)C$. Además, si AC, BC y $A + B$ están definidos, también se cumple la distributividad $(A + B)C = AC + BC$ y si CA, CB y $A + B$ están definidos se tiene $C(A + B) = CA + CB$. Sin embargo, una de las propiedades más importantes de los números reales, la conmutatividad de la multiplicación, no es válida para la multiplicación de matrices. Por ejemplo, para las matrices A y B del ejemplo ilustrativo 1, se tiene:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \\ 7 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 7 \cdot 3 + 0 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 14 & 21 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $AB \neq BA$, de modo que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. Si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

podemos determinar AB y BA del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix} \\
&= \begin{bmatrix} (3)(0) + (2)(1) + (-1)(5) & (3)(2) + (2)(3) + (-1)(-2) \\ (1)(0) + (2)(1) + (4)(5) & (1)(2) + (2)(3) + (4)(-2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 14 \\ 22 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (0)(3) + (2)(1) & (0)(2) + (2)(2) & (0)(-1) + (2)(4) \\ (1)(3) + (3)(1) & (1)(2) + (3)(2) & (1)(-1) + (3)(4) \\ (5)(3) + (-2)(1) & (5)(2) + (-2)(2) & (5)(-1) + (-2)(4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 8 & 11 \\ 13 & 6 & -13 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

En este ejemplo, AB es una matriz de 2 por 2 y BA es una matriz de 3 por 3, de modo que no pueden ser iguales. En forma más general, si A es una matriz de m por n y B es una matriz de n por q, entonces el producto AB está definido y es una matriz de m por q. Si m no es igual a q, entonces el otro producto, el de B por A, no está definido.

En el resto del capítulo consideraremos una clase especial de matrices, las matrices *cuadradas*, las cuales tienen ciertas propiedades algebraicas particulares.

Si el número de filas de una matriz es igual al número de columnas, entonces decimos que la matriz es *cuadrada* Tales matrices tienen una importancia especial, ya que una matriz de n por n corresponde a un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, sistemas que son de ocurrencia frecuente en álgebra. Veremos que también el conjunto de las matrices de n por n satisface varios de los axiomas para los números reales que estudiamos en el capítulo 2.

En primer lugar, obsérvemos que la suma de dos matrices de n por n está siempre definida y es también una matriz de n por n, de modo que este conjunto satisface el axioma de clausura respecto de la adición. Como dijimos anteriormente, este conjunto satisface también la conmutatividad y la asociatividad de la adición. La matriz cero de n por n es la identidad aditiva para el conjunto de matrices de n por n y la negativa de una matriz de n por n es también una matriz de n por n; luego esta colección de matrices satisface también los Axiomas 5A y 6A.

El producto de dos matrices de n por n es también una matriz de n por n, de modo que esta colección satisface el axioma de clausura respecto de la multi-

plicación. También satisface el axioma de asociatividad respecto de la multiplicación, pero no el de conmutatividad, como se puede observar al final del ejemplo ilustrativo 1. El conjunto también satisface el axioma de distributividad.

Observemos en este momento que el trabajo desarrollado en el capítulo 2 nos permite sacar como conclusión varias propiedades del conjunto de matrices n por n. Por ejemplo, nuestra demostración de que $a \cdot 0 = 0$ para todo a en R no depende del hecho de que estuviéramos trabajando con el conjunto particular R, sino del hecho de que estábamos trabajando con un conjunto que satisfacía ciertos axiomas algebraicos. Ahora, el conjunto de las matrices de n por n también satisface todos los axiomas que utilizamos en la demostración de ese resultado, de modo que también se cumple para las matrices el resultado análogo, esto es, $A \cdot 0 = 0$, para toda matriz A de n por n.

Demostraremos ahora que el conjunto de matrices de n por n también satisface el Axioma 5M, lo cual garantiza la existencia de una identidad para la multiplicación.

DEFINICIÓN 9.7. *Si una matriz cuadrada de n por n tiene elementos iguales a* 1 *a lo largo de su diagonal principal (del extremo izquierdo superior al derecho inferior) e igual a* 0 *en las demás posiciones, entonces la matriz se llama matriz* identidad *de n por n y se denota por I. Para toda matriz A de n por n, si I es la matriz identidad, entonces $A \cdot I = I \cdot A = A$.*

Por ejemplo, en el caso $n = 3$, la identidad I sería

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

demuéstrese que $AI = A = IA$.

Solución:

$$AI = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a)(1) + (b)(0) & (a)(0) + (b)(1) \\ (c)(1) + (d)(0) & (c)(0) + (d)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(a) + (0)(c) & (1)(b) + (0)(d) \\ (0)(a) + (1)(c) & (0)(b) + (1)(d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

Problemas

Efectúese la multiplicación indicada en cada uno de los problemas siguientes.

1 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

4 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

5 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

6 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

7 $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3}$.

8 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

En los problemas 9 a 13, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

encuéntrense matrices de 2 por 2 iguales a las expresiones dadas.

9 $A(B + C)$

10 $(AB)C$

11 $A^T B^T$

12 $(AC)^T$

13 $C^T(BA)$

14 Explíquese cómo el producto matricial

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

igualado a la matriz $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, es equivalente a

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \quad a_2 x + b_2 y = c_2.$$

Recuérdese la ec. (8.25).

15 Escríbase el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x \quad 2y &= -12, \end{aligned}$$

en forma de ecuación matricial y resuélvase para la matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

16 Resuélvase la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 27 \\ -19 \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

17 Resuélvase la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

18 Verifíquese si la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{tiene a} \quad X = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

por solución.

19 ¿Satisface

$$X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{7}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

la ecuación del problema 18?

20 ¿Existe una matriz A de 2 por 2 tal que

$$X = A\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad X = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}?$$

21 Haciendo $XX = X^2$, ¿satisface

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{la ecuación} \quad X^2 - 3X + 2I = O?$$

Si A, B y C son matrices de 2 por 2, demuéstrense las proposiciones de los problemas 22 a 25.

22 $(AB)C = A(BC)$

23 $A(B + C) = AB + AC$

24 $AO = OA = O$

25 $(AB)^T = B^T A^T$

26 Demuéstrese que el producto de dos matrices puede ser la matriz cero, aunque ninguna de ellas sea cero. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

27 Demuéstrese que el cuadrado de una matriz puede ser la matriz cero aun cuando la matriz misma no sea cero.

Indicación: Considerese

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

28 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Demuéstrese que $AB = I$. En este caso, cada una de las matrices se denomina inversa multiplicativa de la otra. Véase la seccion siguiente. Demuéstrese que también $BA = I$.

29 Demuéstrese que $AB = I$ y $BA = I$ si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

30 Toda matriz A tal que $AA^T = I$ se llama *matriz ortogonal*. Demuéstrese que cada una de las matrices siguientes es ortogonal. [En (*c*), ϕ es un ángulo cualquiera.]

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ -\cos\phi & \operatorname{sen}\phi \end{bmatrix}$

31 Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Demuéstrese que si A es ortogonal, entonces (1) $a^2 + b^2 = 1$, (2) $c^2 + d^2 = 1$, (3) $ac + bd = 0$.

32 Enúnciese y demuéstrese la reciproca de la proposicion formulada en el problema 31.

9.3. Inversas multiplicativas de matrices

En el capitulo 2 consideramos ecuaciones de la forma $ax = b$ para números reales a y b y demostramos que esa ecuación tiene una solución única si $a \neq 0$. Esto se deduce del importante hecho de que todo $a \neq 0$ en R tiene un inverso multiplicativo; esto es, existe un número real único $1/a$ tal que $a \cdot (1/a) = 1$ y $(1/a) \cdot a = 1$.

En este capitulo consideraremos el problema correspondiente para matrices de n por n. ¿Bajo qué condiciones existe una matriz única X tal que $AX = I$? Por sencillez, nos limitaremos al caso de matrices de 2 por 2 en las cuales los cálculos se pueden desarrollar en forma simple.

DEFINICIÓN 9.8. *Si existe una matriz única X de n por n tal que $A \cdot X = I$, entonces se dice que X es la* inversa multiplicativa *de A y escribimos $X = A^{-1}$.*

Ejemplo ilustrativo 1. $I \cdot I = I$, de modo que I es su propia inversa multiplicativa; también

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de modo que también estas dos matrices son sus propias inversas multiplicativas.

Ejemplo ilustrativo 2. Si

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A \cdot X=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I,$$

de modo que $X = A^{-1}$. Obsérvese que en este caso se tiene también $X \cdot A - I$. En general, se cumple que si $A \cdot X = I$, entonces también $X \cdot A = I$, aun cuando el producto de dos matrices no siempre es conmutativo.

Ejemplo ilustrativo 3. Sabemos que $0 \cdot X = 0$, para todo X, de modo que no existe inversa multiplicativa para la matriz cero. Además, existen matrices diferentes de cero que tampoco tienen inversas multiplicativas, por ejemplo, si

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

entonces

$$C \cdot X=\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De esto se sigue que, independientemente de la forma en que elijamos los elementos x, y, z y w, nunca podremos obtener un 1 en la esquina inferior derecha, de modo que no puede haber solución para la ecuación $CX = I$; esto es, la matriz C no tiene inversa multiplicativa aun cuando $C \neq 0$. Por tanto, el conjunto de las matrices de n por n no satisface el Axioma 5M (si $n > 1$).

Determinaremos a continuación las condiciones precisas bajo las cuales puede existir una inversa multiplicativa para una matriz de 2 por 2.

Supongamos que

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Si A tiene una inversa multiplicativa, entonces tenemos una matriz

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \quad \text{tal que} \quad AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.1}$$

o, utilizando la Definición 9.6, esto es equivalente a

$$ax + bz = 1, \quad cx + dz = 0, \tag{9.2}$$

$$ay + bw = 0, \quad cy + dw = 1. \tag{9.3}$$

Si eliminamos z y en seguida, en forma análoga, x, de las ecs. (9.2) obtenemos

$$(ad - bc)x = d \quad \text{y} \quad (ad - bc)z = -c. \tag{9.4}$$

Aplicando el mismo método a las dos ecuaciones en (9.3), obtenemos también

$$(ad - bc)y = -b \quad \text{y} \quad (ad - bc)w = a. \tag{9.5}$$

Si estas ecuaciones se resuelven respecto de x, y, z y w (lo cual puede hacerse si $ad - bc \neq 0$), tenemos

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad z = \frac{-c}{ad - bc}, \tag{9.6}$$

y

$$y = \frac{-b}{ad - bc}, \quad w = \frac{a}{ad - bc}. \tag{9.7}$$

Resulta que si el número real $ad - bc$ es distinto de cero, entonces existe una matriz única X que es solución de la ecuación $AX = I$. Este resultado puede resumirse en el siguiente teorema.

TEOREMA 9.1. *Si*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es una matriz de 2 por 2 con $ad - bc \neq 0$, *entonces existe una inversa multiplicativa* A^{-1} *de* A *dada por*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ejemplo ilustrativo 4. Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix},$$

entonces $ad - bc = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 7 = 15$, de modo que A^{-1} existe y está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{7}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

Verifiquemos este resultado:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{7}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{15} + \frac{7}{15} & \frac{2}{15} - \frac{2}{15} \\ \frac{28}{15} - \frac{28}{15} & \frac{7}{15} + \frac{8}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo ilustrativo 5. Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix},$$

entonces $ad - bc = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 8 = 0$, de modo que no podemos usar el método anterior para encontrar una inversa multiplicativa para A.

En la sección que sigue, estudiaremos el número $ad - bc$ y demostraremos que, si una matriz dada de 2 por 2 tiene una inversa multiplicativa, entonces este número es diferente de cero.

Problemas

En los problemas 1 a 8, encuéntrese la inversa de la matriz dada, si existe.

1 $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 4 $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 6 $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ 7 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 8 $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

9 Demuéstrese que $I^{-1} = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

10 Para toda matriz ortogonal A, ¿cuál es la relación entre A^{-1} y A^T? Recuérdese el problema 30 de la sección anterior.

11 Sea A la matriz de 3 por 3

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Supóngase que existe una inversa A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$, siendo I la matriz identidad de 3 por 3. Demuéstrese que deben resolverse nueve ecuaciones para determinar A^{-1} y explíquese cómo pueden obtenerse estas ecuaciones.

En los problemas 12 y 13, sean

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix},$$

y supóngase que existe la inversa de cada una. Demuéstrese que

12 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

13 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

9.4. Determinantes de orden dos

En la sección anterior estudiamos las inversas multiplicativas de las matrices de 2 por 2 y demostramos que una matriz A tiene una inversa multiplicativa A^{-1} si cierto número real asociado con la matriz es diferente de cero. En la presente sección estudiaremos este número con mayor detalle y demostraremos un recíproco del Teorema 9.1 en relación con las inversas multiplicativas.

DEFINICIÓN 9.9. *Si A es una matriz de 2 por 2 dada por*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

entonces el determinante *de A se define como el número real*

$$\delta(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

El símbolo $\delta(A)$ se lee «delta de A» o «determinante de A».

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 5\cdot 2 = 2.$$

$$\text{Si } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \delta(B) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 6\cdot 2 = 0.$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. Si

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\delta(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

DEFINICIÓN 9.10. *Si A es una matriz de 2 por 2 y $\delta(A) = 0$, entonces se dice que A es singular; si $\delta(A) \neq 0$, entonces se dice que A es* no singular. *La matriz A del ejemplo ilustrativo 1 es no singular, en tanto que la matriz B es singular. La matriz identidad I de 2 por 2 es no singular.*

El resultado del Teorema 9.1 en la sección anterior expresa que toda matriz no singular de 2 por 2 tiene una inversa multiplicativa.

Demostraremos ahora una propiedad de los determinantes de las matrices de 2 por 2 que es útil para demostrar un recíproco del Teorema 9.1.

TEOREMA 9.2. *Para dos matrices cualesquiera de 2 por 2, A y X, se tiene $\delta(AX) = \delta(A)\delta(X)$; esto es, el determinante del producto es igual al producto de los determinantes.*

Demostración: Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

entonces

$$AX = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix},$$

de modo que $\delta(A)\delta(X) = (ad - bc)(xw - zy)$ y $\delta(AX) = (ax + bz)(cy + dw) - (cx + dz)(ay + bw)$ y cada una de estas expresiones es igual a $adxw + cbzy - cbxw - adzy$.

TEOREMA 9.3. Recíproco del Teorema 9.1. *Si A tiene una inversa multiplicativa, entonces $\delta(A) \neq 0$.*

Demostración. Si existe una solución X para la ecuación $AX = I$, entonces $\delta(A)\delta(X) = \delta(AX) = \delta(I)$; pero $\delta(I) = 1$ y, por tanto, $\delta(A)$ no puede ser cero.

PROBLEMAS

Calcúlense los determinantes en los problemas 1 a 6.

1 $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ 2 $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ 3 $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

4 $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ 5 $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix}$ 6 $\begin{vmatrix} \sec\theta & \tan\theta \\ \tan\theta & \sec\theta \end{vmatrix}$

7 Demuéstrese que si A es una matriz de 2 por 2 y k es un escalar real, entonces $\delta(kA) = k^2\delta(A)$.

8 Demuéstrese que si $\delta(A) \neq 0$, teniendo, por tanto, A una inversa multiplicativa A, entonces $\delta(A^{-1}) = 1/\delta(A)$.

9 Demuéstrese que si A y B son matrices no singulares de 2 por 2, entonces AB y BA son ambas matrices no singulares de 2 por 2.

Indicación: Considérense los determinantes de AB y BA.

10 Despéjese x en: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0$

11 Despéjese x en: $\begin{vmatrix} 2x & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = 7x$

12 Demuéstrese la identidad:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ x-2 & 5 \end{vmatrix} \equiv 2(x-2).$$

13 Demuéstrese la identidad:

$$\begin{vmatrix} a-b & 0 \\ 1 & c-d \end{vmatrix} \equiv (a-b)(c-d).$$

14 ¿Para qué valores de x es

$$\begin{vmatrix} x & 5 \\ 125 & x \end{vmatrix} > 0?$$

15 ¿Qué puede decirse de la naturaleza de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ si

$$\delta\begin{vmatrix} b & 4a \\ c & b \end{vmatrix} > 0, \quad = 0, \quad < 0?$$

16 Demuéstrese que si

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

entonces

$$\delta(A - xI) = x^2 - (a_1 + b_2)x + \delta(A).$$

Esta expresión se llama *polinomio característico* de A (en este caso es de grado 2).

17 Si el polinomio característico se iguala a cero, obtenemos la *ecuación característica* de A. Las raíces de esta ecuación se llaman *raíces características*. Determínense las raíces características de

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

9.5 Solución de sistemas de ecuaciones mediante matrices

Al comienzo del capítulo mostramos cómo podían utilizarse las matrices para describir sistemas de ecuaciones lineales y en seguida obtuvimos varias

propiedades algebraicas de las matrices, en particular del conjunto de matrices de 2 por 2. En esta sección, mostraremos la forma en que pueden utilizarse las propiedades algebraicas de las matrices de 2 por 2 para analizar y resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En la próxima sección indicaremos cómo algunas de estas ideas pueden extenderse al caso de sistemas lineales de orden superior, esto es, con un número mayor de ecuaciones y de incógnitas.

Al estudiar el álgebra de los números reales en el capítulo 2, consideramos ecuaciones de la forma $ax = b$, y demostramos que si a tenía un inverso multiplicativo $1/a$, entonces podíamos resolver la ecuación multiplicando ambos miembros por $1/a$ y utilizando la propiedad de asociatividad para obtener $(1/a)b = (1/a)(ax) = ((1/a)a)x = 1 \cdot x = x$.

Análogamente, si la matriz A tiene una inversa multiplicativa A^{-1}, podemos resolver la ecuación matricial $AX = B$ multiplicando ambos miembros a izquierda por A^{-1} y obtenemos $A^{-1} \cdot B = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = IX = X$.

Ilustraremos este proceso con algunos ejemplos.

Ejemplo ilustrativo 1. Si

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \quad \delta(A) = 1 \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Si

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

entonces la ecuación matricial $AX = B$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

tiene por solución

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot 4 + 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo ilustrativo 2. Si A y X son como en el ejemplo anterior y si

$$C = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix},$$

entonces la solución de $AX = C$ es

$$X = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Dado un sistema de ecuaciones lineales, podemos expresar este sistema en forma de ecuación matricial y aplicar el método matricial para obtener una solución del sistema de ecuaciones. Por ejemplo, dado el sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas

$$5x + 3y = 4, \quad 3x + 2y = 3,$$

podemos reescribirlo en forma de ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

que es el mismo problema que ya analizamos en el ejemplo ilustrativo 1; por tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = -1$ e $y = 3$.

Es útil disponer de una fórmula explicita para las soluciones x e y de un sistema de ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2,$$

el cual puede escribirse como $AX = C$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Si $\delta(A) = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, entonces A^{-1} existe y está dada por el Teorema 9.1. Luego,

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{\delta(A)} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta(A)} \begin{bmatrix} b_2c_1 + (-b_1)c_2 \\ (-a_2)c_1 + a_1c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Se sigue que las soluciones x e y del sistema

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2$$

pueden escribirse mediante determinantes como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{9.8}$$

Esta fórmula explícita para la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas es un ejemplo de la *Regla de Cramer*, método que puede generalizarse para resolver sistemas de n ecuaciones en n incógnitas. Estas fórmulas son idénticas, para el caso de 2 por 2, con las fórmulas desarrolladas algebraicamente en el ejemplo 3 de la sección 8.10.

PROBLEMAS

Resuélvanse las ecuaciones matriciales siguientes tal como en el ejemplo ilustrativo 1:

1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \end{bmatrix}$.

2 $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -19 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}X = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}$ donde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

4 Encuéntrese una matriz

$$Y = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \text{ tal que } \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}Y = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indicación: Multiplíquense ambos miembros por la inversa de una matriz.

5 Explíquese por qué la ecuación matricial $AY = D$ tiene siempre una solución si A es una matriz no singular de 2 por 2 y X y D son matrices de 2 por 2.

6 Demuéstrese que la matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es una solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}X = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

¿Por qué los métodos de esta sección no sirven para encontrar la solución de esta ecuación?

Problemas 7 a 12: Utilícese la fórmula explícita dada al final de la sección para encontrar soluciones a los sistemas de ecuaciones en los problemas 1 a 6 de la sección 8.10.

9.6. Determinantes y sistemas de ecuaciones de orden tres

Hasta ahora hemos considerado matrices de 2 por 2 y sistemas de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas. En la presente sección, veremos cómo estas mismas técnicas pueden extenderse a matrices determinantes y sistemas de orden 3 e indicaremos brevemente cómo estas ideas pueden también extenderse a sistemas de orden mayor que 3.

Tal como en el caso de los sistemas de orden 2, podemos escribir un sistema de ecuaciones lineales de orden 3 en forma matricial como sigue. El sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

se abrevia como $AX = D$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

Si existe una inversa multiplicativa para la matriz A, entonces podemos encontrar una solución para la ecuación matricial $AX = D$ multiplicando ambos miembros de la ecuación por A^{-1} y obtenemos $X = A^{-1}D$.

Ejemplo ilustrativo 1. El sistema

$$\begin{aligned} 3x \quad\quad - z &= 3 \\ -3x + y + z &= 2 \\ -5x \quad\quad + 2z &= 4 \end{aligned}$$

puede escribirse $AX = D$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

En este caso, la matriz A tiene una inversa A^{-1} dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

ya que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, podemos encontrar una solución $X = A^{-1}D$ como sigue:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ 1\cdot 3 + 1\cdot 2 + 0\cdot 4 \\ 5\cdot 3 + 0\cdot 2 + 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar el resultado haciendo ver que $x = 10$, $y = 5$ y $z = 27$ dan una solución para el sistema original.

Es evidente que podríamos haber resuelto el sistema de ecuaciones directamente por medio de métodos algebraicos y sin introducir matrices, tal como en la

sección 8.11. Una de las ventajas del enfoque matricial es que, una vez encontrada la inversa de la matriz de los coeficientes, es fácil determinar las soluciones para cualquier matriz D de valores en el segundo miembro del sistema.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. Para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x \qquad\quad - z &= 21 \\ -3x + y + z &= 10 \\ -5x \qquad + 2z &= 3 \end{aligned}$$

procediendo como en el ejemplo ilustrativo 1, obtenemos

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 31 \\ 114 \end{bmatrix}.$$

Estas manipulaciones matriciales se adaptan muy bien a los computadores de alta velocidad Métodos similares a los anteriores se pueden utilizar para sistemas de n por n. La dificultad para aplicar los métodos matriciales está en que a menudo se requieren muchos cálculos para encontrar la inversa de una matriz e incluso para demostrar que esta inversa existe. En el caso de 2 por 2, estábamos seguros de la existencia de la inversa multiplicativa en cuanto sabíamos que el determinante era diferente de cero. Definiremos ahora un determinante para una matriz de 3 por 3 e indicaremos en seguida cómo interviene este determinante en la resolución de un sistema lineal de orden 3.

Consideremos ahora la matriz cuadrada de orden tres,

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}. \tag{9.9}$$

Por cada elemento de esta matriz, existe una matriz de orden 2 que se obtiene eliminando la fila y la columna en que el elemento se encuentra. El determinante de orden 2, asociado con la matriz así obtenida, se llama *menor* del elemento considerado. Por ejemplo, designando el menor de un elemento cualquiera por la letra mayúscula correspondiente, tenemos

$$\delta(A_1) = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \delta(B_3) = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \delta(C_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Definamos ahora el determinante de la matriz de orden tres de la ec. (8.4) como

$$\delta(M) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\, \delta(A_1) - b_1\, \delta(B_1) + c_1\, \delta(C_1). \tag{9.10}$$

EJEMPLO 1. Calcúlese el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 2(-4+3) + 1(6-4) + 3(-9+8) \\ &= -2+2-3 \\ &= -3.\end{aligned}$$

Podemos expresar el determinante $\delta(M)$ en función explícita de los elementos de M como sigue

$$\begin{aligned}\delta(M) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \qquad (9.11)\end{aligned}$$

PROBLEMAS

Encuéntrense soluciones para los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando los métodos de los ejemplos ilustrativos 1 y 2:

1 $3x - z = 4$; $-3x + y + z = 0$; $-5x + 2z = 7$.

2 $2x + z = 10$; $x + y = 5$; $5x + 3z = 27$

Calcúlese cada uno de los determinantes de los problemas 3 a 6.

3 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 4 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 5 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ 6 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

Utilizando los valores de la ec. (9.11), verifíquese que

▶ 7 $\delta(M) = -a_2\delta(A_2) + b_2\delta(B_2) - c_2\delta(C_2)$.

▶ 8 $\delta(M) = a_3\delta(A_3) - b_3\delta(B_3) + c_3\delta(C_3)$.

9 $\delta(M) = a_1\delta(A_1) - a_2\delta(A_2) + a_3\delta(A_3)$.

10 $\delta(M) = -b_1\delta(B_1) + b_2\delta(B_2) - b_3\delta(B_3)$.

11 $\delta(M) = c_1\delta(C_1) - c_2\delta(C_2) + c_3\delta(C_3)$.

Observación: El determinante de orden tres $\delta(M)$ podría haberse definido también mediante cualquiera de las ecuaciones dadas en los problemas 7, 8, 9, 10 u 11. La definición de la ec. (9.10) da el desarrollo de $\delta(M)$ en menores según los elementos de la primera fila. Los problemas 7 y 8 dan el desarrollo en menores según los elementos de la segunda y tercera filas, respectivamente. Los problemas 9, 10 y 11 dan el desarrollo según las columnas.

12 Desarróllense los determinantes en los problemas 3 a 6 en menores según los elementos de una fila o columna que no sea la primera.

13 Utilizando los resultados de los problemas 7 a 11 y la ec. (9.11), demuéstrese la proposición siguiente: el determinante de una matriz de orden tres puede expresarse como la suma de tres productos que se forman multiplicando cada elemento de una fila (o columna) por el menor correspondiente, asignándole a cada producto un signo más o menos, según que la suma de los números de la fila y la columna en que el elemento está ubicado sea par o impar.

14 Demuéstrese que

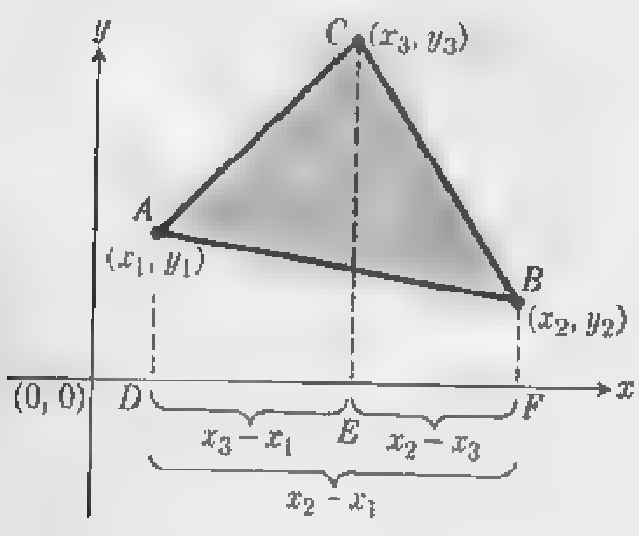
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

15 Utilizando la fig. 9-1 y recordando que el área de un trapecio es $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$, siendo b_1 y b_2 sus bases y h su altura, demuéstrese que el área K del triángulo ABC en función de las coordenadas de sus vértices es

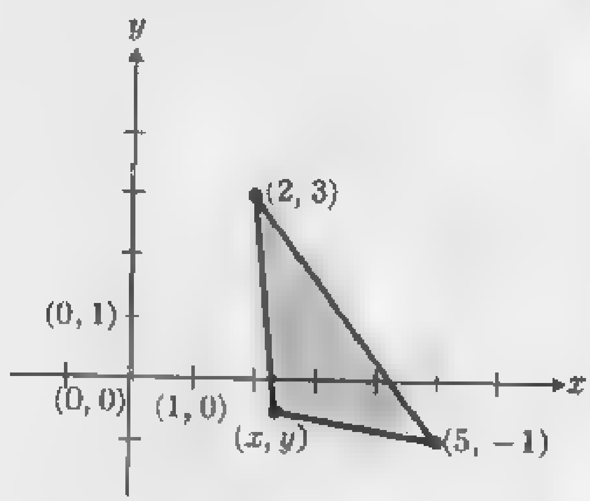
$$K = \text{área de } ADEC + CEFB - ADFB$$
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Indicación: Utilícese el problema 19

16 Determínese el área del triángulo cuyos vértices son (x, y), $(2, 3)$ y $(5, -1)$. (Véase fig. 9-2.)



9-1



9-2

17 Determínese el área del triángulo cuyos vértices son los puntos

(a) $(2, 3)$, $(5, 4)$ y $(4, 7)$ (b) $(-4, 2)$, $(-2, -3)$ y $(3, -1)$

18 Determínese la ecuación de la recta que pasa por $(-2, -4)$ y $(3, 5)$, utilizando el método indicado en esta sección.

▶19 La proposición de que el área del triángulo descrito en el problema 16 es igual a cero es equivalente al hecho de que el punto (x, y) es colineal con $(2, 3)$ y $(5, -1)$. Utilizando este hecho, determínese la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(5, -1)$.

20 Dos rectas no paralelas se cortan siempre en un punto. La condición para que tres rectas,

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2, \quad a_3x + b_3y = c_3,$$

pasen por un mismo punto (sean concurrentes) es que el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

sea igual a cero. Suponiendo que esto es verdadero, demuéstrese que las rectas $x - 2y = -3$, $3x - y = 1$, $5x - 2y = 1$ son concurrentes.

21 Determínese el valor de x si

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & x & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & x & -3 \\ 1 & 4 & -x \end{vmatrix} = 0$.

22 Demuéstrese que el sistema de ecuaciones $3x - 2y + 11 = 0$, $x - y + 5 = 0$, $2x + y = 2$ tiene una solución y determínese.

9.7. Determinantes de orden n

Como es de suponer, existen determinantes de matrices de orden finito arbitrario. Para estudiarlos y considerar sus propiedades generales, es conveniente utilizar una notación distinta para la matriz y sus elementos. Designemos la matriz por M y un elemento cualquiera por a_{ij} (léase «a sub i-j»), donde i indica el número de la fila y j el número de la columna en que el elemento en cuestión se encuentra. La notación para determinantes aquí utilizada fue introducida por el matemático inglés A. Cayley (1821-1895). De acuerdo con esta notación, la ec. 9.11 se escribe

$$\begin{aligned} \delta(M) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\qquad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\qquad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{9.12}$$

De esta expresión se ve claramente que cada uno de los seis productos consiste de un, y sólo un, elemento de cada fila y cada columna. Cada producto se ha ordenado colocando los primeros subíndices en orden numérico natural. A excepción del primer término, los segundos subíndices no están en orden natural. Consideremos el número de *inversiones* de los segundos subíndices, es decir, el número de veces que un entero precede a otro menor que él.

	Segundos subíndices	*Número de inversiones*
	1 2 3	0
Productos positivos	2 3 1	2
	3 1 2	2
	1 3 2	1
Productos negativos	2 1 3	1
	3 2 1	3

De esta tabla, vemos que los productos positivos tienen un número par de inversiones, en tanto que los negativos tienen un número impar. Luego, el signo de cada término puede expresarse como $(-1)^k$, donde k es el número de inversiones. Mediante una generalización directa de esta consideración definimos el determinante (de orden n) de la matriz cuadrada de n por n elementos. La expresión

$$\delta(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.13}$$

es el *determinante de orden n* asociado con una matriz M de n por n; esto es, definimos una función $\delta : M \longrightarrow \delta(M)$, donde M es una matriz de n por n y $\delta(M)$ está dado por la ec. (9.13). El valor de $\delta(M)$ es igual a la suma algebraica de todos los productos que se pueden formar tomando un, y sólo un, elemento de cada fila y cada columna. El signo de cada producto se elige como $(-1)^k$, siendo k el número de inversiones de los segundos subíndices cuando los factores se ordenan según el orden numérico natural de los primeros subíndices.

En todo producto posible de n elementos con los primeros subíndices en orden natural, el segundo subíndice del primer elemento puede ser uno cualquiera de n números, el subíndice del segundo elemento uno cualquiera de los $n-1$ números restantes y así sucesivamente, de modo que hay $n!$* $= n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ términos en el desarrollo de $\delta(M)$. Por ejemplo, hay $3! = 6$ términos en el

---

* El símbolo $n!$ (léase «n factorial») indica el producto de los enteros positivos de 1 a n. Específicamente, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, etc. Este símbolo será utilizado en capítulos posteriores.

desarrollo del determinante de orden 3, como ya lo vimos; $4! = 24$ términos en el de orden 4 y $5! = 120$ en el desarrollo del determinante de orden 5. Debido al gran número de términos que contiene el desarrollo de un determinante de orden alto, nuestra definición no nos proporciona un método conveniente para calcular el valor de un determinante de ese tipo. Antes de considerar un método más práctico para estos casos, demostraremos algunas propiedades elementales de los determinantes.

TEOREMA 9.4 *Si se permutan las filas y las columnas de una matriz, su determinante no cambia; es decir,* $\delta(M) = \delta(M^T)$.

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración: Recordemos que en nuestra notación el primer subíndice indica la fila y el segundo, la columna a las que un elemento pertenece. Si consideramos el determinante asociado con una nueva matriz M^T cuyas filas y columnas son, respectivamente, las columnas y las filas de M, cada término de $\delta(M^T)$ (determinante asociado con M^T) tendrá también un elemento de cada fila y de cada columna. Si los segundos subíndices se colocan en su orden numérico natural, el signo de cada término quedará determinado por el número de inversiones de los primeros subíndices. Luego, el intercambio de filas y columnas sólo cambia la notación, siendo el resultado siempre el mismo para cada término. En consecuencia, $\delta(M^T)$ es idéntico a $\delta(M)$.

Como consecuencia directa del Teorema 9.4, en todas las propiedades que siguen, las palabras «fila» y «columna» serán siempre intercambiables.

TEOREMA 9.5 *Si se cambian entre sí dos columnas (filas) de una matriz, su determinante cambia de signo.*

Demostración: Consideremos en primer lugar la permutación de dos columnas adyacentes. En el desarrollo del nuevo determinante, los primeros subíndices permanecerán iguales, pero los segundos subíndices, que representan a las columnas, quedarán permutados y, en consecuencia, el número de inversiones aumentará o disminuirá en uno en cada término. Luego, el signo de cada término y, por tanto, el del determinante, cambiará.

Supongamos ahora que permutamos las columnas j y k (donde por conveniencia supondremos $j < k$) y supongamos además que hay m columnas entre ellas. Este cambio puede efectuarse trasladando la columna j a la posición inmediatamente anterior a la columna k (m permutaciones), permutando en seguida estas dos columnas adyacentes y trasladando después la columna k a la posición original de la columna j (m permutaciones). Puesto que el número total de permutaciones, $2m + 1$, es impar y cada una produce un cambio de signo, obtenemos nuevamente el resultado pedido.

TEOREMA 9.6. *Si dos columnas (filas) de una matriz son idénticas, su determinante es nulo.*

Demostración: Si $\delta(M)$ es el valor del determinante, permutando las dos columnas idénticas su valor pasa a ser $-\delta(M)$, por Teorema 9.5; pero como las dos columnas son idénticas, el determinante no cambia. Luego, $\delta(M) = -\delta(M)$, o sea, $\delta(M) = 0$.

TEOREMA 9.7. *Si cada elemento de una columna (fila) de una matriz se multiplica por un mismo número m, el valor del determinante correspondiente queda multiplicado por m.*

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ma_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ma_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ma_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Demostración: Esta propiedad se sigue de inmediato de la definición. Si cada elemento de una columna se multiplica por m, cada término en el desarrollo del determinante tendrá a m como factor.

Como consecuencia directa del Teorema 9.7, tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 9.7. *Toda cantidad que es factor de cada elemento de una columna (fila) de una matriz es factor del desarrollo del determinante correspondiente.*

TEOREMA 9.8. *Si tres matrices, M_1, M_2 y M_3, tienen elementos correspondientes iguales, a excepción de los de una columna (fila) en la cual los elementos de M_1 son la suma de los elementos correspondientes de M_2 y M_3, entonces $\delta(M_1) = \delta(M_2) + \delta(M_3)$.*

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Demostración: Cada término del desarrollo de $\delta(M_1)$ contiene una y sólo una de estas sumas y cada una de éstas puede expresarse como dos términos. El resultado directo de esta expresión constituye los desarrollos de $\delta(M_2)$ y $\delta(M_3)$.

TEOREMA 9.9. *Si cada elemento de una columna (fila) de una matriz se multiplica por un mismo número m y se suma al elemento correspondiente de otra columna, el determinante asociado no cambia de valor.*

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ma_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ma_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demostración: La demostración se sigue en forma inmediata de los Teoremas 9.8, 9.7 y 9.6, considerando el determinante del segundo miembro.

Muchas de estas propiedades serán de utilidad en el cálculo del valor de un determinante de orden n, para lo cual indicaremos métodos en la sección siguiente

Problemas

1 Explíquese por qué los dos determinantes siguientes son iguales. Verifíquese esto calculando cada uno de ellos.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2 Demuéstrese, haciendo los desarrollos respectivos, que el signo del determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

cambia si se cambian entre sí la primera y la tercera filas.

Sin calcular, indíquese por qué cada uno de los determinantes de los problemas 3 y 4 es nulo. Compruébese haciendo el cálculo.

3 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$ 4 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$

5 Calcúlese el determinante siguiente, sacando primeramente todos los factores comunes posibles y desarrollando en seguida. Compruébese mediante desarrollo directo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 6 & 16 & 8 \\ -12 & 6 & 10 \end{vmatrix}.$$

6 Utilícese el Teorema 9.8 para expresar la suma de los dos determinantes en forma de un determinante único. Compruébese el resultado calculando directamente el valor de los tres determinantes.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

7 En la matriz siguiente, multiplíquese cada elemento de la segunda fila por 3 y fórmese una nueva matriz sumando estos resultados a los elementos correspondientes de la

primera fila. Demuéstrese mediante desarrollo directo que el valor del determinante de la matriz original es igual al de la nueva matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

8 En la matriz del problema 7, multiplíquese cada elemento de la tercera columna por 2 y réstense estos resultados de los elementos correspondientes de la primera columna, formando así una nueva matriz. Demuéstrese por desarrollo directo de los determinantes correspondientes que el valor del determinante original no varía.

9 Determínense las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (a \neq b)$$

Indicación. Si $x = a$, las dos primeras columnas son iguales.

10 Determínense las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0. \quad (a \neq b \neq c \neq a)$$

11 Determínense las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

utilizando los Teoremas 9.6 y 9.7, y compruébese desarrollando el determinante.

12 Demuéstrese que

$$2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix}.$$

9.8. Desarrollo de un determinante en menores

La proposición en el problema 13 del juego de problemas de la sección 9.6 puede considerarse como el método de desarrollo de un determinante de orden 3 en menores. Ese método es válido también en el caso general. El *menor* de un elemento de una matriz cuadrada de orden n es el determinante de la matriz de orden $n - 1$ obtenida al eliminar la fila y la columna en que el elemento se encuentra. El menor de a_{ij} será designado por $\delta(A_{ij})$. Demostraremos ahora el siguiente teorema para el determinante $\delta(M)$ de la matriz de orden n dada en la ec. (9.13).

TEOREMA 9.10. *El determinante $\delta(M)$ de una matriz M es la suma algebraica de los productos obtenidos multiplicando cada elemento de una columna (fila) de la matriz M por su menor. El signo de cada producto es $(-1)^{i+j}$, siendo i el número de la fila y j el número de la columna en que está el elemento.*

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

es el desarrollo del determinante de orden cuatro según la segunda columna.

Demostración: El teorema queda demostrado haciendo notar dos hechos. Consideremos, primeramente, el producto $a_{11}\delta(A_{11})$. En este producto, que consiste de todos los términos que tienen a a_{11} como factor, los signos de cada término son los correctos, puesto que el número de inversiones en A_{11} no cambia al anteponerle a_{11}.

Consideremos ahora un elemento arbitrario a_{ij}. Este elemento puede llevarse a la posición de a_{11}, trasladando primeramente la fila i a la primera fila, lo cual requiere $i - 1$ permutaciones de filas, y en seguida llevando la columna j a la posición de la primera columna, lo cual requiere $j - 1$ permutaciones de columnas.

Este proceso produce en total $i - 1 + j - 1 = i + j - 2$ cambios de signo. Si $\delta(M')$ es el nuevo determinante, queda expresado mediante la relación

$$\delta(M') = (-1)^{i+j-2}\delta(M) = (-1)^{i+j}\delta(M).$$

Luego, los términos del desarrollo, que tienen a_{ij} como factor, son

$$(-1)^{i+j} a_{ij}\delta(A_{ij})$$

donde A_{ij} es la matriz cuyo determinante $\delta(A_{ij})$ es el menor original en M. Luego $\delta(M)$ puede desarrollarse según una columna (fila) cualquiera en la forma indicada por el teorema.

Con este teorema podemos calcular cualquier determinante. Nótese, en los ejemplos siguientes, el uso de los teoremas precedentes.

Ejemplo 1. Calcúlese el valor del determinante

$$\delta(M) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Solución: Puesto que $a_{23} = 0$, se simplifica el trabajo si desarrollamos según la tercera columna o la segunda fila. Elegimos la segunda fila porque sus elementos son de menor magnitud que los de la tercera columna. Luego,

$$\delta(M) = -2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Desarrollando cada uno de los determinantes de tercer orden, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2(-15-14) - 5(10+2) + 6(14-3)$$

$$= -58 - 60 + 66 = -52.$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 7 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -4(-15-14) - 5(35-8) + 6(49+12)$$

$$= 116 - 135 + 366 = 347.$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -4(14-3) - 2(49+12) + 5(-7-8)$$

$$= -44 - 122 - 75 = -241.$$

Utilizando estos valores, tenemos

$$\delta(M) = -2(-52) + 347 + 3(-241) = -272.$$

Observemos en este ejemplo que el trabajo de desarrollo se hizo menor gracias a que uno de los elementos era cero. Utilizando el Teorema 9.9 podemos introducir otros ceros y, en esa forma, reducir aún más el trabajo necesario para desarrollar el determinante. Consideremos otro ejemplo.

EJEMPLO 2. Calcúlese el valor del determinante

$$\delta(M) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -9 & -5 & 7 & -8 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Solución: Buscamos un elemento que sea igual a 1 ó -1 y trabajamos con la columna o fila que lo contenga. Elijamos el -1 en la primera fila. Introduciremos ceros en la primera fila en la forma siguiente: (1) multiplicamos los elementos de la tercera columna por 3 y sumamos los productos a los elementos correspondientes de la primera columna, (2) multiplicamos los elementos de la tercera columna por -2 y sumamos los productos a los elementos correspondientes de la segunda columna y (3) multiplicamos los elementos de la tercera columna por 2 y sumamos los productos a los elementos correspondientes de la cuarta columna. En esa forma,

$$\delta(M) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & -3 & 2 & 1 \\ 12 & -19 & 7 & 6 \\ 10 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando según la primera fila, tenemos

$$\delta(M) = -1\begin{vmatrix} 10 & -3 & 1 \\ 12 & -19 & 6 \\ 10 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Podemos introducir ceros ahora en el determinante de tercer orden. Para esto, (1) multiplicamos los elementos de la primera fila por -6 y sumamos los productos a los elementos correspondientes de la segunda fila y (2) multiplicamos los elementos de la primera fila por -4 y sumamos los productos a los elementos correspondientes de la tercera fila. Esto da

$$\delta(M) = -1\begin{vmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -48 & -1 & 0 \\ -30 & 11 & 0 \end{vmatrix}$$

y, desarrollando según la última columna, tenemos

$$\delta(M) = -1\{1[(-48)(11) - (-30)(-1)]\} = -1(-528 - 30) = 558$$

Si no existe elemento igual a 1 ó -1 en ninguna fila o columna, generalmente podemos introducir uno, utilizando el Teorema 9.9, y continuar en seguida como en el ejemplo anterior. Si bien la introducción de un 1 ó -1 no es estrictamente necesaria, tiene la ventaja de evitar la posibilidad de que aparezcan fracciones si no había ninguna inicialmente.

PROBLEMAS

Calcúlese el determinante de cada una de las matrices siguientes:

1 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \\ -7 & 2 & 3 & -8 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 & -2 \\ 6 & -1 & 4 & 7 \\ 5 & -2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$

9.9. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales mediante determinantes

En las secciones 8.10, 8.11, 9.5 y 9.6 hemos analizado la resolución de sistemas de ecuaciones en dos y tres incógnitas. Los sistemas de ecuaciones lineales en un número arbitrario de incógnitas, y que contienen el número apropiado de

ecuaciones, pueden expresarse en términos de matrices. Si consideramos el caso general de n ecuaciones en n incógnitas,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= k_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= k_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= k_n, \end{aligned} \tag{9.14}$$

podemos expresarlo mediante la ecuación matricial

$$MX = K, \tag{9.15}$$

donde M es la matriz que figura en la ec. (9.13), X es la matriz de n por 1,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y K es la matriz de n por 1,

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Compárese lo anterior con los problemas 14 y 15, sección 9.2.

Demostraremos un teorema conocido como la Regla de Cramer, en honor del matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752).

TEOREMA 9.11. *Si M es la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas, el producto de $\delta(M)$ por una incógnita arbitraria es igual al determinante $\delta(M_i)$, donde M_i es obtenida a partir de M, reemplazando los coeficientes de la incógnita respectiva por los términos constantes y dejando inalterados los otros elementos.*

Demostración: Puesto que

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

por el Teorema 9.7,

$$x_1\delta(M) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si multiplicamos ahora cada elemento de la segunda columna por x_2, los de la tercera por x_3, y así sucesivamente, y sumamos todos estos productos a los elementos correspondientes de la primera columna, tenemos, por el Teorema 9.9,

$$x_1\delta(M) = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ k_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ k_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \delta(M_1).$$

En esta forma, obtenemos

$$\delta M x_1 - \delta M_1, \delta M x_2 = \delta M_2, \ldots, \delta M x_n = \delta M_n. \tag{9.16}$$

donde M_i se obtiene a partir de M, reemplazando los elementos de la columna i de M, $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$, por $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Si $\delta(M) \neq 0$,* la solución única del sistema de las ecs. (9.14) se obtiene de las ecs. (9.16) despejando en ellas $x_1, x_2, \ldots, x_n$; así,

$$x_1 = \frac{\delta(M_1)}{\delta(M)}, \quad x_2 = \frac{\delta(M_2)}{\delta(M)}, \quad \cdots \quad x_n = \frac{\delta(M_n)}{(\delta M)} \tag{9.17}$$

Es evidente que este conjunto de valores satisface el sistema dado por las ecuaciones (9.14) y, por lo tanto, es una solución. Por ejemplo, la primera ecuación se verifica puesto que

$$k_1\delta(M) - a_{11}\delta(M_1) - a_{12}\delta(M_2) - \cdots - a_{1n}\delta(M_n)$$

es el desarrollo de

$$\begin{vmatrix} k_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ k_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ k_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ k_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.18}$$

según la primera fila; pero este determinante es nulo por ser idénticas las dos primeras filas. En forma análoga quedan verificadas las otras ecuaciones.

PROBLEMAS

1 Resuélvanse los sistemas de ecuaciones dados en los problemas 1, 3, 5 y 7 de la sección 8.11 por el método indicado en la presente sección.

---

* Si $\delta(M) = 0$, puede que existan o no soluciones. Una discusión completa al respecto está fuera del objetivo de este libro.

2 Resuélvanse los sistemas de ecuaciones dados en los problemas 2, 4, 6 y 8 de la sección 8.11 por el método indicado en la presente sección.

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones mediante determinantes.

3 $x + y + z + w = -4$; $x + 2y + 3z + 4w = 0$; $x + 3y + 6z + 10w = 9$; $x + 4y + 10z + 20w = 24$

4 $x + 2y - z = 8$; $y + 3z - w = 3$; $z + 4w - x = -20$; $w + 5x - y = 9$

5 Uno de los métodos bien conocidos (utilizado en análisis numérico con máquinas calculadoras de alta velocidad) para determinar la expresión de grado n* que pasa por $n + 1$ puntos distintos hace uso de determinantes. Explíquese por qué el determinante

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2 \\ f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 \\ f(x_2) & 1 & x_2 & x_2^2 \\ f(x_3) & 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

igualado a cero, puede considerarse como la ecuación que define la función f, donde la expresión para $f(x)$ es de segundo grado y queda verificada por las coordenadas de tres puntos.

Indicación. Si $x = x_1$, $f(x) = f(x_1)$, de modo que las dos primeras filas son idénticas, etc.

6 Explíquese el problema 18, sección 9.6, con la información del problema 5 precedente.

7 Desarrollando el determinante, simplifíquese la expresión,

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 11 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

y en esa forma determínese la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por (1, 1), (2, 2) y (−1, 11).

Problemas de repaso

Determínense todos los valores de x para los cuales cada una de las expresiones en los problemas 1 a 6 es (a) positiva, (b) negativa y (c) cero.

1 $\dfrac{-2x(x^2 + 5)^2 - 4x(5 - x)(x^2 + 5)}{(x^2 + 5)^3}$

2 $\dfrac{x}{3\sqrt{300^2 + x^2}} - \dfrac{1}{5}$ si $0 < x < 600$

3 $3x\dfrac{2}{2\sqrt{9 - 2x}} + 3\sqrt{9 - 2x}$

4 $15x^5 + 10x^3 - 6x$.

---

* Con esto queremos significar un polinomio de grado n, los que analizaremos en el capítulo siguiente [Véase ec. (10.1). Recuérdese la definición de la sección 3.3.]

5 $x(x-1)^2(x-2)^3$.

6 $-32(x^2+4)^{-2}+128x^2(4+x^2)^{-3}$.

7 Resuélvase la ecuación $\dfrac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}+\dfrac{2}{(1-x^2)^{1/2}}=0$.

8 Determínese el valor de z si $\frac{2}{3}\sqrt{2x}^{-1/3}+\frac{1}{2}xy^{-1/2}z-y^{1/2}=0$, $x=16$ e $y=5$.

9 Encuéntrese el valor de w en función de x e y si $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}z=0$ y $-\frac{2}{9}x^{-4/3}-\frac{2}{9}x^{4/3}z^2+\frac{2}{3}y^{-1/3}w=0$.

10 Si $M=\{(x,y)|y^2=4(x-2)\}$ y $N=\{(x,y),5y^2=8(x+4)\}$, encuéntrese $M\cap N$.

11 Si $A=\{(x,y)|x^2=4y\}$ y $B=\{(x,y)|x^2+4=8y\}$, encuéntrese $A\cap B$.

12 Determínense los valores reales de k tales que las raíces de kx^2+4x+k sean complejos conjugados.

13 Si un objeto se lanza desde el suelo y verticalmente hacia arriba con una velocidad de 40 m/seg., la distancia s sobre el suelo, medida en metros, al cabo de t segundos está dada por

$$s=40t-5t^2.$$

¿Cuántos segundos demora en alcanzar su altura máxima? ¿Cuánto es esta altura?

14 Determínense los valores de θ, $0\le\theta<2\pi$, para los cuales $2\ \mathrm{sen}\ 2\theta-\mathrm{sen}\ \theta$ es

a) negativa b) cero c) positiva.

15 Si $C^2-2C(x\cos\theta+y\ \mathrm{sen}\ \theta)+x^2+y^2=R^2$, demuéstrese que

$$C=x\cos\theta+y\ \mathrm{sen}\ \theta+\sqrt{R^2-(x\ \mathrm{sen}\ \theta-y\cos\theta)^2}$$

16 Resuélvase la ecuación $\sec^2 2x-3\csc^2 2x=0$, si $0<x<\pi/4$.

17 Resuélvase la ecuación $3\sec x\tan x-4\ \mathrm{sen}\ x=0$, si $0\le x<2\pi$.

18 Resuélvase la ecuación $(1+\mathrm{sen}\ x)\ \mathrm{sen}\ x-\cos^2 x=0$, si $0\le x<2\pi$.

19 Determínese $A\cap B$ si $A=\{(x,y)|y^2=-4(x-1)\}$ y $B=\{(x,y)|y^2=\ \ 2(x\ \ \ 2)\}$

20 Determínense los valores de k tales que la recta $y=2x+k$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2=16$.

21 Determínense A, B y C tales que

$(18t)2+(27t^2-3)^2=A(Bt^2-C)2$ sea una identidad en t.

22 Encuéntrense números A, B, C, D y E de modo que

$$4x^2-9y^2-24x+18y+27=A(x-B)^2+C(y+D)^2+E$$

sea una identidad en x.

23 Considérese la matriz

$$J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

Determínense $J^2(=J\times J)$, J^3, J^4 y J^5, y exprésense en función de I, la matriz identidad, y J. ¿Resulta esto similar a las multiplicaciones de números complejos? (Véase problema 4, sección 7-1.)

24 Encuéntrense valores reales de x y de y tales que $(x-3yi)(i+4)=10-23i$.

25 Sea p_1 (un par ordenado) $=(2,-2)$ y $p_2=(1,4)$. Encuéntrese un par ordenado igual a

a) p_1+p_2 b) p_1-p_2 c) $5p_1+2p_2$ d) $-3p_1+4p_2$.

10

Polinomios

En el capítulo 8 consideramos las funciones de primero y segundo grado. Generalizaremos ahora este tipo de funciones.

DEFINICIÓN 10.1. *La función f, definida por la ecuación de la forma*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

y escrita

$$f = \{(x, y)|y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n\}, \tag{10.1}$$

donde $a_0 \neq 0$, *n es un entero positivo o cero y* a_i $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$ *son constantes, se denomina* función racional entera *o* polinomio en *x* de grado *n*.

A menos que se diga específicamente lo contrario, *f* designará siempre una función de este tipo en el presente capítulo. (Compárese con la definición de la sección 3.3.)

10.1. Algunos teoremas

Hay varios teoremas de gran importancia para el estudio de los polinomios, que estableceremos a continuación, no sólo para facilitar la diagramación de la función, sino también para facilitar la resolución de ecuaciones polinomiales.

TEOREMA 10.1. Teorema del residuo. *Si se divide el polinomio* $f(x)$ *por* $x - r$, *siendo r una constante cualquiera, hasta obtener un residuo constante independiente de x, este residuo es igual a* $f(r)$.

Demostración: Sean $q(x)$ el cuociente de la división de $f(x)$ por $x - r$ y R el residuo constante. Entonces, $f(x)$ puede expresarse [recuérdense las ecs. (3.8) y (3.9), sección 3.3] mediante la identidad

$$f(x) \equiv (x - r)\cdot q(x) + R, \tag{10.2}$$

donde $q(x)$ es de grado $n-1$, puesto que suprimimos a $f(x)$ de grado n. Esta identidad es válida para todo valor de x; en particular, para $x = r$ obtenemos

$$f(r) = (r - r) \cdot q(r) + R = 0 \cdot q(r) + R$$

o

$$f(r) = R. \tag{10.3}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1. Sea $f(x) = 5x^3 - 14x + 3$, y $r = 2$. Entonces, como obtuvimos en el ejemplo 3, sección 3.3, $R = 15$. Substituyendo x por $r = 2$ en $f(x)$, tenemos $f(2) = 5(2)^3 - 14(2) + 3 = 40 - 28 + 3 = 15$, lo cual concuerda con el teorema del residuo.

A consecuencia de este teorema, el método de división abreviada o sintética descrito en la sección 3.3 puede utilizarse con ventajas para determinar el valor de $f(x)$ para distintos valores de x. Este método presenta ventajas sobre la substitución directa, en especial cuando n es grande y r no es un entero pequeño.

Hasta hace poco tiempo, este método era el único utilizado para evaluar polinomios. En la actualidad, sin embargo, el uso de los computadores electrónicos ha introducido muchos cambios en diversos aspectos del cálculo numérico; en particular, ha popularizado el empleo del método iterativo, que ilustramos con el ejemplo siguiente.

Encontremos el valor de

$$f(x) = 5x^3 - 8x^2 + 6x + 4 \quad \text{en} \quad x = 2.$$

Sea una primera aproximación $f_0(2)$, que hacemos igual a

$$f_0(2) = 5.$$

Multiplicando $f_0(2)$ por 2 y sumando -8, obtenemos

$$f_1(2) = 5(2) - 8$$

Multiplicando $f_1(2)$ por 2 y sumando 6, obtenemos

$$f_2(2) = [5(2) - 8]2 + 6 = 5(2)^2 - 8(2) + 6.$$

Multiplicando $f_2(2)$ por 2 y sumando 4, obtenemos

$$f(2) = [5(2)^2 - 8(2) + 6]2 + 4 = 5(2)^3 - 8(2)^2 + 6(2) + 4$$

El resultado es, por supuesto, $5(2)^3 - 8(2)^2 + 6(2) + 4 = 24$, el cual se puede verificar mediante división sintética. En todo caso es conveniente observar

que el interés del método estriba en el empleo de un proceso iterativo. En cada paso se repite el mismo proceso; ésta es la razón de que el método sea apropiado para emplearlo en una máquina computadora.

TEOREMA 10.2 Teorema de la descomposición en factores. *Si $f(r) = R$ es cero, esto es, r es un cero de $f(x)$, entonces, $(x - r)$ es un factor de $f(x)$.*

Demostración: Puesto que r es un cero de $f(x)$, esto es, $R = 0$, tenemos

$$f(x) \equiv (x - r) \cdot q(x) + 0.$$

Luego, $(x - r)$ es factor de $f(x)$.

TEOREMA 10.3. Recíproco del anterior. *Si $(x - r)$ es factor de $f(x)$, entonces $f(r) = R = 0$ y r es un cero de $f(x)$.*

Demostración: Puesto que $x - r$ es un factor de $f(x)$,

$$f(x) \equiv (x - r) \cdot q(x),$$

donde $q(x)$ es el cuociente $f(x)/(x - r)$. Por tanto,

$$f(r) = (r - r) \cdot q(r) = 0 \cdot q(r) = 0,$$

que expresa que r es un cero de $f(x)$.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. La cantidad $x - 3$ es factor de $f(x) \equiv x^3 - 27$, puesto que

$$f(3) = (3)^3 - 27 = 0.$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. El polinomio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ es divisible por $x - 2$, puesto que $f(2) = 0$. El hecho de que $f(2) = 0$ se demuestra mediante división abreviada o sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & 3 & 10 & 2 \\ & 2 & -8 & -10 & \\ \hline 1 & -4 & -5 & 0 & \end{array}$$

PROBLEMAS

Utilizando división sintética, determínese el residuo y compruébese por substitución directa, si

1 $3x^2 - 2x - 4$ se divide por $x - 3$.

2 $x^3 + 4x - 7$ se divide por $x - 3$.

3 $x^3 - 2x^2 + 9$ se divide por $x + 2$.

4 $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 8$ se divide por (a) $x - 2$, (b) $x + 1$.

5 $2x^4 - 3x^3 - 20x^2 - 6$ se divide por (a) $x - 4$, (b) $x + 3$.

6 $x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ se divide por (a) $x + 2$, (b) $x + 3$.

Utilizando el Teorema 10.2, determínese si la primera expresión es factor de la segunda en los problemas 7 a 12.

7 $x - 2$, $x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 24$

8 $x + 3$, $x^3 - 4x^2 - 18x + 9$.

9 $x - 3$, $x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 15x - 2$.

10 $x - 5$, $x^3 + 2x^2 - 25x - 50$.

11 $2x + 3$, $2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 8x + 12$

12 $3x + 1$, $9x^3 + 6x^2 + 4x + 2$.

13 Demuéstrese que $x - y$ es factor de $x^4 - y^4$, $x^6 - y^6$, $x^7 - y^7$ y $x^8 - y^8$. Encuéntrese el cuociente en cada caso, mediante división sintética.

14 Demuéstrese que $x + y$ es factor de $x^5 + y^5$ y $x^7 + y^7$. Determínese el cuociente en cada caso, mediante división sintética.

Hállese el valor de cada uno de los polinomios en el valor especificado, mediante el proceso iterativo ilustrado anteriormente. Escríbase cada aproximación.

15 $x^3 - 8x^2 + 6x + 4$ es $x = 3$.

16 $x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 8$ es $x = 5$.

17 $x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 8x - 4$ es $x = -4$.

18 $x^3 + 5x^2 - 6x - 9$ es $x = -\frac{3}{2}$.

19 Bosquéjese una prueba para el hecho de que $a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} + \cdots + a_{n-1}c + a_n$ es el valor correcto de $f(x)$ dado en ec. (10.1) para $x = c$, si se utiliza el método iterativo

20 Explíquese por qué el proceso iterativo no se utilizaría para evaluar un producto, en vez de una suma.

Uno de los teoremas más importantes en relación con los ceros de un polinomio puede expresarse en términos de división sintética.

TEOREMA 10.4. *En la división sintética de*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad \text{en} \quad x - r,$$

con $a_0 > 0$,

1. *si $r > 0$ y todos los números en la tercera línea son positivos, entonces r es una cota superior de todos los ceros positivos de $f(x)$.*
2. *si $r < 0$ y los signos de los números en la tercera línea son alternantes, entonces r es una cota inferior de todos los ceros negativos de $f(x)$.*

Demostración: Por el proceso de división sintética, tanto en (1) como en (2) un aumento del valor absoluto de r producirá un aumento del valor absoluto de todos los números de la tercera línea a excepción del primero. Luego, si el valor absoluto de r aumenta, el valor absoluto del último numero de la tercera línea, esto es, del residuo de la división, también aumentará, de modo que el residuo no podrá ser cero para ningún r de valor absoluto mayor que el del r dado.

EJEMPLO. Determínense cotas superior e inferior para los ceros de $f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 3x - 10$.

Solución: Utilizando división sintética, tenemos

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 3 & -9 & 3 & -10 & 3 \\ & 3 & 18 & 27 & 90 & \\ \hline 1 & 6 & 9 & 30 & 80 & \end{array}$$

Puesto que todos los números de la tercera línea son positivos, 3 es una cota superior de los ceros de $f(x)$.

Análogamente,

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 3 & -9 & 3 & -10 & -6 \\ & -6 & 18 & -54 & 306 & \\ \hline 1 & -3 & 9 & -51 & 296 & \end{array}$$

Puesto que los signos de la tercera línea se alternan, -6 es cota inferior de los ceros de $f(x)$.

El teorema siguiente es de fundamental importancia en nuestro estudio; nos limitaremos a enunciarlo, ya que no es posible dar una demostración elemental de él.

TEOREMA 10.5. Teorema fundamental del álgebra *Todo polinomio definido por*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

$n \geq 1$, $a_0 \neq 0$, *tiene al menos un cero (real o imaginario).*

Este teorema fue demostrado por primera vez por el matemático alemán Karl Friedrich Gauss, a la edad de 22 años. Nos permite demostrar a continuación un teorema sobre el número de ceros de un polinomio.

TEOREMA 10.6. *Todo polinomio definido por*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

tiene exactamente n ceros.

Demostración: Puesto que, por el Teorema 10.5, $f(x)$ tiene al menos un cero, r_1, el Teorema 10.2 implica que $(x - r_1)$ es factor de $f(x)$; luego,

$$f(x) \equiv (x - r_1) \cdot q_1(x), \tag{10.4}$$

siendo $q_1(x)$ el cuociente de la división de $f(x)$ por $(x - r_1)$. Análogamente, $q_1(x)$ tiene un cero r_2, de modo que

$$q_1(x) \equiv (x - r_2) \cdot q_2(x),$$

siendo $q_2(x)$ el cuociente de la división de $q_1(x)$ por $(x - r_2)$. Por tanto, podemos escribir

$$f(x) \equiv (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x). \tag{10.5}$$

Como, ademas, cada nuevo cuociente es de grado menor en una unidad al del cuociente anterior, podemos continuar el proceso hasta obtener finalmente

$$f(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) \cdot q_n(x), \tag{10.6}$$

donde, puesto que hay n factores $(x - r_i)$, $q_n(x)$ debe ser la constante a_0; por tanto,

$$f(x) \equiv a_0(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n), \tag{10.7}$$

donde cada r_i es un cero de $f(x)$.

Sea r un número cualquiera. Puesto que la ec. (10.7) es una identidad, debe ser verdadera para todo valor de x; luego,

$$f(r) \equiv a_0(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n).$$

Si $r \neq r_i$, para todo i, ninguno de los factores $(r - r_i)$ es cero, y como $a_0 \neq 0$, $f(r) \neq 0$, y r no es un cero de $f(x)$. Por tanto, hay exactamente n ceros con lo que el teorema queda demostrado.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4. La función $(x - 3)^2(x - 1)(x + 2)^3$ es un polinomio de grado 6. Sus seis ceros son 3, 3, 1, -2, -2, -2. Obsérvese que un cero que ocurre m veces es considerado como m ceros.

PROBLEMAS

Determínese por inspección los ceros de las funciones siguientes, indicándose la multiplicidad de cada uno.

1. $(x - 2)(x - 3)^2(x + 4)^3$.
(2, 3, 3, -4, -4, -4)

2. $(x + 1)^4(x - 2)^5$.
(-1, -1, -1, -1, 2, 2, 2, 2, 2)

3 $(x+7)(2x-3)^3$.

4 $(x^2-4x+4)(x^2+3x-10)$

5 $(3x+5)(x^2-6x+9)^2$

Determínese una cota superior y una cota inferior para los ceros de cada una de las siguientes funciones:

6 $x^3-3x^2-2x+15$.

7 x^3+2x^2-7x-8.

8 $x^4-2x^3-7x^2+10x+10$.

9 $x^4-x^3-x^2-2x-6$

10 $x^4-4x^3+x^2+6x+2$.

11 x^4-5x^2+6x-9.

12 x^3-8x+5

13 $x^3+16x-29$.

14 x^5+5x^2-7.

15 x^5-3x^2+24

10.2. Representación gráfica de polinomios

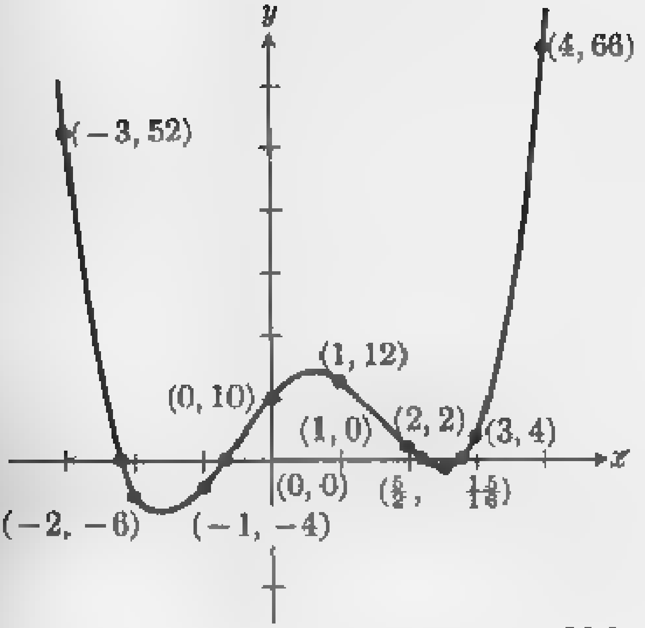
Uno de los métodos para determinar los ceros reales de una función fue mencionado en relación con la representación gráfica en la sección 5.2. Este método puede utilizarse también en el caso de un polinomio cualquiera Puesto que, mediante la división sintética, se pueden obtener fácilmente los valores de la función para un valor cualquiera de la variable, construiremos en esta forma una tabla de valores y de ella podemos obtener las coordenadas de diversos puntos que se encuentran en la gráfica de la función. Una vez diagramados éstos, los unimos mediante una línea continua que en todo caso deberá trazarse con precaución. Recordamos una vez más que los ceros de una función f son las abscisas de los puntos en que la gráfica de $y=f(x)$ cruza o toca el eje x.

EJEMPLO 1. Trácese la gráfica de $y=f(x)=x^4-2x^3-7x^2+10x+10$ y verifíquese que hay un cero real entre -3 y -2, otro entre -1 y 0 y dos entre 2 y 3.

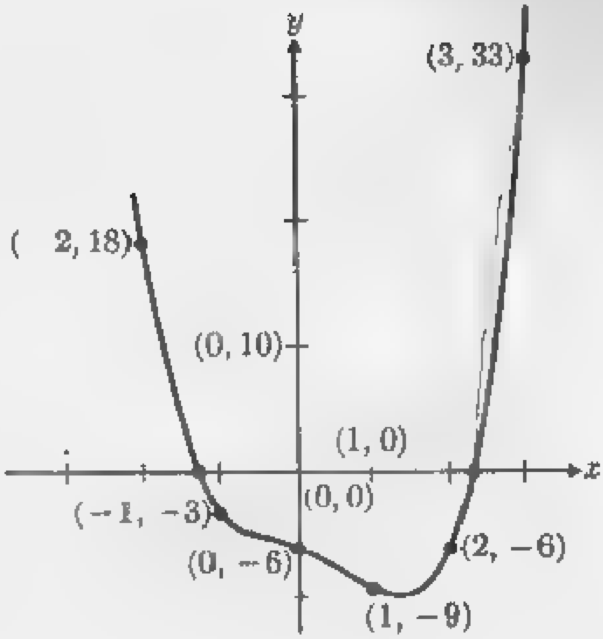
Solución: Construimos primeramente la tabla de valores que aparece a continuación. Para un x determinado, encontramos el valor correspondiente de la función por división sintética. En general, es conveniente utilizar todos los valores enteros comprendidos entre una cota inferior y una cota superior. (¿Por qué?) Además, para precisar la forma de la curva puede ser necesario utilizar algunos valores fraccionarios. La fig 10.1 muestra los valores de la tabla diagramados. Obsérvese que por conveniencia se han elegido diferentes las escalas en los dos ejes. De la figura se ve claramente que los ceros están ubicados precisamente en la posición sugerida en el enunciado.

x	-3	-2	-1	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	4
y	52	-6	-4	10	12	2	$-\frac{15}{16}$	4	66

En el ejemplo 1, la función (de grado 4) tiene cuatro ceros reales. Este no



10-1



10-2

es siempre el caso, pues algunos de los ceros pueden ser imaginarios. Un cero imaginario de una función no puede aproximarse a partir de la gráfica de ésta.

EJEMPLO 2. Trácese la gráfica de

$$y = f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 6,$$

y aproxímense sus ceros reales.

Solución: Nuevamente construimos la tabla de valores y diagramamos los puntos. La gráfica aparece en la fig. 10-2.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	18	-3	-6	-9	-6	33

Si bien la función es de cuarto grado, su gráfica cruza el eje x sólo dos veces. Los dos ceros reales están comprendidos, uno entre -2 y -1 y el otro entre 2 y 3; los otros dos ceros son imaginarios.

No existe un método simple para aproximar los ceros imaginarios de un polinomio.

PROBLEMAS

Trácese la gráfica de la función definida por cada una de las expresiones siguientes y verifíquese cada una de las proposiciones en los problemas 1 a 4.

1 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ tiene un cero entre -2 y -1, 0 y 1, 1 y 2.

2 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ tiene un cero entre -2 y -1, 0 y 1, 1 y 2.

3 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 12x - 17$ tiene un cero entre -3 y -2 y uno entre 1 y 2.

4 $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$ tiene dos ceros entre 2 y 3 y dos entre -1 y 0.

Trácense las gráficas de las siguientes relaciones funcionales, indicando la ubicación de todos los ceros reales:

5 $f(x) = x^4 - 20x^2 + 48x - 32$.

6 $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 4$.

7 $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 11x + 3$.

8 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x + 6$.

9 $f(x) = x^5 - 3x^3 + 9x^2 - 8x + 11$.

10 $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8x + 3$.

11 $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$.

12 $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$.

13 $f(x) = x^3 + 5x^2 + 13x + 19$.

14 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$.

15 $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 2$.

10.3. Observaciones generales sobre ceros y raíces

Recordemos que los ceros de una función son idénticos a las raíces de la ecuación obtenida igualando la función a cero. En consecuencia, todas las observaciones anteriores sobre los ceros de un polinomio valen también para las raíces de la ecuación asociada.

En el capítulo 8 indicamos métodos para resolver una ecuación de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (a_0 \neq 0).$$

cuando $n = 1$ (ecuación lineal) y $n = 2$ (ecuación cuadrática). Existen también fórmulas para resolver ecuaciones de este tipo cuando $n = 3$ y 4, pero ellas están fuera del objetivo de este libro. Tartaglia fue el primero en desarrollar fórmulas para la solución de la ecuación cúbica general; ellas fueron publicadas por Cardan en 1545 y se conocen como las *fórmulas de Cardan* o *Cardano*. Poco después, Ferrari desarrolló fórmulas para la solución de la ecuación cuadrática o de cuarto grado general.

Se ha demostrado que para $n \geq 5$ no existen, en general, fórmulas algebraicas que den las raíces en función de los coeficientes. Se hicieron numerosas tentativas para obtener fórmulas generales hasta que, finalmente, en 1824, el matemático noruego, N. H. Abel (1802-1829), demostró que estas fórmulas no existen en el caso general. Posteriormente, el matemático francés, E. Galois (1811-1832), demostró que bajo ciertas condiciones pueden desarrollarse fórmulas de este tipo.

Sin embargo, es comparativamente sencillo determinar todas las raíces racionales de una ecuación polinomial y aproximar sus raíces irracionales. En cuanto a las raíces imaginarias, ellas serán estudiadas brevemente al finalizar el presente capítulo.

10.4. Raíces racionales

En relación con las raíces racionales de una ecuación con coeficientes enteros, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 10.7. *Si el número racional p/q, expresado en forma irreductible, es una raíz de la ecuación*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (10.8)$$

siendo a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ coeficientes enteros, entonces p es divisor exacto de a_n y q es divisor exacto de a_0.

Demostración: Puesto que p/q es raíz de la ec. (10.8), tenemos

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0.$$

Multiplicando esta igualdad por q^n, obtenemos

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0. \qquad (10.9)$$

Pasando a_nq^n al segundo miembro y dividiendo la igualdad resultante por p,

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + a_2p^{n-3}q^2 + \cdots + a_{n-1}q^{n-1} = \frac{-a_nq^n}{p}.$$

Siendo cada a_i, p y q enteros, el primer miembro de la igualdad es un entero y, por ende, lo es también el segundo miembro. Además, p y q no tienen factor común, de modo que p no es divisor de q^n; luego p es divisor exacto de a_n.

Si en la ec. (10.9) pasamos al segundo miembro a_0p^n y dividimos la igualdad resultante por q, obtenemos

$$a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1} = \frac{-a_0p^n}{q}.$$

Aplicando un razonamiento análogo, concluimos que q es divisor exacto de a_0.

El teorema siguiente es corolario directo del anterior.

TEOREMA 10.8. *Toda raíz racional de la ecuación*

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (10.10)$$

donde cada a_i es entero, debe ser un entero que es divisor exacto del término constante a_n.

Con los dos teoremas anteriores, podemos determinar todas las raíces racionales de una ecuación del tipo dado por la ec. (10.8).

EJEMPLO 1. Resuélvase la ecuación

$$x^4 - x^3 - 7x^2 - 14x - 24 = 0$$

1 −1 −7 −44 −24

determinando primeramente sus raíces racionales.

Solución: Examinando la ecuación vemos que, según el Teorema 10.8, las posibles raíces racionales son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24. Mediante división sintética, encontramos que ni 1, ni 2, ni 3 son raíces. Para $x = 4$,

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -7 & -14 & -24 & \underline{4} \\ & 4 & 12 & 20 & 24 & \\ \hline 1 & 3 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

y escribiendo el resultado en forma algebraica (recuérdese la ec. (3.9)),

$$x^4 - x^3 - 7x^2 - 14x - 24 \equiv (x^3 + 3x^2 + 5x + 6)(x - 4).$$

Siendo $x - 4$ factor del primer miembro de la ecuación original, $x = 4$ es una raíz, y el problema se reduce a resolver la ecuación rebajada de grado $x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = 0$, la cual, por ser todos los signos más, no tiene raíces positivas. (¿Por qué?) Mediante división sintética, encontramos que -1 no es raíz, pero sí lo es -2.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 3 & 5 & 6 & \underline{-2} \\ & -2 & -2 & -6 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

La nueva ecuación rebajada de grado es $x^2 + x + 3 = 0$ que, resuelta por la fórmula cuadrática ec. (8.10), da $x = (-1 \pm \sqrt{-11})/2$, de modo que la solución completa es

$$x = 4, \quad -2, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{11}\,i}{2},$$

con las últimas dos raíces imaginarias.

EJEMPLO 2. Determínense las raíces exactas de

$$4x^5 - 16x^4 + 17x^3 - 19x^2 + 13x - 3 = 0.$$

Solución: Puesto que los signos de los términos se alternan, la ecuación no tiene raíces negativas. (¿Por qué?) Sus posibles raíces racionales son, 1, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$. Utilizando división sintética vemos que 1 no es raíz, pero sí lo es $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 4 & -16 & 17 & -19 & 13 & -3 & \frac{1}{2} \\ & 2 & -7 & 5 & -7 & 3 & \\ \hline 4 & -14 & 10 & -14 & 6 & 0 & \end{array}$$

La ecuación rebajada de grado puede dividirse por 2, reduciéndose a $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$. Nuevamente, encontramos que $\frac{1}{2}$ es una raíz, esto es, $\frac{1}{2}$ es una raíz doble de la ecuación original.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -7 & 5 & -7 & 3 & \frac{1}{2} \\ & 1 & -3 & 1 & -3 & \\ \hline 2 & -6 & 2 & -6 & 0 & \end{array}$$

Dividiendo nuevamente por 2, la nueva ecuación es $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$. La única raíz racional posible es 3. (¿Por qué?)

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ & 3 & 0 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Vemos que, efectivamente, 3 es una raíz y la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ consta de las dos raíces imaginarias $\pm i$. Luego la solución completa es $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, \pm i$.

Problemas

Determínense las raíces exactas de las siguientes ecuaciones:

1 $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

2 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

3 $x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105 = 0$.

4 $x^3 + x^2 - 24x + 36 = 0$

5 $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$.

6 $x^4 - 4x^3 + 4x - 1 = 0$.

7 $4x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 21x - 9 = 0$

8 $2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = 0$

9 $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$.

10 $10x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 26x - 6 = 0$.

11 $8x^5 - 12x^4 + 14x^3 - 13x^2 + 6x - 1 = 0$.

12 $12x^3 - 52x^2 + 61x - 15 = 0$

13 $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10 = 0$.

14 $x^2 - 2 = 0$. ¿Qué significa esto en relación con la naturaleza racional de $\sqrt{2}$?

15 Pruébese que $\sqrt{3}$ es irracional.

16 Pruébese que $\sqrt[3]{5}$ es irracional.

Resuélvase cada una de las ecuaciones siguientes para todos los valores positivos de θ menores que 2π.

17 $4 \operatorname{sen}^4 \theta - 12 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - 7 \cos^2 \theta - 9 \operatorname{sen} \theta + 5 = 0$.

Indicación: Utilícese la identidad $\cos^2 \theta \equiv 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$ y simplifíquese haciendo $x = \operatorname{sen} \theta$

18 $4 \operatorname{sen}^4 \theta - 4 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - 11 \cos^2 \theta + 3 \operatorname{sen} \theta + 8 = 0$.

19 $3 \tan \theta \sec^2 \theta + 3 \sec^2 \theta - 4 \tan \theta - 4 = 0$.

10.5. Raices irracionales

Se conocen varios métodos* para determinar aproximadamente las raices irracionales de una ecuación polinomial. En la sección 10.2 observamos que cualquier raíz simple de $f(x) = 0$ podía aislarse, al menos en teoría. Si la función es relativamente simple, esto puede efectuarse sin mucho trabajo. Si $f(a)$ y $f(b)$ son de signos contrarios, existe al menos un valor de x entre a y b para el cual $f(x) = 0$. Esta es la idea básica que aplicaremos en el ejemplo siguiente.

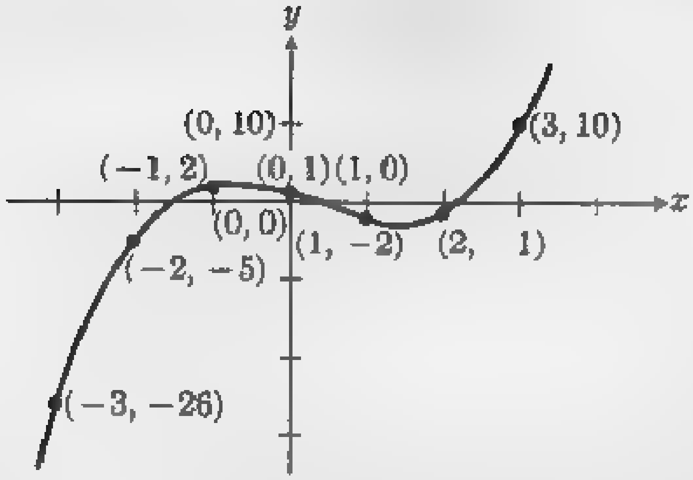
EJEMPLO 1. Determínese aproximadamente la mayor raíz positiva de

$$x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Solución: Trazando la gráfica de la función $y = x^3 - x^2 - 3x + 1$, figura 10-3, observamos que la raíz que nos interesa está entre 2 y 3. Dividiendo este intervalo en diez partes iguales y aplicando división sintética a los valores $x = 2{,}1, 2{,}2, \ldots, 2{,}9, 3$, encontramos $f(2{,}1) = -0{,}45$ y $f(2{,}2) = 0{,}21$, de modo que la raíz está entre 2,1 y 2,2. Repitiendo este proceso para $x = 2{,}11, 2{,}12, \ldots, 2{,}19, 2{,}2$, encontramos

$$f(2{,}17) = -0{,}0006, \quad f(2{,}18) = 0{,}0678.$$

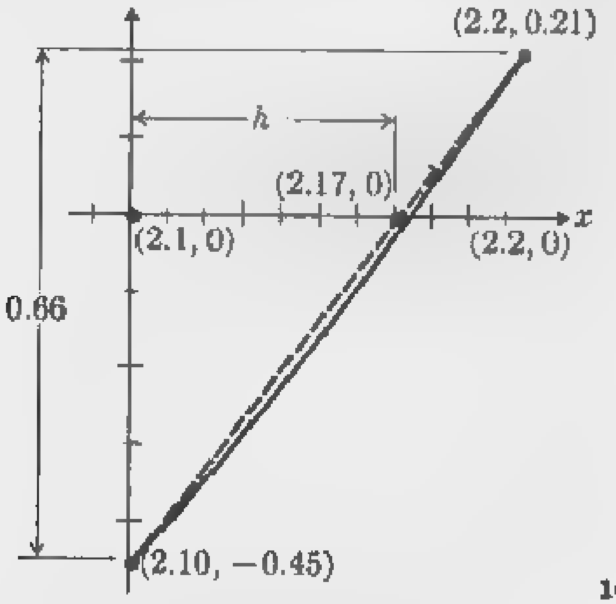
* Algunos de estos métodos son los de Graeffe, Horner y Newton que aparecen explicados en la mayoría de los libros sobre teoría de ecuaciones. Con el desarrollo de las máquinas calculadoras de alta velocidad, el método de Newton ha adquirido una importancia primordial En lugar de reemplazar una parte de la curva por la recta que pasa por sus puntos extremos, utiliza un punto y estima la abscisa del punto en que la tangente a la curva en aquel punto cruza el eje x. Su sencillez radica en la naturaleza repetitiva del proceso, el cual puede utilizarse para cualquier tipo no muy complicado de función, sea ésta o no un polinomio.



10-3

Esto nos sugiere que $x = 2{,}17$ es la mejor aproximación de la raíz con dos decimales; de hecho, $f(2{,}171) = 0{,}00621$ de modo que $x = 2{,}170$ es exacta hasta la tercera cifra decimal. Este proceso puede, evidentemente, continuarse indefinidamente.

La labor necesaria para aproximar una raíz puede reducirse en forma apreciable mediante el método llamado *interpolación lineal*. Determinamos anteriormente que la raíz que nos interesa está entre 2,1 y 2,2. Esta parte de la curva se ilustra en la fig. 10-4, en la cual se han indicado los puntos cuyas abscisas son



10-4

2,1 y 2,2. Suponiendo que en esa sección podemos representar la curva con aproximación suficiente por la línea recta que une los dos puntos, tenemos por semejanza de triángulos,

$$\frac{h}{0{,}45} = \frac{0{,}1}{0{,}66},$$

de modo que $h = 0{,}07$, aproximadamente; por tanto, una buena estimación para x es

$$2{,}1 + 0{,}07 = 2{,}17.$$

Calculamos enseguida $f(2{,}17)$ y encontramos que es negativo, y por la forma de la curva, vemos que la raíz es mayor que 2,17. Calculando $f(2{,}18)$ aislamos la raíz sin necesidad de ensayar los ocho valores restantes. El método de interpolación lineal puede continuarse con cada nueva cifra decimal hasta obtenerse la precisión deseada.

La belleza del método radica en su simplicidad; además, puede utilizarse para calcular aproximadamente cualquier raíz real, siempre que la gráfica de la función efectivamente cruce el eje x y no sea solamente tangente a él.

El lector recordará que en la sección 6.13 determinamos los valores de las funciones circulares de θ para valores de θ que aparecían en la tabla. Si θ es un valor intermedio entre dos valores dados en la tabla, podemos utilizar este mismo método general de interpolación lineal. Específicamente, si x y $x + (0{,}0001)r$ son dos valores consecutivos en la tabla I (en la columna «radianes»), y r es un entero entre 0 y 29,* podemos determinar $\operatorname{sen}(x + r)$ utilizando la proporción que resulta de la interpolación lineal (suponiendo que la curva representativa de la función seno puede reemplazarse por una recta en ese intervalo):

$$\operatorname{sen}(x + r) = \operatorname{sen} x + \frac{r}{29}\left[\operatorname{sen}(x + 0{,}0029) - \operatorname{sen} x\right]. \qquad (10.11)$$

Para las otras funciones se utilizan fórmulas análogas.

EJEMPLO 2. Determínese sen 0,4236.

Solución: Puesto que 0,4236 está entre 0,4218 y 0,4247, $r = 36 - 18 = 18$, de modo que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 0{,}4236 &= \operatorname{sen} 0{,}4218 + \tfrac{18}{29}(\operatorname{sen} 0{,}4247 - \operatorname{sen} 0{,}4218)\\ &= 0{,}4094 + \tfrac{18}{29}(0{,}4120 - 0{,}4094)\\ &= 0{,}4094 + 0{,}0016\\ &= 0{,}4110.\end{aligned}$$

* En casi todos los casos, la diferencia entre dos valores consecutivos en la columna indicada es 0,0029. Como estamos considerando aproximaciones de números irracionales (subdivisiones iguales de la longitud 2π de la circunferencia unitaria), estos números no son exactos. Por esta razón, la diferencia puede ser 0,0030, y en este caso, este hecho debe tenerse presente. Véanse, por ejemplo, los valores 0,3752 y 0,3782.

Ejemplo 3. Determínese cos 1,0071.

Solución. Puesto que 1,0071 está entre 1,0065 y 1,0094, tenemos $r = 6$, de modo que

$$\begin{aligned} \cos 1{,}0071 &= \cos 1{,}0065 + \tfrac{6}{29}(\cos 1{,}0094 - \cos 1{,}0065) \\ &= 0{,}5348 + \tfrac{6}{29}(0{,}5324 - 0{,}5348) \\ &= 0{,}5348 - 0{,}0005 \\ &= 0{,}5343. \end{aligned}$$

La tabla también puede interpolarse para determinar el número, aproximado hasta la cuarta cifra decimal, si el valor de una función circular para ese número se encuentra entre dos valores que aparecen en la tabla. Si se da sen θ, determinamos dos valores consecutivos en la columna «seno» entre las cuales se encuentre comprendido el valor dado. Así, si $\theta = x + (0{,}0001)r$, donde r es un entero entre 0 y 29, y x y $x + 0{,}0029$ son dos valores consecutivos en la tabla, determinamos r utilizando la misma fórmula, ec. (9.11), en la cual despejamos $r/29$:

$$\frac{r}{29} = \frac{\operatorname{sen}(x + (0{,}0001)r - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x + 0{,}0029) - \operatorname{sen} x} \tag{10.12}$$

En la misma forma procedemos para las otras funciones.

Ejemplo 4. Determínese el número θ entre 0 y $\pi/2$ para el cual sen $\theta = 0{,}6231$.

Solución: El valor 0,6231 se encuentra comprendido entre los valores en la columna «seno», sen 0,6720 = 0,6225 y sen 0,6749 = 0,6248. Luego

$$\frac{r}{29} = \frac{0{,}6231 - 0{,}6225}{0{,}6248 - 0{,}6225}$$

$$r = 29\left(\frac{0{,}0006}{0{,}0023}\right) = 8,$$

de modo que $\theta = 0{,}6728$, aproximado hasta la cuarta cifra decimal.

Ejemplo 5. Determínese θ si $\cos\theta = 0{,}5741$.

Solución: De la tabla, cos 0,9570 = 0,5760 y cos 0,9599 = 0,5736; por tanto,

$$\frac{r}{29} = \frac{0{,}5741 - 0{,}5760}{0{,}5736 - 0{,}5760}.$$

o sea,

$$r = 29\left(\frac{0{,}0019}{0{,}0024}\right) = 23,$$

y el resultado es $\theta = 0{,}9593$.

Este mismo tipo de interpolación será utilizado en los capítulos 14 y 16. Consideremos por un momento las raíces imaginarias. En los ejemplos de la sección 10.4, las ecuaciones tenían tanto raíces reales como raíces imaginarias. En el primer ejemplo, éstas últimas eran $(-1 \pm \sqrt{-11})/2$ y en el segundo, $\pm i$. El hecho de que, en ambos casos, estas raíces imaginarias ocurrieran como pares de complejos conjugados no fue una coincidencia. En toda ecuación polinomial con coeficientes reales estas raíces siempre ocurren en pares de este tipo. Este resultado puede formularse como un teorema fundamental.

TEOREMA 10.9. *Si el número complejo $a + bi$, $b \neq 0$, es raíz de la ecuación*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{10.13}$$

donde $a_0 \neq 0$, n es un entero positivo y a_i son constantes reales, entonces su conjugado $a - bi$ es también una raíz.

Demostración: Como $a + bi$ es una raíz de $f(x) = 0$, $x - (a + bi)$ es un factor de $f(x)$. Dividamos $f(x)$ por el producto

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

hasta que el residuo sea de grado inferior al de $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$. El residuo, por tanto, a lo más será de primer grado: simbólicamente, esto puede expresarse

$$\frac{f(x)}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2} \equiv q(x) + \frac{Rx + S}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2} \tag{10.14}$$

o

$$f(x) \equiv [x^2 - 2ax + a^2 + b^2]q(x) + Rx + S,$$

donde R y S son constantes reales. Como esta igualdad es válida para todo x, es válida para $x = a + bi$. Así,

$$f(a + bi) = 0 \cdot q(a + bi) + R(a + bi) + S = 0.$$

En consecuencia, debe ser cero por separado la parte real y la parte imaginaria:

$$Ra + S = 0 \quad \text{y} \quad Rbi = 0.$$

Como $b \neq 0$, entonces $R = 0$ y, por tanto, $S = 0$, lo cual demuestra que la división en ec. (10.14) es exacta; luego $x - (a - bi)$ es factor de $f(x)$; esto es, $a - bi$ es raíz de $f(x) = 0$. Como consecuencia de este teorema, observemos varias propiedades de las raíces de la ec. (10.13). (1) Las raíces imaginarias de tal ecuación ocurren siempre en pares. (2) Toda ecuación de este tipo tiene un número par de raíces imaginarias. (3) Si el grado de la ecuación es impar, entonces la ecuación tiene al menos una raíz real.

Problemas

Trácense las gráficas de las funciones asociadas con las ecuaciones siguientes y determínense, aproximados hasta la segunda cifra decimal, los valores de las raíces reales que se indican.

1 $x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$ (la menor positiva).

2 $x^3 + 3x^2 - 6x - 3 = 0$ (la mayor positiva).

3 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ (la menor positiva).

4 $x^3 - 3x + 1 = 0$ (las tres raíces reales).

5 $x^3 - 7x + 7 = 0$ (las dos raíces entre 1 y 2).

6 $x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 3 = 0$ (todas).

7 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0$ (todas).

8 $x^4 - 4x^3 - 4x + 12 = 0$ (todas).

Determínense, con tres decimales exactos, las raíces principales indicadas.

9 $\sqrt[3]{6}$

10 $\sqrt[3]{15}$

11 $\sqrt[4]{2}$

12 $\sqrt[5]{-9}$

13 Recuérdese que $\delta(A - xI)$ se definió como el polinomio característico de la matriz de 2 por 2 en el problema 16, sección 9.4. Si esto se generaliza para cualquier matriz de orden tres, ¿cuál será el grado del polinomio? Justifíquese el razonamiento.

14 Si $\delta(A - xI)$ se iguala a cero, obtenemos nuevamente una ecuación característica. Determínese una ecuación característica para cada una de las matrices siguientes:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

15 Encuéntrense todas las raíces características reales de la matriz dada en el problema 14(a), con dos cifras decimales exactas.

16 Encuéntrense todas las raíces características reales de la matriz dada en el problema 14(b), con dos cifras decimales exactas.

Encuéntrese, en cada caso, la ecuación de tercer grado con coeficientes enteros que tienen por raíces a los números dados.

17 $3, 2 - i$.

18 $-4, 6i$.

19 $\frac{1}{2}, -5 + i$.

20 $\frac{3}{2}, i - 4$.

21 $-\frac{1}{3}, 3 + \sqrt{2}i$

22 $\frac{2}{3}, (-3 + \sqrt{5}i)/2$.

Resuélvase cada una de las ecuaciones siguientes, dada una de sus raíces, indicada entre paréntesis.

Indicación. Úsese división.

23 $x^3 - 4x^2 + 9x - 36 = 0$, $(3i)$

24 $2x^3 + 9x^2 + 14x + 5 = 0$, $(-2 + i)$.

25 $x^3 - 8x^2 + 23x - 22 = 0$, $(3 - \sqrt{2}i)$.

26 $2x^3 - 8x^2 + 11x - 5 = 0$, $\frac{1}{2}(3 + i)$.

27 Determínese el valor aproximado con cuatro decimales de cada una de las expresiones siguientes, utilizando la tabla 1 e interpolando.

(a) sen 1,2692 (b) cos 0,5021
(c) tan 0,8986 (d) cos 1,1063
(e) tan 0,6860 (f) sen 2,2446
(g) cos 2,6754 (h) sen 0,1423

28 Utilizando la tabla I e interpolando, determínense los valores de θ, entre 0 y $\pi/2$, aproximados con cuatro decimales, si

(a) $\tan\theta = 0{,}8172$ (b) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}5331$
(c) $\cos\theta = 0{,}2717$ (d) $\cos\theta = 0{,}9392$
(e) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}7531$ (f) $\tan\theta = 0{,}8083$
(g) $\cos\theta = 0{,}5386$ (h) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}9648$

11
Funciones inversas

En los capítulos precedentes hemos analizado algunas funciones de tipo bien específico. Bajo ciertas condiciones es importante considerar relaciones entre funciones. De estas relaciones, una nos será especialmente útil en temas posteriores.

11.1. Funciones inversas

Si f es la función

$$f : x \to \frac{12 - 3x}{4}, \tag{11.1}$$

siendo tanto el dominio como el recorrido R, la ecuación que define la función es $f(x) = (12 - 3x)/4$. Si definimos, además, la función g mediante

$$g : x \longrightarrow \frac{12 - 4x}{3}, \tag{11.2}$$

siendo también en este caso el dominio y el recorrido R, podemos considerar las expresiones $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$. Específicamente, puesto que

$$g(x) = \frac{12 - 4x}{3}$$

para todo x, con $f[g(x)]$ queremos significar el valor de f para $(12 - 4x)/3$, esto es,

$$f\left(\frac{12 - 4x}{3}\right)$$

Tenemos

$$f\left(\frac{12-4x}{3}\right)=\frac{12-3[(12-4x)/3]}{4}=\frac{12-(12-4x)}{4}=x,$$

de modo que

$$f[g(x)] = x \tag{11.3}$$

para todo x en el dominio de g. Análogamente, podemos demostrar que

$$g[f(x)] = x \tag{11.4}$$

para todo x en el dominio de f. Se dice que dos funciones de este tipo son *inversas* una de la otra.

Otro ejemplo simple que podríamos mencionar es la función f en que $f: x \rightarrow 1/x$, para todo $x \in R$, $x \neq 0$. Esta funcion es su propia inversa, puesto que

$$f[f(x)] = \frac{1}{1/x} = x$$

para todo $x \neq 0$.

La noción de funciones inversas puede enunciarse en forma general.

DEFINICIÓN 11.1. *Si f y g son dos funciones relacionadas entre si por*

$$f[g(x)] = x$$

para todo x en el dominio de g y

$$g[f(x)] = x$$

para todo x en el dominio de f, entonces f y g se dicen ser inversas *una de la otra.*

Tanto f como g tienen una inversa y cada una es la inversa de la otra.

Si bien las dos funciones mencionadas al comienzo de la presente sección tienen inversa, éste no es siempre el caso. Consideremos la función

$$f: x \rightarrow \frac{x^2-1}{x}, \tag{11.5}$$

definida para todo $x \in R$, $x \neq 0$. Esta función no tiene inversa. Demostraremos esta proposición suponiendo que existe una inversa de f, la cual designaremos por g; luego, $g[f(x)] = x$ para todo x en el dominio de f. Si $x = 1$, $g[f(1)] = g(0)$; además, si $x = -1$, $g[f(-1)] = g(0)$. Por tanto, $g[f(1)] = g[f(-1)]$; pero,

como hemos supuesto que g es la inversa de f, por definición $g[f(1)] = 1$, y $g[f(-1)] = -1$, de modo que $1 = -1$. Esta contradicción demuestra que no existe inversa para esta función f.

La razón de esta dificultad se ve claramente si analizamos f más detalladamente. Despejando x en $f(x) = (x^2 - 1)/x$, obtenemos $xf(x) = x^2 - 1$, ó $x^2 - xf(x) - 1 = 0$ Esta es una ecuación cuadrática en x, de modo que,

$$x = \frac{f(x) \pm \sqrt{[f(x)]^2 + 4}}{2}. \tag{11.6}$$

Luego a un determinado valor de $f(x)$ le corresponden dos valores distintos de x. Por ejemplo, si $f(x) = 0$ (caso considerado anteriormente), $x = 1$ ó -1. En otras palabras, la función f aplica tanto 1 como -1 en el mismo valor, 0, del recorrido de f. Ninguna función que aplica dos elementos distintos del dominio en un mismo elemento del recorrido puede tener una función inversa. Enunciaremos esta proposición en forma de teorema.

TEOREMA 11.1. *Si la función f tiene una inversa, entonces, para dos elementos cualesquiera x_1 y x_2 en el dominio de f, con $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.* (INYECTIVAD)

Demostración: Supongamos que el teorema no es verdadero; entonces, tenemos $x_1 \neq x_2$ pero $f(x_1) = f(x_2)$. Puesto que la función inversa existe, designándola por g, tenemos $g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$; pero, como g es la inversa de f, $g[f(x_1)] = x_1$ y $g[f(x_2)] = x_2$, de modo que $x_1 = x_2$. Puesto que esto contradice la proposición de que $x_1 \neq x_2$, nuestra suposición es falsa y el teorema queda demostrado.

Recordemos de la sección 1.1 la definición de correspondencia uno-a-uno (biunívoca) para conjuntos (Definición 1.2). Hemos demostrado que si f tiene una inversa, la función es uno-a-uno, esto es, elementos distintos del dominio son aplicados por la función f en elementos distintos del recorrido. La proposición recíproca de este teorema es también verdadera.

TEOREMA 11.2. *Si la función f es biunívoca, entonces f tiene una inversa.*

Demostración: Para todo y en el recorrido de f, existe un y solo un x en el dominio de f tal que $y = f(x)$. Podemos entonces definir una función g que aplique y en x, a saber, $g : y \to x$, de modo que $x = g(y)$, siendo el dominio de g el recorrido de f (y el recorrido de g el dominio de f). Luego, $f[g(y)] = f(x) = y$ y $g[f(x)] = g(y) = x$; lo cual es precisamente la definición del hecho de que g es la inversa de f (y f la inversa de g).

Designaremos la inversa (si existe) de una función f, por f^{-1} (léase «inversa de f»).

Hemos demostrado no solamente el Teorema 11.2, sino que, además, hemos demostrado que

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \text{y} \quad f^{-1}[f(x)] = x. \tag{11.7}$$

siempre que la inversa existe. Además, la inversa de f, f^{-1}, existe si y sólo si f es biunívoca.

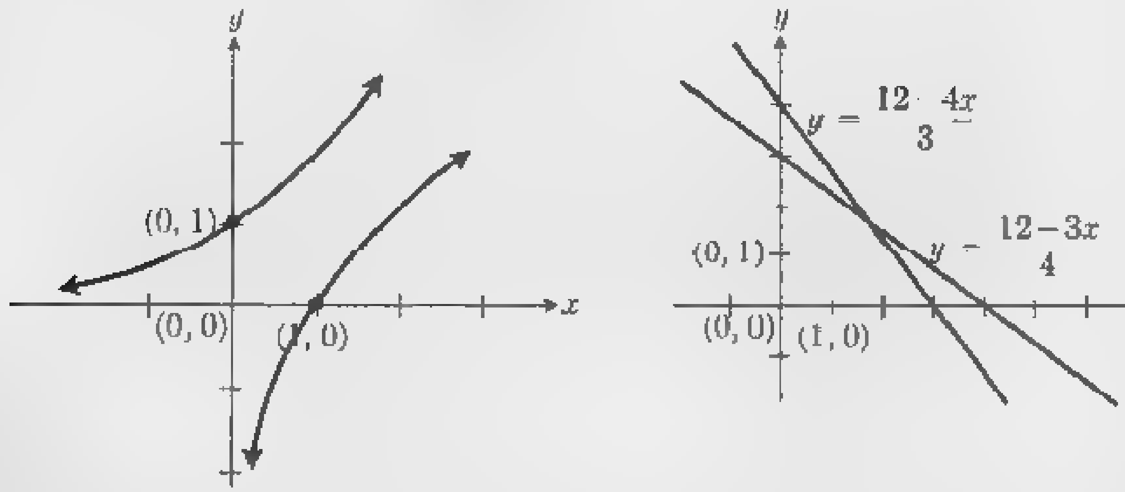
Si consideramos a f como definida por un conjunto de pares ordenados, esto es, f definida por Definición 5.2,

$$\{(x, y) | y = f(x)\}, \tag{11.8}$$

observamos que no hay dos pares ordenados que tengan el mismo primer elemento, puesto que este conjunto define una función. Si f^{-1} existe, o sea, si f es biunívoca, no hay dos pares ordenados que tengan el mismo segundo elemento. Por tanto, si x está en el dominio de f e $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$, o la función f^{-1} puede definirse como conjunto de pares ordenados simplemente cambiando el orden de los elementos de los pares ordenados que definen a f; esto es, f^{-1} queda definida por

$$\{(y, x) | x = f^{-1}(y)\}. \tag{11.9}$$

Por ejemplo, si f está definida por $f: x \rightarrow (12 - 3x)/4$, de modo que $f(x) = y = (12 - 3x)/4$, despejando x, obtenemos $x = (12 - 4y)/3$ e, intercambiando x e y, tenemos $y = (12 - 4x)/3$. Luego, $f^{-1}: x \rightarrow (12 - 4x)/3$. En general, si $y = f(x)$ es la ecuación que define una función que tiene inversa, la inversa puede obtenerse intercambiando x e y, de modo que $x = f(y)$, y despejando en seguida de aquí y. El recorrido de f será el dominio de f^{-1} y el dominio de f, el recorrido de f^{-1}. En algunos casos pueden presentarse dificultades al utilizar este método,* *debiéndose siempre tomar precauciones al elegir los dominios y recorridos de cada función de modo que f sea biunívoca.*



11-1

* Puede ser imposible despejar y, como, por ejemplo, en el caso $x = y - \text{sen}\, y$.

En los ejemplos tabulados a continuación, nótese que el dominio y el recorrido de cada función deben restringirse.

	$y = f(x)$		$y = f^{-1}(x)$	
(a)	$y = \dfrac{12 - 3x}{4}$	$(-\infty < x < \infty)$*	$y = \dfrac{12 - 4x}{3}$	$(-\infty < x < \infty)$
(b)	$y = \dfrac{1}{x}$	$(x \neq 0)$	$y = \dfrac{1}{x}$	$(x \neq 0)$
(c)	$y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$	$(0 < x)$	$y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$	$(-\infty < x < \infty)$
		$(x < 0)$	$y = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$	$(-\infty < x < \infty)$
(d)	$y = \sqrt{1 - x^2}$	$(0 \leq x \leq 1)$	$y = \sqrt{1 - x^2}$	$(0 \leq x \leq 1)$
		$(-1 \leq x \leq 0)$	$y = -\sqrt{1 - x^2}$	$(0 \leq x \leq 1)$
	$y = -\sqrt{1 - x^2}$	$(0 \leq x \leq 1)$	$y = \sqrt{1 - x^2}$	$(-1 \leq x \leq 0)$
		$(-1 \leq x \leq 0)$	$y = -\sqrt{1 - x^2}$	$(-1 \leq x \leq 0)$

Las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ del ejemplo (a) y de la primera función de (c) se ilustran en la fig. 11-1. Obsérvese que las curvas correspondientes a $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a la recta $y = x$. ¿Será éste siempre el caso? Analícense las gráficas de las funciones dadas en los otros ejemplos.

Problemas

Determínese la inversa de cada una de las funciones definidas por las ecuaciones siguientes (problemas 1 a 11) si es que la inversa existe. Si la inversa no existe en el mayor dominio posible, restrínjase este dominio de modo que la inversa exista. En cada caso, indíquense el dominio y el recorrido de cada función y su inversa.

1 $y = 5x - 6$.

2 $y = x^2$.

3 $y = x^2 - 4x$

4 $y = \dfrac{x}{x - 3}$

5 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

6 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

7 $y = x^n$.

8 $y = x^{2n} + 2x^n + 1$

9 $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

10 $y = \dfrac{-3\sqrt{25 - x^2}}{5}$.

11 $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

* La notación $-\infty < x < \infty$ significa: todos los valores reales finitos de x, positivos, negativos y cero.

12 Explíquese la razón por la cual una recta paralela al eje x o al eje y corta a la gráfica de una función a lo más en un punto si la función tiene inversa.

13 Recordemos de la nota al pie en la sección 6.3 que se dice que una función f es creciente si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. Demuéstrese que si f es creciente, f^{-1} existe.

14 Hicimos notar que si (a, b) es un punto cualquiera de la gráfica de f, entonces (b, a) es un punto de la gráfica de f^{-1}. Descríbase la posición relativa de estos dos puntos respecto a la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = x$. Esta propiedad es de utilidad en la construcción de la gráfica de f^{-1} si la gráfica de f es conocida.

11.2. Representación gráfica de algunas relaciones

Si analizamos el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, y) | xy - x^2 + 1 = 0\}, \tag{11.10}$$

podemos considerar este conjunto como una función $f: x \to y$, puesto que para todo valor de x a excepción de cero, la ecuación determina un valor único para y. Podemos verificar esto despejando y en $xy - x^2 + 1 = 0$, lo que da $y = (x^2 - 1)/x$. Sin embargo, si despejamos x, obtenemos $x = (y \pm \sqrt{y^2 + 4})/2$, de modo que no es posible considerar la ecuación $xy - x^2 + 1 = 0$ como definiendo una función f que aplique $y \to x$, sino solamente una relación. Tales relaciones, definidas por ecuaciones similares, pueden, sin embargo, representarse gráficamente. A menudo es conveniente utilizar la expresión de y en función de x y la de x en función de y, aunque ellas no definan necesariamente una función.

EJEMPLO. Bosquéjese la gráfica de la relación expresada por la ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0.$$

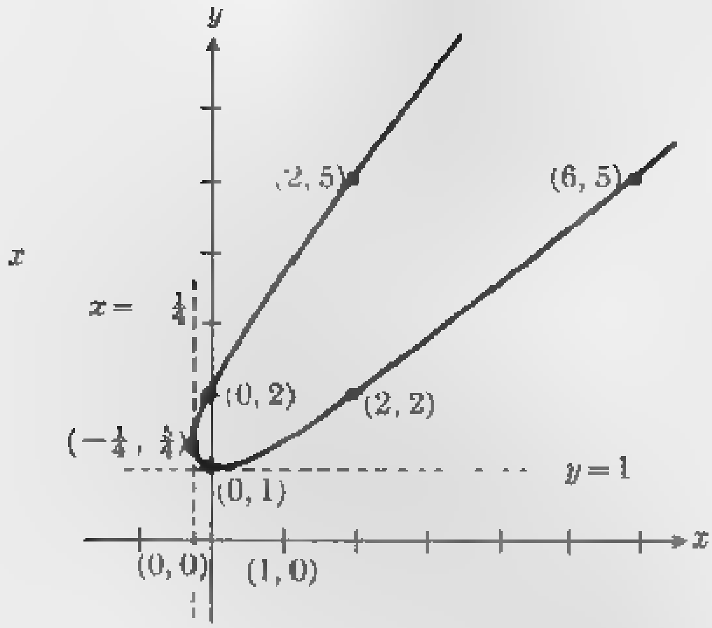
Solución: Utilizando la fórmula cuadrática para despejar x en función de y, encontramos

$$x = y - 1 \pm \sqrt{y - 1}.$$

A partir de esta expresión podemos tabular algunos valores, observando que a cada valor de y le corresponden dos valores de x. Por ejemplo, si $y = 2$, $x = 2$ ó 0. Si $y = 1$, $x = 0$ es una raíz doble y la curva es tangente a $y = 1$ en este punto. Además, si $y < 1$, los valores de x son imaginarios, de modo que la curva se encuentra en la zona donde $y \geq 1$.

Despejando y en función de x, tenemos

$$y = \frac{2x + 3 \pm \sqrt{4x + 1}}{2}.$$



11-2

Nuevamente, es fácil determinar conjuntos de valores que satisfagan la ecuación. Además, la curva se encuentra en la zona donde $x \geq -\frac{1}{4}$ y es tangente a la recta $x = -\frac{1}{4}$ en $y = \frac{5}{4}$ La curva resultante (véase fig. 11-2) es una parábola, si bien su ecuación no es tan simple como las consideradas en la sección 8.3.

Con estos antecedentes podemos ahora resolver gráficamente sistemas de ecuaciones del tipo considerado en el ejemplo 2, sección 8.12

Problemas

Bosquéjese la gráfica de cada una de las relaciones expresadas por las ecuaciones 1 a 10.

1 $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$ 2 $x^2 - y^2 - 1 = 0.$

3 $xy = 1.$ 4 $x - 2 = \dfrac{1}{y-3}.$

5 $4x^2 + 4y^2 - 12x - 10y + 5 = 0.$ 6 $2xy + 4y - 6x = 0.$

7 $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = 1.$ 8 $x^2 + xy + y^2 - 3y - 3 = 0.$

11 Resuélvase gráficamente el ejemplo 2, sección 8.12.

12 Resuélvanse gráficamente los problemas 7 y 9, sección 8.12.

13 Resuélvanse gráficamente los problemas 8 y 10, sección 8.12.

11.3. Funciones circulares inversas

El concepto de relación o función inversa es particularmente importante al estudiar las funciones circulares y sus propiedades. Al considerar la función cuya ecuación es $y = \operatorname{sen}\theta$, podemos querer referirnos a y, el seno de θ, pero también es posible que queramos poner el énfasis en el número θ, esto es, θ cuyo seno es y. Esta consideración se presenta tan a menudo que para indicar que «θ es un número cuyo seno es y», esto es, la relación inversa de $y = \operatorname{sen}\theta$, se utiliza un nombre y una notación especial. Alrededor de 1730, Daniel Bernoulli y Leonhard Euler introdujeron la notación

$$\theta = \operatorname{arcsen} y \tag{11.11}$$

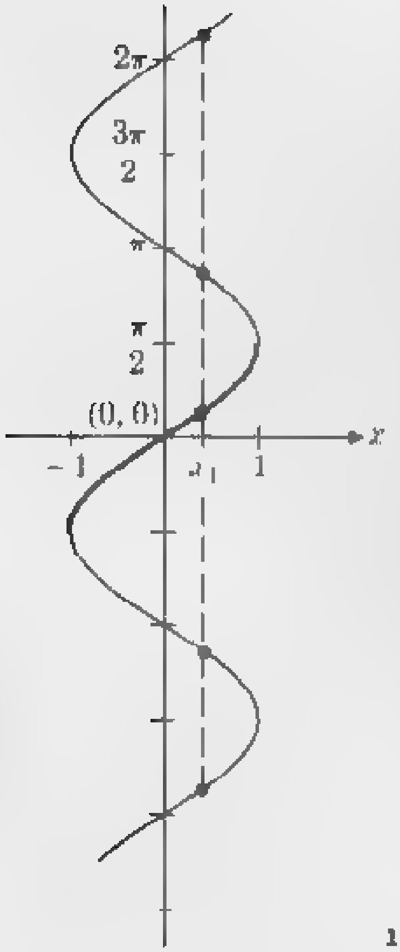
para indicar un valor cuyo seno es y, y en esa forma esta expresión recibió el nombre de *arcseno de y*. Esta fue la primera notación adecuada para una relación circular inversa. Posteriormente, en 1813, John Herschel introdujo otra notación que también se ha seguido utilizando, $\theta = \operatorname{sen}^{-1} y$. Aquí, -1 se utiliza no como exponente, sino como indicación de que se trata de una relación inversa, de acuerdo con la notación corrientemente usada, f^{-1}, para designar la inversa de una función f.

Según la definición precedente, si $y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$, y es un número cuyo seno es $\frac{1}{2}$; así, y puede ser igual a $\pi/6$, $5\pi/6$, $13\pi/6$, $-7\pi/6$, etc., o, en general, $y = \pi/6 \pm 2n\pi$ ó $y = 5\pi/6 \pm 2n\pi$, con $n = 1, 2, 3, ...$; por otra parte, éstos son los únicos valores que y puede tomar. Esto puede verse claramente por la gráfica de la relación. Esta consideración nos permite observar que, aunque $y = \operatorname{sen} x$ es una ecuación que define una función, la ecuación inversa $y = \operatorname{arcsen} x$ define sólo una relación; más precisamente, una relación en que a un determinado valor de x, le corresponden infinitos valores de y.

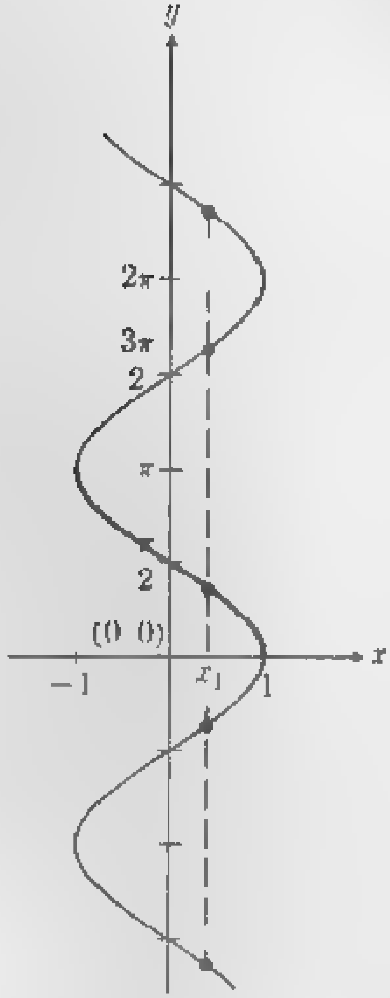
Las restantes relaciones circulares inversas se definen en forma similar. La expresión $\arccos x$ designa un número cuyo coseno es x, $\arctan x$ designa un número cuya tangente es x, etc. Las otras tres relaciones circulares inversas, $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{arcsec} x$ y $\operatorname{arccsc} x$ son de menor importancia y pueden expresarse en forma inmediata en términos de $\arctan x$, $\arccos x$ y $\operatorname{arcsen} x$, respectivamente, utilizando las ecs. (6.11), (6.12) y (6.13). Por ejemplo, $\operatorname{arccsc} x$ puede considerarse equivalente a $\operatorname{arcsen} 1/x$; específicamente,

$$\operatorname{arccsc} 2 = \operatorname{arcsen} \tfrac{1}{2} = \pi/6, \ldots \text{etc.}$$

Las gráficas de las relaciones circulares inversas muestran claramente su comportamiento. Para considerar la gráfica de $y = \operatorname{arcsen} x$, nos basta recordar la gráfica de la expresión equivalente $x = \operatorname{sen} y$. (Esta gráfica aparece en la fig. 6-7 con x e y reemplazados por y y θ.) Si construimos la gráfica de $x = \operatorname{sen} y$ en papel transparente, con el eje x vertical y el eje y horizontal, damos la vuelta al papel y lo rotamos 90° en sentido horario, el resultado es la gráfica de $y = \operatorname{arcsen} x$,



11-3

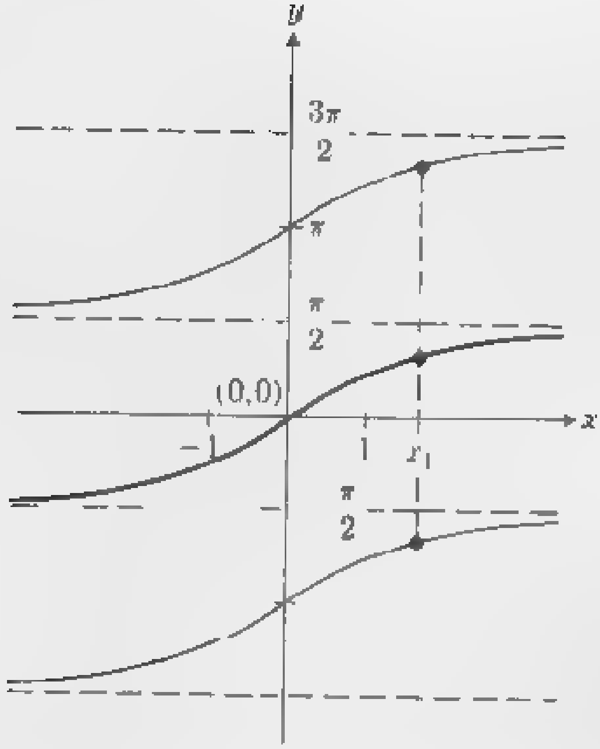


11-4

que aparece en la fig. 11-3. Las graficas de y = arccos x e y = arctan x, que se obtienen en forma similar, se ilustran en las figs 11-4 y 11-5. Obsérvese que arcsen x y arccos x están definidas sólo en el dominio en que x se encuentre comprendido entre −1 y 1, ambos inclusive; en cambio, arctan x está definida para todo valor real de x. En esa forma, arcsen 2 no tiene sentido,* puesto que no existe número real cuyo seno sea 2, pero arctan 2 tiene sentido. Según las gráficas, observamos una vez más que en estas relaciones inversas existen infinitos valores de y para un valor de x. Téngase presente esta propiedad en el caso de cada una de estas relaciones.

Si el seno de un determinado valor de y, por ejemplo, y_1, es igual a x_1, ¿qué otros valores de y tienen el mismo seno? Recordemos que la adición o substracción de múltiplos enteros de 2π no cambia la función circular de un

* Esto es verdadero en nuestro presente contexto restringido a valores reales. En matemáticas mas avanzadas, las funciones circulares pueden extenderse a valores complejos y, en este caso, arcsen 2 es un número complejo.



11-5

número; además, en el caso de la función seno, sen $(\pi - y)$ = sen y. Por tanto, $\pi - y + 2n\pi$ tendrá el mismo seno que y. En otras palabras, podemos sumar un múltiplo entero par de π a y o a $\pi - y$, y el número obtenido tendrá el mismo seno; esto es,

$$\text{arcsen } x_1 = (-1)^n y_1 + n\pi \quad (-1 \leq x_1 \leq 1) \quad \text{si} \quad \text{sen } y_1 = x_1. \qquad (11.12)$$

Esto es verdadero para todo valor entero de n y da un valor diferente de arcsen x_1 para cada valor de n. Por ejemplo, si $n = 0$, arcsen $x_1 = y_1$; si $n = 1$, arcsen $x_1 = \pi - y_1$; si $n = -1$, arcsen $x_1 = -(\pi + y_1)$; etc. De la fig. 11-3 se ve claramente que la fórmula da todos los valores posibles de arcsen x_1; ellos están indicados por la intersección de la línea vertical de puntos y la curva.

Puesto que cos $(2\pi + y)$ = cos y y cos $(-y)$ = cos y, es fácil verificar que la expresión siguiente da todos los valores de arccos x_1.

$$\text{arccos } x_1 = \pm y_1 + 2n\pi \quad (-1 \leqslant x_1 \leqslant 1) \quad \text{si} \quad \cos y_1 = x_1. \qquad (11.13)$$

Del hecho de que tan $(\pi + y)$ = tan $(2\pi + y)$ = tan y, obtenemos la expresión

$$\text{arctan } x_1 = y_1 + n\pi \quad (-\infty < x_1 < \infty) \quad \text{si} \quad \tan y_1 = x_1 \qquad (11.14)$$

para todos los valores de arctan x_1.

Como ejemplos de valores específicos de estas relaciones inversas tenemos

$$\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi, \quad \operatorname{arccos}\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} + n\pi,$$

en que n es un entero cualquiera.

Hemos recalcado en esta explicación el hecho de que las relaciones circulares inversas son multiformes. Sin embargo, con restricciones adecuadas, estas relaciones inversas pueden transformarse en uno-a-uno (biunívocas), y en esta forma, obtenemos las importantes funciones circulares inversas. Como puede verse por la gráfica de $y = \operatorname{arcsen} x$ (fig 11-3), si el recorrido de la relación se limita a $-\pi/2 \leq \operatorname{arcsen} x \leq \pi/2$, existe un único y en correspondencia con cada x del dominio. En forma similar puede restringirse el recorrido de las otras relaciones circulares inversas, estableciéndose así la distinción entre relaciones y funciones inversas. Utilizaremos la A (mayúscula) para designar las funciones. Los recorridos de las tres funciones circulares inversas más importantes son:

$$-\pi/2 \leq \operatorname{arcsen} x \leq \pi/2, \tag{11.15}$$

$$0 \leq \operatorname{arccos} x \leq \pi, \tag{11.16}$$

$$-\pi/2 \leq \arctan \leq \pi/2. \tag{11.17}$$

Las gráficas de estas funciones se indican en las figuras mediante líneas gruesas.

En el caso de los ejemplos anteriores, los valores de las funciones resultan ser:

$$\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arccos}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Otros ejemplos de valores de funciones son:

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arccot}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2\pi}{3}, \quad \operatorname{arcsec}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

Problemas

Determínense los valores siguientes sin usar tablas:

1 arcsen $\sqrt{3}/2$.

Indicación: Sabemos que sen $\pi/3 = \sqrt{3}/2$; por tanto, arcsen $\sqrt{3}/2 = (-1)^n\pi/3 + n\pi$.

2 arctan 1.

3 arccos $(-\frac{1}{2})$.

4 arcsen 0.

5 arctan 0.

6 arccos (-1).

7 arcsec $\sqrt{2}$.

8 arccot $(-\sqrt{3})$.

9 arccos 0.

10 $\arctan(-1)$.

11 $\operatorname{arcsen}(-1)$

12 $\operatorname{arccsc} 2$

Con la ayuda de la tabla I, determínese el valor de cada una de las expresiones siguientes.

13 $\operatorname{arcsen} 0{,}4067$.

14 $\arctan 1{,}5399$.

15 $\arccos 0{,}6293$.

16 $\arccos 0{,}8450$.

17 $\operatorname{arcsen} 0{,}9951$.

18 $\arctan 0{,}3281$.

Resuélvanse respecto de θ:

19 $y = \operatorname{sen} 4\theta$.

Indicación: Sabemos que $4\theta = \operatorname{arcsen} y$, luego, $\theta = (\operatorname{arcsen} y)/4$.

20 $y = \cos 3\theta$.

21 $y = 3 \tan 2\theta$.

22 $y = \operatorname{sen}(\theta/2)$.

23 $2y = 4 \sec 2\theta$.

24 $3y = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$.

25 Explíquese la razón por la cual $y = \arccos x$ no puede ser tomado en el intervalo $-\pi/2 < y \leq \pi/2$.

Resuélvanse respecto de x:

26 $y = \operatorname{arcsen} 2x$.

27 $y = \frac{1}{3} \arccos(4x - 4)$.

28 $y = \arctan(x - 2)$

29 $y = \arctan x - 2$.

30 $y = \pi + 2 \operatorname{arcsen} x$.

31 $8y = (\pi/3) - 4 \arccos(2x + 1)$.

11.4. Operaciones con funciones circulares inversas

La forma más conveniente de considerar operaciones con las relaciones y funciones inversas es analizando diversos ejemplos. Puesto que las funciones circulares inversas son los mismos números θ para los cuales hemos establecido diversas fórmulas, es a veces más expedito substituir estas funciones o relaciones por un número θ o ω. Este tipo de substitución se ilustrará en los ejemplos.

EJEMPLO 1. Determínese el valor de $\operatorname{sen}(\arccos \frac{3}{5})$.

Solución: Este ejemplo, similar a muchos problemas del capítulo 6, consiste en encontrar el seno de un número cuyo coseno es $\frac{3}{5}$. Sea θ este número; luego $\cos\theta = \frac{3}{5}$ y $\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \pm\frac{4}{5}$.

EJEMPLO 2. Determínese el valor de $\cos(\operatorname{arcsen} u + \arccos v)$.

Solución: Si hacemos $\operatorname{arcsen} u = \theta_1$ y $\arccos v = \theta_2$, el ejemplo se reduce a expresar $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ en función de u y v, donde

$$\operatorname{sen} \theta_1 = u, \quad \cos \theta_2 = v,$$

y, por tanto,

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - u^2}, \quad \operatorname{sen} \theta_2 = \sqrt{1 - v^2}.$$

(Explíquese por qué ambos radicales son positivos.) Luego,

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{arcsen} u + \arccos v) &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \\ &= v\sqrt{1 - u^2} - u\sqrt{1 - v^2}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Demuéstrese que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \pi/4$.

Solución: Puesto que cada término del primer miembro es menor que $\pi/4$, el primer miembro es un número entre 0 y $\pi/2$, al igual que lo es $\pi/4$, el segundo miembro. Si las tangentes de dos números son iguales, los números deben ser iguales. Tomemos tangentes de ambos miembros en la presunta igualdad y si ellas son iguales, la igualdad quedará demostrada. Debe observarse que esto es verdadero sólo porque la función tangente es uno-a-uno entre 0 y $\pi/2$.

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right) \stackrel{?}{=} \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan(\arctan\frac{1}{2}) + \tan(\arctan\frac{1}{3})}{1 - \tan(\arctan\frac{1}{2})\tan(\arctan\frac{1}{3})} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$

PROBLEMAS

Determínense los valores de las expresiones siguientes sin utilizar tablas:

1 $\operatorname{sen}(\arctan \frac{3}{4})$.

2 $\cos(\operatorname{arcsen} \frac{7}{25})$.

3 $\tan(\arccos \frac{5}{13})$.

4 $\operatorname{sen}[\arccos(-\frac{24}{25})]$.

5 $\cos(\operatorname{arcsen} \frac{5}{6})$.

6 $\tan[\operatorname{arcsen}(-\frac{3}{4})]$.

7 $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} u)$.

8 $\cos(\arccos v)$.

9 $\tan(\arccos u)$

10 $\operatorname{sen}(\arctan v)$.

11 $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \pi/7)$.

12 $\arccos[\cos(-\pi/5)]$.

13 $\arctan(\cot 4\pi/9)$.

14 $\operatorname{arcsen}(\cos \pi/7)$.

15 $\arccos(\operatorname{sen} \pi/10)$.

16 $\operatorname{arccot}[\tan(-\pi/5)]$.

17 $\operatorname{arcsen}(\tan \pi)$.

18 $\arctan(\operatorname{sen} 7\pi/2)$.

19 $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} u + \arccos v)$.

20 $\cos(\arccos u + \operatorname{arcsen} v)$.

21 $\operatorname{sen}(\arccos \frac{4}{5} + \pi)$.

22 $\cos(\pi/2 - \operatorname{arcsen} \frac{5}{13})$.

23 $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{4})$.

24 $\cos(\arctan \frac{9}{40} - \arccos \frac{15}{17})$.

25 $\tan[\operatorname{arcsen} \frac{5}{13} + \arctan(-\frac{3}{4})]$.

26 $\cos[\arccos(-\frac{1}{2}) + \operatorname{arcsen}(-\frac{1}{3})]$.

27 $\operatorname{sen}[2 \operatorname{arcsen} \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{5}]$.

28 $\cos(\operatorname{arcsen} \frac{3}{5} + \arccos \frac{5}{13} + \arctan \frac{8}{15})$.

Verifíquense las igualdades siguientes sin utilizar tablas:

29 $\arctan 3 + \arctan \frac{1}{3} = \pi/2$.

30 $\operatorname{arcsen} \frac{3}{5} + \arccos \frac{12}{13} = \operatorname{arcsen} \frac{56}{65}$.

31 $\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{4}{7}$.

32 $\arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{1}{3} = \pi/4$.

33 $\arctan \frac{1}{8} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{2} = \pi/4$.

34 ¿Es verdadera la igualdad siguiente? $\arctan 2 + \arctan 3 = -\pi/4$. Justifíquese la respuesta

35 Obsérvese que en los problemas 11 a 18 sólo aparecen funciones. Determínense todos los valores posibles de $\operatorname{arcsen}(\cos \theta)$.

Indicación. Sea $y = \operatorname{arcsen}(\cos \theta)$; luego $\operatorname{sen} y = \cos \theta = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - \theta$. Por tanto, $y = \frac{1}{2}\pi - \theta + 2n\pi$ ó $y = \pi - (\frac{1}{2}\pi - \theta) + 2n\pi = \frac{1}{2}\pi + \theta + 2n\pi$. Combinando las dos expresiones en una, tenemos $y = \frac{1}{2}\pi \pm \theta + 2n\pi$.

Determínense todos los valores posibles de:

36 $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} \theta)$.

37 $\arccos(\operatorname{sen} \theta)$.

38 $\arccos(\cos \theta)$.

39 $\arctan(\tan \theta)$.

Resuélvanse las ecuaciones siguientes para todos los valores posibles de x sin utilizar tablas y compruébense los resultados cuidadosamente.

40 $\arctan x + 2 \arctan 1 = 3\pi/4$.

41 $\arccos x + 2 \operatorname{arcsen} 1 = \pi$.

42 $\operatorname{arcsen} x + \arccos 2x = \pi/6$

Indicación. Hágase $\operatorname{arcsen} x = \alpha$, $\arccos 2x = \beta$, y utilícese $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

43 $\operatorname{arcsen} x + \arccos(1 - x) = 0$.

44 $\operatorname{arcsen} x + \arccos(1 - x) = \pi/2$.

45 $\arctan(1 + x) + \arctan(1 - x) = \pi/2$.

12

Análisis combinatorio y teoría del binomio

A menudo se presenta el problema de determinar el número de maneras en que, bajo ciertas condiciones, puede disponerse un grupo de objetos ¿De cuántas maneras pueden sentarse ocho personas a una mesa? ¿Cuántas placas o patentes de vehículos es posible formar si cada una consta de tres cifras y dos letras, etc.? Las respuestas a estas preguntas y a muchas otras, más importantes y complicadas, se pueden encontrar mediante un proceso que a veces recibe el nombre de *«enumeración sofisticada»*. Si bien no nos es posible aquí tratar en detalle esta materia, analizaremos algunos aspectos elementales de ella, ya que es de gran utilidad en matemáticas y otras ciencias naturales y sociales.

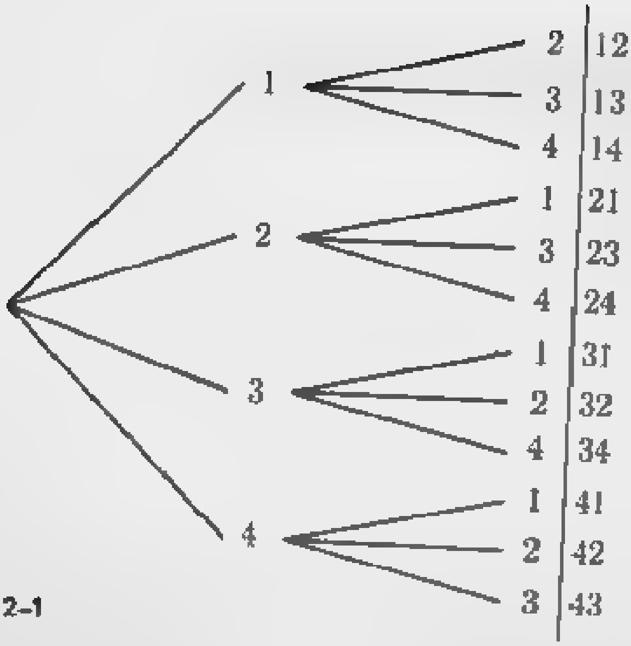
12.1. El principio fundamental

Comenzaremos considerando un ejemplo sencillo. Determinemos cuántos números de dos cifras distintas pueden formarse con los cuatro enteros 1, 2, 3 y 4. Cualquiera de ellos puede elegirse como la cifra de las decenas; una vez elegida ésta, quedan tres enteros de entre los cuales podemos elegir la cifra de las unidades. De este modo, por cada una de las cuatro alternativas iniciales, hay tres más, lo cual hace un total de $4 \cdot 3 = 12$ números. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} &12, 13, 14, \text{(1 en la cifra de las decenas)},\\ &21, 23, 24, \text{(2 en la cifra de las decenas)},\\ &31, 32, 34, \text{(3 en la cifra de las decenas)},\\ &41, 42, 43, \text{(4 en la cifra de las decenas)}. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Este ejemplo puede ilustrarse (fig. 12-1) mediante un diagrama especial. Si se permiten repeticiones, el resultado es $4 \cdot 4 = 16$ números, en lugar de 12.

Un problema algo más complicado podría consistir en determinar cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los mismos cuatro enteros 1, 2, 3 y 4. Cada uno de los 12 números dados por la ec. (12.1) puede considerarse como representando las cifras de las centenas y las decenas. Puesto que en cada caso ya se han seleccionado dos de los cuatro enteros, la cifra de las unidades



12-1

debe elegirse de entre los dos restantes. Por ejemplo, con el número 41, podemos tener el 2 ó el 3, formando los números 412 ó 413. Tenemos, por tanto, $(4 \cdot 3) \cdot 2 = 24$ números, cada uno de tres cifras distintas, que pueden formarse con los enteros dados.

El diagrama en este caso sería similar al de la fig. 12-1, con la diferencia de que, en el extremo de cada una de las últimas «*ramas*», deberían agregarse dos «*ramas*» adicionales. Análogamente, si se permitieran repeticiones en este caso, el resultado sería $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Estos ejemplos ilustran el siguiente principio fundamental.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL. *Si una operación puede efectuarse independientemente de n_1 maneras diferentes, si una segunda operación puede efectuarse independientemente de n_2 maneras diferentes, si una tercera operación puede efectuarse independientemente de n_3 maneras diferentes, y así sucesivamente (para cualquier número finito de operaciones), entonces el número total de maneras de las cuales pueden efectuarse todas las operaciones en el orden indicado es $n_1 n_2 n_3 \cdots$.*

EJEMPLO 1. ¿Cuántos de los números de la ec. (12.1) son impares?

Solución. Para que un número sea impar, su última cifra debe ser 1 ó 3. Por cada una de estas dos posibilidades, hay tres alternativas para la primera cifra; luego hay $2 \cdot 3 = 6$ números impares. Verifíquese el ejemplo y compruébese que éste es precisamente el caso.

Aunque el orden de elección del número de posibilidades para una posición particular es arbitrario, es a menudo más acertado efectuar primero una determinada operación, como lo es la elección en primer lugar de las cifras de las unidades en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2. ¿Cuántos comités diferentes de las Naciones Unidas integrados por un americano y un europeo pueden formarse de entre siete americanos y cuatro europeos?

Solución: El americano puede ser escogido de una cualquiera de siete maneras e, independientemente, el europeo puede ser escogido de una cualquiera de cuatro maneras. De este modo, aplicando el principio fundamental, el número total de comités posibles es $7 \cdot 4 = 28$.

EJEMPLO 3. Si se lanzan dos dados corrientes (cúbicos), ¿de cuántas maneras pueden caer?

Solución: Puesto que cada dado tiene seis caras, cada uno puede caer independientemente en una cualquiera de seis maneras; en consecuencia, el resultado es $6 \cdot 6 = 36$.

EJEMPLO 4. En una elección hay tres candidatos a presidente, cuatro a vicepresidente, cinco a secretario, pero sólo dos a tesorero. ¿Cuántos resultados distintos puede tener la elección?

Solución: Con cada una de las tres posibilidades para presidente, hay cuatro para vicepresidente. Con cada una de estas ($3 \cdot 4 = 12$) posibilidades, hay cinco para secretario y así sucesivamente. Luego el número total de resultados posibles de la elección es

$$4(3)(5)(2) = 120.$$

PROBLEMAS

1 Una moneda de 10 cts y una de 5 cts se lanzan sobre una mesa ¿De cuántas maneras pueden caer?

2 Un cuestionario consta de diez preguntas que deben contestarse sí o no. ¿De cuantas maneras distintas puede contestarse al cuestionario completo?

3 ¿Cuántos números de tres cifras diferentes menores que 500 pueden formarse con los enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

4 En una carrera participan 12 atletas. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los tres primeros lugares?

5 Entre las ciudades A y B hay cinco caminos principales y entre B y C hay cuatro. ¿De cuántas maneras puede una persona viajar de A a C y regresar, pasando por B en ambos sentidos y sin viajar dos veces por el mismo camino?

6 ¿Cuántos números de a lo más tres cifras distintas pueden formarse con los enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6?

7 ¿Cuántos números de al menos tres cifras distintas pueden formarse con los enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6?

8 Un club de tenis consta de 12 muchachos y 9 niñas. ¿Cuántos equipos de dobles mixtos (un muchacho y una niña) pueden formarse? ¿De cuántas maneras puede concertarse un partido de dobles mixtos?

9 Un estudiante de primer año universitario debe tomar un curso de idioma extranjero, uno de ciencia natural, uno de ciencia social y uno de español. Si puede elegir entre 4 idiomas extranjeros, 5 ciencias naturales, 3 ciencias sociales, pero todos los alumnos deben tomar el mismo curso de español, ¿de cuántas maneras puede el estudiante organizar su programa de estudios?

10 ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse un as, un rey, una reina y una sota de una baraja de 52 naipes si

(a) deben ser todos de distinto palo
(b) pueden ser de palos distintos o iguales.
(c) deben ser de un mismo palo.
(d) deben ser de un palo determinado?

11 Un hogar de estudiantes tiene ocho puertas de acceso. ¿De cuántas maneras puede un estudiante entrar por una puerta y

(a) salir por otra distinta. 56
(b) salir por una puerta cualquiera? 64

12 Un estadio tiene cuatro puertas de entrada y nueve de salida. ¿De cuántas maneras pueden dos hombres entrar juntos, pero salir por puertas diferentes?

12.2. Permutaciones

Definiremos lo que entendemos por permutación.

DEFINICIÓN 12.1. *Cada ordenación o disposición diferente de un grupo de objetos se llama* permutación *de estos objetos.*

Por ejemplo, los números 423 y 234 constan de los mismos dígitos, pero son números distintos porque constituyen ordenaciones diferentes de los dígitos 2, 3 y 4. En general, si tenemos n objetos y disponemos r de ellos ($r \leq n$) en un orden determinado, llamamos a esta disposición una permutación* de los n objetos tomados de r en r.

Podemos establecer fácilmente una expresión para el numero total de permutaciones de n objetos tomados de r en r, utilizando el principio fundamental

---

* En algunos textos se acostumbra distinguir entre los casos $r < n$ (en el cual se habla de *arreglos* o *variaciones*) y $r = n$ (para el cual se reserva el nombre de *permutaciones*). Aquí hemos incluido los dos casos dentro del nombre común de *permutaciones*, ya que en ambos está implicada la idea intuitiva de que es posible «permutar» los objetos para obtener disposiciones diferentes en oposición a las llamadas «combinaciones» que se verán más adelante. (Ver sección 12.3.) (*N. del T.*)

de la sección 12.1. Esta expresión, que depende de n y r, la designaremos por $P(n, r)$.*

TEOREMA 12.1. *El número total de permutaciones de n objetos tomados de r en r, $P(n, r)$, está dado por:*

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \tag{12.2}$$

Demostración: El número de disposiciones posibles de n objetos, tomando r cada vez, es equivalente al número de maneras en que puede escogerse de entre n objetos para ocupar r espacios. Hay n posibilidades para el primer espacio, $n - 1$ para el segundo, $n - 2$ para el tercero, y así sucesivamente. El *r-ésimo* (último) espacio puede ocuparse con uno cualquiera de los $n - (r - 1) = n - r + 1$ objetos restantes, de modo que los r espacios pueden llenarse de $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ maneras. Luego,

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Si nos interesan las permutaciones de los n objetos, tomándolos todos a la vez ($r = n$), tenemos, haciendo $r = n$ en la ec. (12.2),

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n! \tag{12.3}$$

La expresión $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ aparece con frecuencia y aquí la simbolizaremos por $n!$ (léase «n factorial»). Así se tiene $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ y $1! = 1$. Por convención, cero factorial $= 0! = 1$.**

Amplificando el segundo miembro de la ec. (12.2) por $(n - r)!$ obtenemos la siguiente expresión para $P(n, r)$:

$$P(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

o

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{12.4}$$

EJEMPLO 1. Determínese el número de permutaciones de los cuatro enteros 1, 2, 3 y 4 tomados de dos en dos.

* También se emplean los símbolos ${}_nP_r$, P_r^n, ${}^nP_r$ (*N del T*)

** Cero factorial, $0!$, se hace por definición igual a 1.

Solución: Puesto que queremos determinar el número de disposiciones de cuatro objetos tomados de dos en dos,

$$P(4, 2) = 4 \cdot 3 = 12.$$

Las doce permutaciones se enumeran en la sección 12.1.

EJEMPLO 2. Si cuatro personas suben a un ómnibus en el que hay diez asientos desocupados, ¿de cuántas maneras pueden sentarse?

Solución: Esto corresponde al número de disposiciones de los diez asientos tomados de cuatro en cuatro,

$$P(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

EJEMPLO 3. ¿De cuántas maneras pueden colocarse cinco libros en un estante?

Solución: Esto corresponde a las permutaciones de cinco objetos, tomados todos a la vez. Luego,

$$P(5, 5) = 5! = 120.$$

Si bien el número de permutaciones de las ocho letras de la palabra «neumático» es evidentemente 9!, el número de permutaciones de las letras de «elefantes» es menor, porque tres de las letras son iguales. Antes de enunciar y demostrar el siguiente teorema, veremos un ejemplo.

EJEMPLO 4. Determínese el número de permutaciones de las ocho letras de «elefantes».

Solución: Si todas las letras fueran distintas, tendríamos que P, número de permutaciones, sería 9! Esto podría hacerse colocando subíndices a las letras iguales, tal como e_1, e_2 y e_3. Las tres «e» pueden permutarse entre ellas de 3! maneras; éste sería el caso en cada una de las diferentes disposiciones. Luego $3!P = 9!$, ó

$$P = \frac{9!}{3!}$$

La demostración del teorema general a continuación sigue el esquema del razonamiento del ejemplo 4 y se deja como ejercicio.

TEOREMA 12.2. *Si P representa el número de permutaciones diferentes de n objetos, tomados todos a la vez, de los cuales hay p iguales entre sí, otros q iguales entre sí, otros r iguales entre sí, etc.; entonces,*

$$P = \frac{n!}{p!q!r!\cdots}. \tag{12.5}$$

Ejemplo 5. ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las 11 letras de la palabra «Mississippi» tomándolas todas a la vez?

Solución: Puesto que hay cuatro «*i*», cuatro «*s*» y dos «*p*»,

$$P = \frac{11!}{4!4!2!} = 34.650$$

Problemas

1 ¿Cuántos números de tres cifras diferentes pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?

2 ¿Cuántos números de tres cifras diferentes y menores que 700 pueden formarse con los dígitos del problema 1?

3 ¿Cuántos números que tengan a lo más tres cifras pueden formarse con los dígitos del problema 1?

4 ¿De cuántas maneras pueden elegirse presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de un curso de 100 alumnos?

5 ¿De cuántas maneras pueden sentarse, en una fila de siete asientos, cuatro muchachos y tres niñas

(a) si pueden sentarse en cualquier orden,
(b) alternándose muchachos y niñas?

6 ¿De cuantas maneras pueden sentarse, en una fila de ocho asientos, cuatro muchachos y cuatro niñas

(a) si pueden sentarse en cualquier orden,
(b) alternándose muchachos y niñas?

7 El director de un equipo de béisbol insiste en que su mejor bateador debe batear en cuarto lugar y el «pitcher» al final. En estas circunstancias, ¿cuantos ordenes de bateo son posibles?

8 ¿De cuántas maneras pueden sentarse ocho personas en una fila de ocho asientos si dos personas insisten en sentarse una al lado de la otra?

9 Un profesor de idiomas desea mantener juntos en su estante los libros de un mismo idioma. Si tiene 12 espacios para 5 libros franceses, 4 italianos y 3 alemanes, ¿de cuantas maneras los puede colocar en el estante?

10 ¿De cuántas maneras pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa?

11 ¿De cuántas maneras pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa, si dos personas insisten en sentarse una al lado de la otra?

1 1 10

12 ¿Cuantas placas de vehiculos pueden hacerse utilizando dos letras cualesquiera en los dos primeros lugares y cualquiera de los números de 0 a 9 en los tres lugares restantes?

13 Resuélvase el problema 12, agregando la condición de que ni las letras ni los números pueden repetirse. 468 000

14 ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de las palabras

(a) «aritmética» (b) «colegio»?

15 ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de la palabra «matemática»?

16 ¿De cuántas maneras pueden disponerse en una fila cuatro cuentas rojas, cinco blancas y tres azules?

17 ¿De cuántas maneras pueden disponerse siete cuentas de distintos colores para hacer un brazalete?

18 Demuéstrese que $P(n+1, r) \equiv (n+1)P(n, r-1)$.

19 Determínese n si $P(n, 5) = 20P(n, 3)$. $n = 8$

20 Calcúlese el valor de $P(5, 1) + P(5, 2) + P(5, 3) + P(5, 4) + P(5, 5)$.

12.3. Combinaciones

A diferencia de una permutación, que es una disposición ordenada de determinados objetos, una *combinación* es un conjunto o colección de objetos en un orden no especificado. De este modo, por combinaciones de n objetos diferentes tomados de r en r $(r \leq n)$, queremos significar todas las selecciones posibles de r objetos de entre los n, sin considerar un determinado orden en ellos. El número total de estas combinaciones se designa por $C(n, r)$,* puesto que también depende de n y r.

La diferencia entre permutaciones y combinaciones, diferencia importante, está en la ordenación de los objetos. El teorema siguiente aclarará esta diferencia.

TEOREMA 12.3. *El número total de combinaciones de n objetos tomados de r en r, C(n, r), está dado por la expresión*

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}. \tag{12.6}$$

Demostración: En cada una de las $C(n, r)$ combinaciones, consistente de r objetos diferentes, estos r objetos pueden reordenarse, permutándolos, en $r!$ maneras distintas. Así, por cada combinación habrá $r!$ permutaciones, de modo que por las $C(n, r)$ combinaciones habrá $C(n, r)r!$ permutaciones diferentes.

* También se utilizan a menudo las notaciones ${}_nC_r$, C_r^n y $\binom{n}{r}$. Hemos elegido $C(n, r)$ porque concuerda con la notación para el valor de una función. Además, es fácil de imprimir, razón ésta que constituye una ventaja adicional en el «lenguaje» de las máquinas calculadoras.

Puesto que éstas constituyen todas las permutaciones posibles de los n objetos, tomados de r en r, tenemos

$$C(n, r)r! = P(n, r),$$

o

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}. \tag{12.7}$$

Substituyendo la expresión para $P(n, r)$, ec. (12.4), obtenemos,

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!r!}. \tag{12.6}$$

Una consecuencia inmediata de esta igualdad es

$$C(n, r) = C(n, n - r). \tag{12.8}$$

Esta relación puede emplearse para disminuir los cálculos si n es relativamente grande y $r \leq n$, pero también grande. (Véase ejemplo 1.)

Ejemplo 1. Calcúlese $C(15, 12)$.

Solución: Utilizando la ec. (12.7), que es la expresión más frecuentemente usada al resolver problemas,

$$C(15, 12) = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{12}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = C(15, 3),$$

de modo que $C(15, 12) = 455$.

Ejemplo 2. En un curso de 15 muchachos y 10 niñas, ¿de cuántas maneras puede formarse un comité de 3 muchachos y 2 niñas?

Solución. Puesto que en el comité no se considera un orden entre los miembros de él, los muchachos pueden seleccionarse de $C(15, 3)$ maneras y las niñas de $C(10, 2)$. Aplicando el principio fundamental,

$$C(15, 3) \cdot C(10, 2) = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 20.475.$$

Ejemplo 3. En un examen, el alumno debe contestar 8 de un total de 12 preguntas, debiendo incluir exactamente 5 de entre las 6 primeras. ¿De cuántas maneras puede hacer su examen?

Solución: Puesto que debe contestar 5 de las 6 primeras preguntas, esto puede hacerse de $C(6, 5)$ maneras. Las 3 restantes que debe contestar debe elegirlas de entre las 6 últimas, y esto puede hacerse de $C(6, 3)$ maneras. Por tanto, el número de maneras distintas en que puede escribir su examen es

$$C(6, 5) \cdot C(6, 3) = 120.$$

A menudo deseamos determinar el número de combinaciones de n objetos tomados sucesivamente de 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, ..., n en n.

EJEMPLO 4. ¿Cuantas sumas diferentes de dinero se pueden formar con cuatro monedas: una de 25 cts., una de 10 cts., una de 5 cts. y una de 1 ct.?

Solución: Puesto que hay cuatro monedas diferentes, el número de sumas distintas de dinero es

$$C(4, 1) + C(4, 2) + C(4, 3) + C(4, 4) = 15.$$

En la sección siguiente veremos un método más simple para hacer este cálculo. (Véase problema 29, sección 11.4.)

PROBLEMAS

1 Calcúlese el valor de

(a) $C(7, 4)$ (b) $C(10, 2)$ (c) $C(21, 19)$.

2 Calcúlese el valor de

$$C(8, 3) + C(8, 4) + C(8, 5) + C(8, 6) + C(8, 7) + C(8, 8).$$

3 ¿De cuántas maneras puede elegirse un comité de 4 en un grupo de 25?

4 De un grupo de 25 asiáticos y 18 africanos, ¿cuántos comités de 3 asiáticos y 2 africanos es posible formar?

5 Del grupo del problema 4, si uno de dos asiáticos determinados debe presidir el comité, ¿cuántos comités pueden formarse con el mismo número de miembros de cada partido que en el problema 4?

6 En una competición de fútbol participan nueve equipos. ¿Cuántos partidos deben jugarse si cada equipo debe jugar con todos los otros?

7 Un equipo de fútbol dispone de 3 arqueros, 6 defensas, 5 medios y 6 atacantes. ¿Cuántas formaciones diferentes puede presentar? Supóngase que el equipo juega con la disposición llamada del 4-3-3.

8 En el juego de «bridge», ¿cuántas «manos» de 13 naipes pueden seleccionarse de una baraja de 52?

9 ¿De cuántas maneras puede obtener una persona una mano de «bridge» (13 cartas) consistente sólo de ases o naipes con figuras?

10 ¿De cuántas maneras puede obtener una persona una mano de «bridge» consistente de naipes con puntaje siete o menos?

11 ¿De cuántas maneras puede obtener una persona una mano de «bridge» consistente de dos ases, un rey, una reina, tres sotas y los otros seis naipes con puntaje diez o menos?

12 De entre 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 azules, ¿de cuántas maneras pueden seleccionarse 5 bolas si deben ser 2 rojas, una blanca y 2 azules? -36,0

13 Sin considerar casos especiales,

(a) ¿cuántas rectas quedan determinadas por nueve puntos? 36
(b) ¿cuántas circunferencias quedan determinadas por nueve puntos? 8-1

14 ¿Cuántos triángulos quedan determinados por nueve puntos, si no hay tres que sean colineales?

15 ¿Cuántos tetraedros quedan determinados por nueve puntos, si no hay cuatro que estén en un mismo plano?

126

16 De un grupo de 15 personas, ¿cuántos comités de dos, tres o cuatro personas pueden formarse?

17 ¿De cuántas maneras puede invitar a tomar té la esposa del rector de una universidad a

(a) dos 28 (b) tres 56 (c) dos o más. 24

esposas de ocho profesores de la universidad?

18 ¿Cuántas sumas diferentes de dinero se pueden formar con cinco monedas: una de 1 ct, una de 5 cts, una de 10 cts, una de 25 cts y una de 50 cts, si cada vez deben usarse por lo menos dos monedas?

19 Determínese n si $C(n+2, 4) = 6C(n, 2)$. $n = 7$

▶ 20 Demuéstrese que $C(n, r) + C(n, r-1) \equiv C(n+1, r)$.

▶ 21 Examínense los números anotados en la tabla siguiente. Ellos representan $C(n, r)$ donde los valores de r están anotados horizontalmente y los de n, verticalmente. Por ejemplo, $C(4, 3) = 4$, puesto que, leyendo a lo largo del renglón $n = 4$ y hacia abajo en la columna $r = 3$, en el punto de intersección de ambas líneas se encuentra el número 4. Obsérvese que la igualdad $C(n+1, r) \equiv C(n, r) + C(n, r-1)$ es verificada por todas las anotaciones.

r / n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

22 La identidad $C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$ se llama regla de Pascal. Pascal (1623-1662) fue uno de los hombres que en el siglo XVII estudiaron esta disposición, dada en la tabla precedente, en relación con el estudio de juegos de azar. Los números de este cuadro reciben el nombre de triángulo de Pascal. Utilizando la igualdad, extiéndase la tabla con n y r hasta 10, suponiendo que $C(n, 0) = C(n, n) = 1$.

23 Demuéstrese que

$$C(n, r+1) = \frac{n-r}{r+1} C(n, r), \quad \text{para} \quad 0 \leq r < n.$$

El triángulo de Pascal puede también construirse usando esta fórmula. Determínese en esta forma los valores para $n = 7$, suponiendo $C(7, 0) = 1$.

24 Demuéstrese la relación $rC(n, r) = nC(n-1, r-1)$.

12.4. El teorema del binomio

Un importante teorema del álgebra está relacionado con las ideas que hemos considerado en el presente capítulo. En el capítulo 3 vimos un método para multiplicar polinomios; aplicándolo, obtenemos

$$(a+b)^1 = a + b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

y

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Examinando estos productos, dos hechos resaltan de inmediato. (1) Los coeficientes son iguales a los números que aparecen en la tabla del problema 21, sección 12,3. (2) Cada uno de los coeficientes puede expresarse en función de las expresiones $C(n, r)$; por ejemplo,

$$(a+b)^4 = C(4,0)a^4 + C(4,1)a^3b + C(4,2)a^2b^2 + C(4,3)ab^3 + C(4,4)b^4.$$

A partir de estas dos observaciones, parece natural esperar una expresión análoga para el desarrollo de $(a+b)^n$, siendo n un entero positivo cualquiera; éste es precisamente el caso, el que se conoce como teorema del binomio.

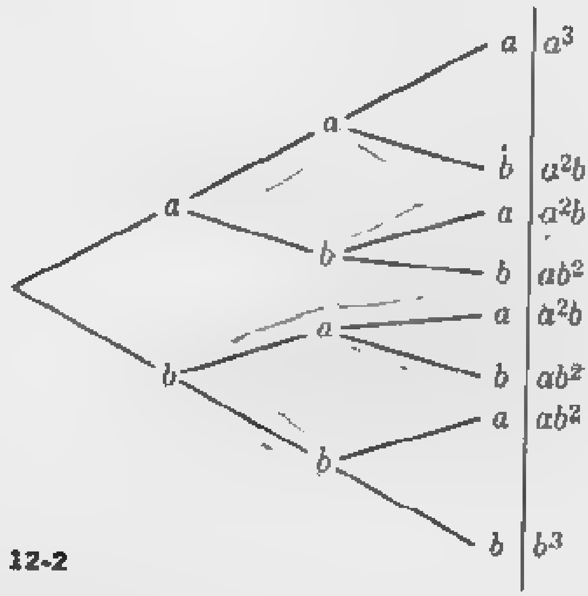
TEOREMA 12.4. Teorema del binomio. *Para todo entero positivo n,*

$$(a+b)^n = C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 + \\ + \cdots + C(n,r)a^{n-r}b^r + \cdots + C(n,n)b^n \qquad (12.9)$$

Demostración: Para todo entero positivo n, $(a + b)^n$ es el producto de n factores iguales $(a + b)$, o sea,

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b) + \cdots + (a + b)}_{n \text{ factores}}. \tag{12.10}$$

Al efectuar esta multiplicación, elegimos en cada uno de los n factores ya sea a o b y multiplicamos estas n letras. Formando todos los productos posibles, esto es, considerando todas las posibilidades de seleccionar a o b en cada factor independientemente, y sumando estos productos, obtenemos $(a + b)^n$. Específicamente, obtenemos a^n eligiendo a en cada uno de los n factores; obtenemos $a^{n-1}b$ eligiendo a en todos los factores menos en uno en el cual elegimos b y, en general, para un r cualquiera, $0 < r \leq n$, obtenemos $a^{n-r}b^r$ eligiendo a en $(n - r)$ factores y b en los otros r. Concentremos nuestra atención en la elección de b en r factores y determinemos de cuantas maneras pueden elegirse estos r factores. Puesto que elegimos r factores de entre n posibilidades, hay exactamente $C(n, r)$ de estos términos, $a^{n-r}b^r$. Luego, en el desarrollo tenemos el término $C(n, r)a^{n-r}b^r$; pero, a causa del recorrido de r, tenemos la suma de todos los términos de esta forma con r desde 0 a n, inclusive, que es precisamente el enunciado del teorema.



12-2

En la fig. 12-2, un diagrama ilustra el conjunto de todos los productos posibles en el caso $(a + b)^3$. Partiendo del punto 0, cualquier trayecto hasta el extremo derecho del diagrama representa uno de los productos posibles. Obsérvese que hay un a^3, tres a^2b, tres ab^2 y un b^3, es decir, un total de ocho productos, que, además, concuerdan con la expresión general.

A causa de este teorema, $C(n, r)$, el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r, recibe a menudo el nombre de coeficiente binomial.

De la ec. (12.9) se deducen inmediatamente las siguientes propiedades del desarrollo de $(a + b)^n$ para todo entero positivo n.

1. El número de términos es $n + 1$.
2. El primer término es a^n.
3. El exponente de a decrece en uno el pasar de un término al siguiente y el de b crece en uno, de modo que la suma de los exponentes de a y b en un término cualquiera es siempre n.
4. Los coeficientes de los términos primero y último, segundo y penúltimo, tercero y antepenúltimo, etc., son iguales. [Recuérdese ec. (12.8).]

Estas propiedades nos serán de utilidad cada vez que necesitemos aplicar el teorema. Además, es importante observar que el r-ésimo término del desarrollo es

$$C(n, r-1)a^{n-r+1}b^{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1} \tag{12.11}$$

Ejemplo 1. Desarróllese $(a + 2b)^6$ mediante el teorema del binomio y simplifique el resultado.

Solución: Siendo a el primer término y $2b$ el segundo término del binomio, tenemos

$$\begin{aligned}(a+2b)^6 &= a^6 + 6a^5(2b) + \frac{6\cdot 5}{2!}a^4(2b)^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}a^3(2b)^3 \\ &\quad + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!}a^2(2b)^4 + 6a(2b)^5 + (2b)^6 \\ &= a^6 + 12a^5b + 60a^4b^2 + 160a^3b^3 + 240a^2b^4 + 192ab^5 + 64b^6.\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Determínense los primeros cuatro términos del desarrollo de $(x^3 - 3y^2)^{12}$.

Solución: Aquí $a = x^3$ y $b = -3y^2$; luego,

$$\begin{aligned}(x^3 - 3y^2)^{12} &= (x^3)^{12} + 12(x^3)^{11}(-3y^2) + \frac{12\cdot 11}{2!}(x^3)^{10}(-3y^2)^2 \\ &\quad + \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3!}(x^3)^9(-3y^2)^3 + \cdots \\ &= x^{36} - 36x^{33}y^2 + 594x^{30}y^4 - 5940x^{27}y^6 + \cdots\end{aligned}$$

Obsérvese del resultado de este ejemplo que cuando el signo del primer término del binomio es más y el del segundo es menos, los signos del desarrollo se alternan.

El término general, ec. (12.11), se utiliza en muchos problemas que conciernen a un término particular.

Ejemplo 3. Determínese el sexto término del desarrollo de $[(1/2a) - 3]^{16}$.

Solución: En este ejemplo, el primer término es $1/2a$ y el segundo -3, $n = 16$ y $r = 6$. Substituyendo en la ec. (12.11), el sexto término resulta ser

$$\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left(\frac{1}{2a}\right)^{11}(-3)^5 = -\frac{66339}{128a^{11}}$$

Problemas

Desarróllese cada una de las expresiones siguientes mediante el teorema del binomio y simplifíquese si es necesario:

1 $(a + b)^7$.

2 $(xy - 2)^4$.

3 $(2x + y^2)^5$.

4 $\left(a^2 - \dfrac{x}{2}\right)^6$.

5 $(5x - y^2)^4$.

6 $(x^{-1} + 2y^{-2})^6$.

7 $(x^{1/3} + y^{1/3})^6$.

8 $(x^{2/3} - y^{2/3})^5$.

9 $(x^{2/5} - 3y^{-2})^5$.

10 $(ax^{1/2} - by^{1/3})^6$.

Escríbanse y simplifíquense los cuatro primeros términos de los desarrollos de las expresiones siguientes:

11 $\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{y^2}\right)^{12}$.

12 $(x^{1/3} - y^{1/3})^9$.

13 $(x^{1/3} - y^{-1/3})^{11}$.

14 $(x^{-2/3} + 2y^{2/3})^8$

15 $(1 + x)^k$.

▶ 16 $(1 + k)^{1/k}$.

Indicación. Supóngase que el teorema del binomio vale para $n = 1/k$

Escríbase y simplifíquese el término que se indica en el desarrollo de cada una de las expresiones siguientes:

17 séptimo término de $(2x - y)^{12}$.

18 noveno término de $\left(2 + \dfrac{x}{4}\right)^{15}$.

19 término central de $(y^2 - \frac{1}{2})^8$.

20 término central de $\left(2 + \dfrac{3}{x}\right)^{10}$.

21 término en x^7 de $(2x - 3)^{10}$.

22 término en x^3 de $(5 - 2x)^6$.

23 término en x^5 de $\left(x + \dfrac{1}{2x}\right)^7$.

24 término en x^2/y^2 de $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y^2}{2x^2}\right)^8$.

25 Demuéstrese que el $(r + 1)$-ésimo término de la ec. (11.9) es

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r.$$

26 Determínese el entero positivo n para el cual $C(n, 4) = 35$.

27 Demuéstrese que

$$2^n = (1 + 1)^n = 1 + C(n, 1) + C(n, 2) + C(n, 3) + \cdots + C(n, n).$$

28 Verifíquese la proposición del problema 27 para $n = 5$.

29 Resuélvase el problema [illegible] de la sección 12.3 utilizando el problema 27.

30 Si n es par, demuéstrese que

$$C(n, 0) + C(n, 2) + \cdots + C(n, n) = C(n, 1) + C(n, 3) + \cdots + C(n, n - 1).$$

12.5. El desarrollo de $(1 - x)^n$

Aplicando el teorema del binomio a $(1 + x)^n$ tenemos

$$\begin{aligned}(1 + x)^n \equiv 1 + nx &+ \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &+ \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}x^{r-1} + \cdots,\end{aligned} \tag{12.12}$$

que contiene $n + 1$ términos y vale para todo entero positivo n. Si n fuera un número real cualquiera, distinto de un entero positivo, el desarrollo en la ec. (12.12) no terminaría. La pregunta que surge naturalmente entonces es: ¿en qué condiciones sigue siendo válido el desarrollo?

Aunque la demostración está fuera del objetivo de este libro, puede probarse que un número finito de términos del segundo miembro de la ec. (12.12) representa aproximadamente a $(1 + x)^n$, para todo n que no sea un entero positivo si $|x| < 1$. Debe observarse que, mientras mayor sea el número de términos considerados, mejor será la aproximación, puesto que, en general, cada término será menor en valor absoluto que el precedente

Ejemplo 1. Determínese el valor de $(1.02)^{-4}$ aproximado con cuatro cifras significativas.

Solución: Desarrollando $(1{,}02)^{-4}$ mediante la ec. (12.12).

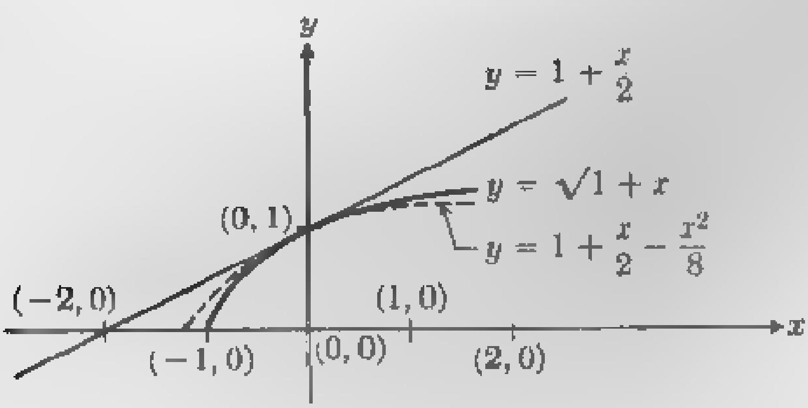
$$\begin{aligned}(1{,}02)^{-4} &= (1 + 0{,}02)^{-4}\\ &= 1^{-4} + (-4)\cdot 1^{-5}(0{,}02)\\ &\quad + \frac{(-4)(-5)}{2!}\cdot 1^{-6}(0{,}02)^2\\ &\quad + \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!}\cdot 1^{-7}(0{,}02)^3\\ &\quad + \frac{(-4)(-5)(-6)(-7)}{4!}\cdot 1^{-8}(0{,}02)^4 + \cdots\\ &= 1 - 0{,}08 + 0.004 - 0{,}00016 + 0{,}0000056 + \cdots\\ &= 0{,}9238456.\end{aligned}$$

Debemos considerar todos los términos necesarios para obtener la aproximación pedida. Puesto que el último término en la expresión precedente tiene un cero en el quinto decimal y los términos sucesivos siguientes decrecen rápidamente en valor absoluto, ningún término adicional afectará el resultado; es decir,

$$(1{,}02)^{-4} = 0{,}9238, \text{ aproximado con cuatro cifras significativas.}$$

Uno de los resultados más interesantes del desarrollo de la ec. (12.12) se obtiene para $n = \frac{1}{2}$. Tenemos

$$\begin{aligned}(1 + x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \cdots\\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots\end{aligned} \tag{12.13}$$



12-3

En la fig. 12-3, se ilustra la gráfica de $y = (1 + x)^{1/2}$; sobre ella, la gráfica de $y = 1 + x/2$ (aproximación con los dos primeros términos) y bajo ella, la gráfica de $y = 1 + (x/2) - (x^2/8)$ (aproximación con los tres primeros términos). Obsérvese con cuánta precisión se aproximan las dos curvas al desarrollo propiamente tal. Esto es especialmente verdadero para valores de x cercanos a cero. Por ejemplo, si $x = 0{,}21$, el valor exacto es

$$y = (1 + 0{,}21)^{1/2} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1.$$

y las aproximaciones son

$$y \approx 1 + \frac{0.21}{2} = 1{,}105,\text{*}$$

y

$$y \approx 1 + \frac{0.21}{2} - \frac{(0.21)^2}{8} = 1{,}09949.$$

Esta misma fórmula puede utilizarse para calcular raíces cuadradas de números no cercanos a cero si se tiene la precaución de expresar el problema en forma adecuada.

EJEMPLO 2. Calcúlese $\sqrt{15}$ con cuatro cifras significativas exactas.

Solución: Utilizamos la expresión de la ec. (12.13).

$$\begin{aligned}
\sqrt{15} = \sqrt{16 - 1} &= (16 - 1)^{1/2} = [16(1 - \tfrac{1}{16})]^{1/2} = 4(1 - \tfrac{1}{16})^{1/2} \\
&= 4\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}\left(-\frac{1}{16}\right)^2 \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}\left(-\frac{1}{16}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= 4[1 - \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{2048} - \tfrac{1}{65536} - \cdots] \\
&= 4[1 - 0{,}03125 - 0{,}000488 - 0{,}000015 - \cdots] \\
&\approx 3{,}8730, \text{ con cuatro cifras significativas exactas.}
\end{aligned}$$

Utilizando la aproximación lineal, obtenemos una buena aproximación sin necesidad de hacer muchos cálculos:

$$\sqrt{15} = \sqrt{16 - 1} = 4[1 - \tfrac{1}{16}]^{1/2} \approx 4[1 - \tfrac{1}{32}] = 3{,}875.$$

---

* El símbolo $\approx$ significa *aproximadamente igual a*.

PROBLEMAS

Escríbanse los cuatro primeros términos de los desarrollos de las siguientes expresiones:

1 $\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

2 $\sqrt{1+x}$

3 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

▶ 4 $(1+x)^{1/x}$

Calcúlese cada una de las expresiones siguientes con cuatro cifras significativas exactas.

5 $(1{,}01)^{-2}$

6 $(1{,}03)^{-5}$

7 $\sqrt[4]{1{,}02}$

8 $\sqrt{1{,}05}$

9 $\sqrt{33}$

10 $\sqrt[4]{17}$

11 $\sqrt[3]{120}$

12 $(1{,}01)^{10}$

13 Utilícese la aproximación lineal apropiada para calcular los valores pedidos en los problemas 9, 10 y 11.

13

Método de inducción

13.1. Inducción completa o matemática

Uno de los métodos de demostración de más importancia en matemáticas es el llamado de «inducción completa o matemática» El nombre no es muy afortunado, ya que es natural asociar la palabra inducción con razonamiento inductivo, que consiste en sacar una conclusión a partir de un gran número de casos especiales. Mediante el proceso inductivo lógico no es posible obtener una conclusión segura. En realidad, la inducción completa o matemática es de naturaleza deductiva, puesto que lleva a una conclusión segura Como este método nos proporcionará una manera conveniente de demostrar diversos resultados importantes que aparecen en este libro, lo consideraremos con cierto detalle. La inducción completa se utiliza generalmente para demostrar la validez de proposiciones que incluyen todos los valores enteros positivos de n.

Ilustremos el método mediante un ejemplo Supongamos que tenemos una escalera con un número indefinido de peldaños y queremos demostrar que podemos subir hasta un peldaño determinado cualquiera. Podemos hacerlo si conocemos dos hechos: (a) podemos subir al primer peldaño; (b) si estamos en un peldaño cualquiera, podemos subir al superior siguiente De (a) sabemos que podemos subir al primer peldaño; de esto y de (b), sabemos que podemos subir al segundo peldaño; nuevamente, de esto y de (b), sabemos que podemos subir al tercer peldaño, etc.

Uno de los métodos para determinar raíces cuadradas con una máquina calculadora o sumadora corriente está basado en el hecho de que la suma de los n primeros enteros impares es n^2; específicamente,

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2, \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2, \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2, \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2. \end{aligned}$$

Esta propiedad es válida para todo entero positivo n y no es difícil de demostrar.

EJEMPLO 1. Demuéstrese por inducción completa que para todo valor entero positivo n,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \equiv n^2.$$

Solución: Parte (a): *Verificación para un valor específico.* Ya lo verificamos para $n = 1, 2, 3$ y 4, aunque basta la verificación para un valor solamente.

Parte (b): *Propiedad de inducción.* Si la proposición es verdadera para $n = k$, donde k es un valor cualquiera de n, debemos demostrar que también vale para $n = k + 1$. Suponiendo entonces que la proposición vale para $n = k$, tenemos

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) \equiv k^2.$$

Sumando $2k + 1$ a ambos miembros, tenemos

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) \equiv k^2 + (2k + 1) \equiv (k + 1)^2$$

Esta es precisamente la proposición $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \equiv n^2$ para $n = k + 1$; luego la demostración de la parte (b) está completa.

Parte (c): *Conclusión.* Sabemos que la proposición es verdadera para $n = 1$, 2, 3 y 4. Puesto que vale para $n = 4$ y como hemos demostrado la proposición en (b), la igualdad original vale para $n = 4 + 1 = 5$; como vale para $n = 5$, también vale para $n - 5 + 1 = 6$; y así podemos continuar para todos los valores positivos de n.

Observemos entonces que una demostración por inducción completa consta de las tres partes:

Parte (a). *Verificación* de la validez de la proposición o teorema para el menor valor de n para el cual el teorema debe valer. (Esto es análogo al hecho de poder subir al primer peldaño de la escalera.)

Parte (b). *Demostración de la propiedad inductiva.* Si la proposición o teorema vale para $n = k$, donde k designa un valor cualquiera de n, entonces vale para $n = k + 1$. (Esto es análogo al hecho de poder subir de un peldaño cualquiera al superior siguiente.)

Parte (c). *Conclusión.* La proposición o teorema vale para todo valor de n igual o mayor que aquél para el cual se verificó en la parte (a).

Sabemos que $x - y$ es factor de $x - y$, $x^2 - y^2$, y $x^3 - y^3$. ¿Es factor de $x^n - y^n$ para todo entero positivo n?

EJEMPLO 2. Demuéstrese por inducción completa que $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$ para todo entero positivo n.

Solución: Parte (a): si $n = 1$, $x^n - y^n$ es $x - y$, que es evidentemente divisible por $x - y$; si $n = 2$, $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$, que también es divisible por $x - y$.

Parte (b): Suponemos que $x^k - y^k$ es divisible por $x - y$. A partir de esta

suposición debemos demostrar que $x^{k+1} - y^{k+1}$ es también divisible por $x - y$. Si sumamos y restamos xy^k a $x^{k+1} - y^{k+1}$, tenemos

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &\equiv x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1} \\ &\equiv x(x^k - y^k) + y^k(x - y). \end{aligned}$$

Puesto que cada término del segundo miembro de esta identidad es divisible por $x - y$, también lo es todo el segundo miembro y por tanto, el primer miembro debe ser también divisible por $x - y$. Esto completa la Parte (b).

Parte (c): Sabemos que el teorema vale para $n = 1$ y 2. Siendo válido para $n = 2$, de (b) se deduce que es válido para $n = 2 + 1 = 3$. Análogamente, se puede proceder para todos los valores enteros positivos de n.

Debe destacarse el hecho de que ambas partes (a) y (b) son necesarias para completar la demostración. Considérense los ejemplos siguientes:

Ejemplo 3. En la sección 1.4 consideramos los números primos. ¿Representa la expresión $n^2 - n + 11$ un número primo para todo entero positivo n? Para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5, tenemos los números primos 11, 13, 17, 23 y 31. Evidentemente, la parte (a) queda verificada para nuestra proposición. Para demostrar que la proposición no es válida en general, hagamos $n = 11$ con lo que tenemos $11^2 - 11 + 11 = 11^2$, que no es un número primo.

Ejemplo 4. Para enteros pares, supongamos que la proposición falsa

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 1.$$

vale cuando $n = k$. A partir de esta suposición, podemos demostrar la validez para $n = k + 1$. En efecto, tenemos

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k^2 + k + 1.$$

Sumando $2k + 2$ a ambos miembros, obtenemos

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2k + 2 &= k^2 + k + 1 + 2k + 2 \\ &= k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 1 \\ &= (k + 1)^2 + (k + 1) + 1. \end{aligned}$$

De este modo, si la proposición se considera válida para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$, con lo cual queda demostrada la parte (b). Sin embargo, la parte (a) y, por tanto, la proposición, no son válidas. Considérense los casos $n = 1, 2$ ó 3; tendríamos $2 = 3$; $6 = 7$ ó $12 = 13$, respectivamente.

Finalmente, es conveniente destacar que muchas demostraciones por inducción completa pueden realizarse sin necesidad de sumar cantidades iguales a ambos miembros de una igualdad que se sabe verdadera. (Este fue el método empleado en el ejemplo 1.)

Problemas

Utilizando el método de inducción completa, demuéstrese que las proposiciones siguientes son válidas para todo valor entero positivo de n

1 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

3 $4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n(n+1)$.

4 $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

5 $1 + 3 + 6 + \cdots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

6 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

7 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

8 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

9 $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

10 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

11 $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

12 $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

13 $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

14 $1\cdot 2 + 3\cdot 4 + 5\cdot 6 + \cdots + (2n-1)(2n) = \dfrac{n(n+1)(4n-1)}{3}$.

15 $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

▶ 16 $t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + \cdots + t_1 r^{n-1} = \dfrac{t_1 - t_1 r^n}{1 - r}$.

▶ 17 $t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + \cdots + t_1 + (n-1)d = \dfrac{n[2t_1 + (n-1)d]}{8}$

18 $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x - y$.

19 $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x + y$.

20 $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

21 Si $a > -1$, $(a + 1)^n \geq 1 + na$.

22 $\operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta$.

23 $\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$.

24 Si n es un entero positivo impar, $n(n^2 - 1)$ es divisible por 24.

25 $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9.

26 $2n \leq 2^n$.

27 $2^{n-1} \leq n!$

▶28 Demuéstrese por inducción completa la generalización del Teorema 4.11, a saber, que para una suma algebraica de un número fijo cualquiera de términos

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Demuéstrense las proposiciones siguientes mediante el método de inducción completa.

29 $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \cdots + \operatorname{sen}n\theta \equiv \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)\theta \operatorname{sen}\frac{1}{2}n\theta}{\operatorname{sen}\theta/2}$.

30 $\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta \equiv \dfrac{\cos\frac{1}{2}(n+1)\theta \operatorname{sen}\frac{1}{2}n\theta}{\operatorname{sen}\theta/2}$

31 $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}3\theta + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)\theta \equiv \dfrac{\operatorname{sen}^2 n\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

32 $\cos\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta \equiv \dfrac{\operatorname{sen}2n\theta}{2\operatorname{sen}\theta}$.

33 Las llamadas fórmulas de recurrencia son de gran utilidad en muchas ramas de las matemáticas. Una de estas fórmulas permite determinar el valor de sen nt para un entero cualquiera n si se conocen sen t y cos t. Si $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y $u_n = (2\cos t)u_{n-1} - u_{n-2}$ para $n = 2, 3, \ldots$, demuéstrese que $u_n = \operatorname{sen}nt/\operatorname{sen}t$ para $n = 0, 1, 2$.

34 Para los mismos valores de u_n dados en el problema 33, demuéstrese que $(\cos t)u_n - u_{n-1} = \cos nt$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Esta fórmula permite determinar cos nt si sen t y cos t son conocidos. Fórmulas de este tipo son utilizadas a menudo en cálculos efectuados con máquinas calculadoras de alta velocidad, a causa de la naturaleza repetitiva del proceso.

35 Para resolver este problema deben utilizarse varias ideas completamente diferentes pero importantes. El método de resolución es un ejemplo del hecho de que a menudo se necesitan muchos conceptos para obtener un resultado. Consideramos los llamados números de Fibonacci definidos por la fórmula de recurrencia $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ Mediante cálculo directo encontramos que la sucesión de los u_n es: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

(a) Fórmense los cuocientes u_1/u_2, u_3/u_4, u_5/u_6, u_7/u_8.
(b) Fórmense también los cuocientes u_2/u_3, u_4/u_5, u_6/u_7, u_8/u_9.
(c) Verifíquese que los cuocientes en (a) decrecen en magnitud, que los cuocientes en (b)

crecen y que ambos conjuntos de cuocientes parecen «acercarse a un cierto valor» entre 0,625 y 0,615.

(d) Demuéstrese por inducción completa: $u_1/u_2 > u_3/u_4 > \cdots > u_{2n-1}/u_{2n} > u_{2n+1}/u_{2n+2} \ldots$: decimos que $\{u_{2n-1}/u_{2n}\}$ es una sucesión *decreciente*

(e) Demuéstrese por inducción completa: $u_2/u_3 < u_4/u_5 < \cdots < u_{2n}/u_{2n+1} < u_{2n+2}/u_{2+3} \ldots$; decimos que $\{u_{2n}/u_{2n+1}\}$ es una sucesión *creciente*

(f) Demuéstrese que $u_{2n-1}/u_{2n} > u_{2m}/u_{2m+1}$, siendo m y n dos enteros positivos cualesquiera. De este modo, el conjunto $\{u_{2n-1}/u_{2n}\}$ es acotado inferiormente y por la propiedad de plenitud (sección 4.3) existe un extremo inferior G de este conjunto. Análogamente, el conjunto $\{u_{2n}/u_{2n+1}\}$ es acotado superiormente y, por tanto, existe un extremo superior L de este conjunto.

(g) Demuéstrese que para n suficientemente grande la expresión

$$\left|\frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} - \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}\right| = \left|\frac{u_{2n+1}u_{2n-1} - u_{2n}^2}{u_{2n+1}u_{2n}}\right|$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera.

Indicación: Demuéstrese que (1) a medida que n crece, el denominador crece y (2) $u_{2n+1}u_{2n-1} - u_{2n}^2 = 1$ para todo entero positivo n (Utilícese inducción completa.) Como consecuencia de (f) y (g), sabemos que G, el ínfimo de $\{u_{2n-1}/u_{2n}\}$, es igual a L, supremo de $\{u_{2n}/u_{2n+1}\}$. Designaremos este valor por x, de modo que $G = L = x$. Además, para n suficientemente grande, existen elementos de ambos conjuntos arbitrariamente cercanos a x.

(h) Si dividimos la fórmula de recurrencia original

$$u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1} \quad \text{por} \quad u_{2n},$$

tenemos

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = 1 + \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}} = 1 + \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}.$$

Si n es suficientemente grande, podemos obtener una aproximación de esta igualdad reemplazando u_{2n}/u_{2n+1} y u_{2n-1}/u_{2n} por x, de modo que $1/x = 1 + x$ ó $x^2 + x - 1 = 0$. Resolver esta ecuacion para la raíz positiva x (¿por qué nos interesa la raíz positiva de la ecuación?), demostrando así que $x = G = L = (-1 + \sqrt{5})/2 = 0.618$ (aproximadamente). [Recuérdese la ec. (6.19) y el problema 24, sección 8.9.]

13.2. Una demostración alterna del teorema del binomio

El teorema del binomio puede demostrarse por inducción completa; la demostración se da a continuación y requiere cierta destreza con el álgebra. La damos para poner de relieve la importancia de las demostraciones por inducción completa y para ilustrar otra demostración importante de este tipo que no

incluye el artificio de sumar una misma expresión a los dos miembros de una igualdad que se sabe verdadera.

TEOREMA 13.1. *Para todo entero positivo n.*

$$(a+b)^n \equiv a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n. \tag{13.1}$$

Demostración Recordemos de la ec. (12.11) la expresión general para el r-ésimo término:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}. \tag{13.2}$$

Puesto que hemos verificado la validez de la ec. (13.1) para $n = 1, 2, 3$ y 4 en la sección 12.4, necesitamos sólo suponer que ella es válida para $n = k$, esto es,

$$(a+b)^k \equiv a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^{r-1} + \cdots + b^k, \tag{13.3}$$

y a partir de aquí, demostrar su validez para $n = k+1$, ó

$$(a+b)^{k+1} \equiv a^{k+1} + (k+1)a^kb + \frac{(k+1)k}{2!}a^{k-1}b^2 + \cdots + \frac{(k+1)(k)(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}a^{k-r+2}b^{r-1} + \cdots + b^{k+1}. \tag{13.4}$$

Si multiplicamos ambos miembros de la identidad (13.3) por $(a+b)$, tenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= a^{k+1} + ka^kb + \cdots \\ &+ \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+2}b^{r-1} + \cdots + ab^k + a^kb + \cdots \\ &+ \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}b^{r-1} + \cdots + kab^k + b^{k+1}\end{aligned}$$

Los términos hasta ab^k representan el segundo miembro de la ec. (13.3) multiplicado por a y los términos restantes representan el segundo miembro multiplicado por b. Para obtener el r-ésimo término del resultado, escribimos el r-ésimo

término en la primera mitad del segundo miembro y el $(r - 1)$-ésimo término en la segunda; ambos contienen el factor $a^{k-r+2}b^{r-1}$. Simplificando todo el segundo miembro, el coeficiente total de $a^{k-r+2}b^{r-1}$ será

$$\begin{aligned}
\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!} &+ \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!} \\
&= \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}(k-r+2) \\
&+ \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)(r-2)!}(r-1) \\
&= \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}[(k-r+2)+(r-1)] \\
&= \frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}.*
\end{aligned}$$

De este modo, todo el segundo miembro es exactamente el de la ec. (13.4). La conclusión, parte (c), es evidente y con esto la demostración está completa.

Problemas de repaso

1 La expresion $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ (donde $x \neq 1$) es idéntica a

(a) $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. (b) x^{n+1}.

(c) $\dfrac{1}{1 - x}$. (d) $(1 + x)^n$.

2 Para obtener una inversa de una matriz no singular de 3 por 3, ¿cuántas ecuaciones en cuántas incógnitas deben resolverse? Bosquéjese un método para encontrar la inversa de una matriz dada de 3 por 3, pero sin desarrollar los detalles.

3 Encuéntrese el polinomio característico $\delta(A - x)$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

4 Encuéntrese el polinomio característico $\delta(A - xI)$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

---

* Es interesante observar aquí que estamos sumando $C(k, r - 1)$ y $C(k, r - 2)$ y, por el problema 20, sección 12.3, el resultado es el esperado, $C(k + 1, r - 1)$.

¿Puede deducirse una generalización a partir de este ejemplo?

5 Recuérdese el proceso iterativo estudiado en la sección 8.1 en relación con el valor de un polinomio en un punto determinado. Consideremos ahora un ejemplo similar. Si $f_1 = \sqrt{2}$ y $f_{n+1} = \sqrt{2f_n}$ para cada entero $n \geq 1$, puede observarse que este es también un proceso iterativo. Escríbanse, por ejemplo, los primeros cuatro o cinco términos. ¿Puede estimarse el valor hacia el cual se aproxima f_n a medida que n se hace «más y más grande»?

Indicación Si existe un valor finito, entonces f_n y f_{n+1} se aproximan a este valor. Elévese al cuadrado $f_{n+1} = \sqrt{2f_n}$ y resuélvase.

6 Empléese el mismo procedimiento para el conjunto definido por $f_1 = \sqrt{2}$, $f_{n+1} = \sqrt{2-f_n}$, $n > 1$. Estímese el valor hacia el cual se aproxima f_n a medida que n se hace «más y más grande». Con ayuda de una calculadora se podría obtener fácilmente una buena aproximación a este valor.

Cada una de las ecuaciones de los problemas 7 a 10 define una función. Encuéntrese la ecuación que define la inversa e indíquese si ésta es relación o función.

7 (a) $y = \frac{1}{2}(x - 4)$. (b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

8 (a) $y = \dfrac{3x}{x - 4}$ (b) $y = \dfrac{3x^2}{x - 4}$

9 (a) $y = \sqrt{x - 5}$. (b) $y = |x|$.

10 $x^2 + y + 4x = 12$.

11 Bosquéjese la gráfica de la relación R, donde

$$R = \{(x, y)|2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5 = 0\}.$$

12 Bosquéjese la gráfica de la relación S, donde

$$S = \{(x, y)|x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0\}$$

13 Bosquéjese la gráfica de la relación

$$B = \{(x, y)|x^{13} + (2y)^{13} = 52\}.$$

Indicación: Esta ecuación se conoce con el nombre de «ecuación del *bridge*».

14 Recordando que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$, demuéstrese que

(a) $\dfrac{(n + 4)(n + 3)!}{(n + 4)!} = 1$ (b) $\dfrac{(2n + 2)!}{(2n - 1)!2n} = 2(n + 1)(2n + 1)$

15 Escríbanse los cuatro primeros términos del desarrollo de $(1 - 1/x)^{10}$.

16 Utilícese un desarrollo binomial apropiado para obtener una aproximación de $(0.99)^{20}$ con dos decimales exactos.

17 Demuéstrese que la fórmula siguiente es válida para todo n entero positivo:

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

18 Demuéstrese por inducción matemática que $10^n/3 + \frac{5}{3} + 4^{n+2}$ es divisible por 3.

19 Demuéstrese que para todo entero $n \geq 3$, $(n+1)^n < n^{n+1}$

20 Encuéntrese una ecuación de quinto grado con coeficientes reales enteros que tenga a los números 4, $2 - i$ y $3 + 2i$ por raíces.

14

Funciones exponencial y logarítmica

Hasta ahora hemos considerado con cierto detalle las funciones algebraicas y un tipo de funciones trascendentes, las funciones circulares Además, estudiamos las funciones circulares inversas. Existen otras dos funciones trascendentes de importancia; ellas son la función exponencial y su función inversa, la función logarítmica. En este capítulo, estudiaremos estas dos funciones, sus propiedades y sus aplicaciones simples.

14.1. La función exponencial a^x

Antes de definir la función exponencial, debemos definir a^x, donde a es un número real positivo cualquiera y x es un numero real cualquiera. Para hacerlo utilizamos la Propiedad de Plenitud (sección 4.6). Recordemos, por ejemplo, el conjunto de aproximaciones racionales para $\sqrt{2}$. Puesto que este conjunto, $A = \{1, 1{,}4, 1{,}41, 1{,}414, \ldots\}$, esta acotado superiormente, tiene un extremo superior que llamamos $\sqrt{2}$. Si queremos definir $5^{\sqrt{2}}$, consideramos el conjunto $\{5^1, 5^{1,4}, 5^{1,41}, \ldots\}$ que también está acotado superiormente. Su extremo superior se define como $5^{\sqrt{2}} = 9{,}738$ (aproximadamente) y este valor está bien definido, puesto que 5^r está bien definido cuando r es racional.

Nuestra definición general es similar. Si $a \in R$, $a > 1$ y $x \in R$, sea $S = \{a^r | r \leqslant x, r \in F\}$. S está acotado superiormente; en efecto, para todo $n \in I$ con $n > x$, $n > r$, de modo que $a^n > a^r$ (problema 6, sección 4.1.) Dado que para todo x existe siempre un entero n con $n > x$, a^n es una cota superior de S De este modo, S tiene un extremo superior por la Propiedad de Plenitud y, en estas condiciones, podemos definir a^x.

Definición 14.1 *Sean $a, x \in R$ y $a > 0$.*

(1) *Si $a > 1$, a^x es el extremo superior de $\{a^r | r \leqslant x, r \in F\}$*
(2) *Si $a = 1$, $a^x = 1$.*
(3) *Si $a < 1$, $1/a > 1$, entonces $a^x = 1/(1/a)^x$.*

Puesto que a^x ha sido definido ya para $x \in F$ (sección 3.10), tenemos ahora a^x definido para todo x real si $a > 0$. Se puede demostrar que estas definiciones para exponentes reales cumplen todas las leyes sobre exponentes, aunque no daremos las demostraciones aquí.

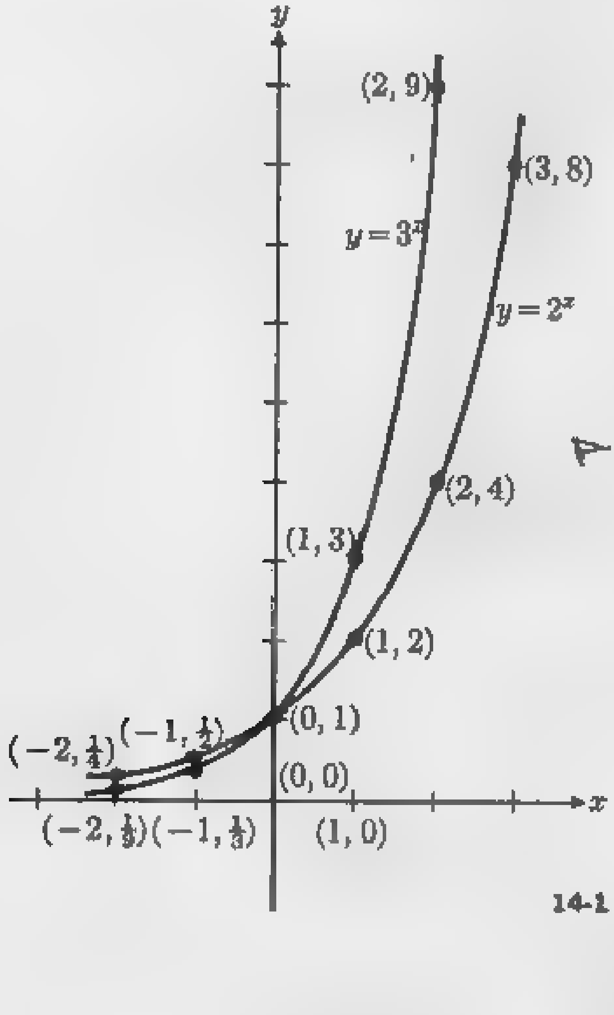
Con esta definición, consideremos la función exponencial f más simple en la forma siguiente:

$$f: x \to a^x, \quad a > 0, \tag{14.1}$$

siendo su dominio R. La ecuación que define la función es, por tanto, $y = f(x) = a^x$, de modo que la función puede escribirse también

$$f = \{(x, y) | y = a^x, a > 0\}.$$

Examinemos ahora las gráficas de los casos especiales de este tipo de función, $y = 2^x$ e $y = 3^x$. Estas gráficas pueden bosquejarse diagramando puntos cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones (fig. 14-1).



14-1

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$$y = 2^x$$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

$$y = 3^x$$

Las propiedades siguientes de la función definida por $y = a^x$ quedarán de manifiesto a partir de las gráficas.

1. La función es positiva (su gráfica se encuentra situada sobre el eje x) para todos los valores de x.
2. Si $a > 1$, la función es creciente. A medida que x crece, también la función crece y, a medida que x decrece algebraicamente, la función se aproxima, aunque sin alcanzarlo nunca, al valor cero.
3. Para todos los valores de a, la función tiene el valor 1 cuando $x = 0$.
4. No hay ceros de la función.

PROBLEMAS

Bosquéjense las gráficas de las funciones en los problemas 1 a 6.

1 4^x 2 10^x

3 2^{-x} 4 $(\frac{1}{2})^x$

5 3^{-x} 6 $(\frac{1}{3})^x$

7 Enúnciese una propiedad análoga a la propiedad 2 para la función definida por $y = a^x$ si $0 < a < 1$.

14.2. Progresiones geométricas

Recordemos (sección 7.2) que una sucesión es el recorrido de una función cuyo dominio es todo o una parte del conjunto de los enteros positivos. Definiremos ahora una progresión geométrica utilizando la función exponencial a^x.

DEFINICIÓN 14.2. *Una* progresión geométrica *es una sucesión en la cual cada término después del primero se obtiene multiplicando el término precedente por un mismo número fijo, llamado* razón o cuociente común.

Definición alterna 14.2. *Una* progresión geométrica *es una sucesión para la cual la función que la define tiene una ecuación de la forma* ka^u, *siendo* u *una expresión lineal en* x. (Véase el problema 28 de esta sección.)

Ejemplo ilustrativo 1. La sucesión $2, 4, 8, \ldots, 2^n$ es una progresión geométrica con razón común 2. La función que define esta sucesión es $f: x \to 2^x$.

Ejemplo ilustrativo 2. La sucesión $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ es una progresión geométrica con razón común $\frac{1}{3}$. La función que la define queda definida a su vez por $f(x) = 3^{2-x}$.

La notación general utilizada para las progresiones geométricas es similar a la de la sección 6.2:

t_1, el primer término,
r, la razón o cuociente común,
n, el número de términos,
t_n, el último o n-ésimo término.

Puesto que cada término debe multiplicarse por la razón común r para obtener el término siguiente, una progresión geométrica puede representarse por

$$t_1, \quad t_1r, \quad t_1r^2, \quad t_1r^3, \quad \ldots, \quad t_1r^{n-1},$$

en que el último valor da la expresión para el n-ésimo término,

$$t_n = t_1r^{n-1} \tag{14.2}$$

Ejemplo 1. Determínese el 10.º término de la progresión geométrica $-8, 4, -2, \ldots$

Solución: Con $t_1 = -8$, $r = -\frac{1}{2}$ y $n = 10$, tenemos

$$t_{10} = (-8)(-\tfrac{1}{2})^9 = (-8)(-\tfrac{1}{512}) = \tfrac{1}{64}$$

Ejemplo 2. Si el 8.º término de una progresión geométrica es 243 y el 5.º es 9, escríbanse los tres primeros términos.

Solución: Tenemos para $n = 8$,

$$t_8 = 243 = t_1r^7,$$

y para $n = 5$,

$$t_5 = 9 = t_1r^4.$$

Dividiendo miembro a miembro la primera igualdad por la segunda, obtenemos

$$r^3 = 27, \quad ó \quad r = 3.$$

Substituyendo este valor en la segunda igualdad, tenemos

$$9 = t_1(3)^4, ó\ 81t_1 = 9, \quad t_1 = \tfrac{1}{9}.$$

Por tanto, los primeros tres términos de la serie pedida son $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$ y 1.

La expresión para la suma de n términos de una progresión geométrica puede obtenerse fácilmente. Escribiendo la suma y multiplicando esta expresión por r, tenemos

$$S_n = t_1 + t_1r + t_1r^2 + \cdots + t_1r^{n-2} + t_1r^{n-1},$$

y

$$rS_n = t_1r + t_1r^2 + \cdots + t_1r^{n-1} + t_1r^n.$$

Restando miembro a miembro las dos igualdades, tenemos

$$S_n - rS_n = t_1 - t_1r^n, \quad ó \quad (1 - r)S_n = (1 - r^n)t_1,$$

y despejando S_n,

$$S_n = t_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1),$$

lo cual demuestra el siguiente teorema.

TEOREMA 14.1. *La suma de n términos de una progresión geométrica está dada por*

$$S_n = \frac{t_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (r \neq 1), \tag{14.3}$$

siendo t_1 el primer término, r la razón común y n el número de términos *

Puesto que el último o n-ésimo término $t_n = t_1r^{n-1}$ ó $rt_n = t_1r^n$, tenemos también

$$S_n = \frac{t_1 - rt_n}{1 - r} \quad (r \neq 1). \tag{14.4}$$

* Esta expresión puede demostrarse también por inducción completa. (Véase el problema 16, sección 13.1.)

Hacemos notar que en las ecs. (14 3) y (14.4), $r \neq 1$ ¿Qué puede decirse de una progresión geométrica en la que $r = 1$?

Problemas

Escríbanse los tres términos siguientes en cada una de las progresiones geométricas dadas a continuación, y determínense t_n y S_n.

1 $1, 4, 16, \ldots,$ hasta 8 términos.

2 $27, 9, 3, \ldots,$ hasta 9 términos.

3 $\frac{1}{125}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, \ldots,$ hasta 7 términos.

4 $P(1 + r), P(1 + r)^2, P(1 + r)^3, \ldots,$ hasta 10 términos.

En los problemas 5 a 11 se dan tres de los elementos t_1, t_n, r, n y S_n de la progresión geométrica. Determínense los elementos que faltan en cada caso.

5 $t_1 = 2,\ r = 3,\ n = 6$.

6 $t_1 = 2,\ n = 4,\ t_n = 16$.

7 $t_1 = 1,\ n = 3,\ S_n = 13$.

8 $r = -3,\ n = 5,\ t_n = 162$.

9 $r = \frac{1}{3},\ n = 5,\ S_n = \frac{4}{9}$.

10 $t_1 = 3,\ r = \frac{2}{5},\ S_n = \frac{999}{125}$.

11 $t_1 = -2,\ r = 2,\ t_n = -64$.

12 Determínese el valor de k, de modo que $2k + 2$, $5k - 11$ y $7k - 13$ formen una progresión geométrica.

13 ¿Cuáles son los tres primeros términos de la progresión geométrica cuyo tercer término es $\frac{25}{4}$ y cuyo séptimo término es $\frac{4}{25}$?

14 El segundo término de una progresión geométrica es $\frac{5}{2}$ y el cuarto es $\frac{1}{5}$. Determínese el tercer término.

15 En la progresión geométrica $18, -12, 8, \ldots,$ ¿qué lugar ocupa $\frac{512}{729}$?

▶ 16 Los términos que quedan entre dos términos cualesquiera de una progresión geométrica se llaman *medios geométricos* entre esos dos terminos. Intercálense cuatro medios geométricos entre $\frac{25}{4}$ y $\frac{8}{125}$.

17 Intercálense tres medios geométricos entre $\frac{27}{8}$ y $\frac{2}{3}$.

▶ 18 Intercálese un medio geométrico entre $\frac{7}{8}$ y $\frac{175}{32}$. Un numero de este tipo recibe el nombre de *medio geométrico* de los dos números.

19 ¿Cuál es el medio geométrico de los números a y b?

20 Determínese el medio geométrico de (a) 12 y $\frac{4}{3}$, (b) 28 y 112.

21 Demuéstrese que para dos números positivos diferentes a y b, el medio aritmético es mayor que el medio geométrico.

22 La población de cierta ciudad es 5000 Si aumenta 5% cada año, ¿cuál será su población aproximada al cabo de 10 años?

23 Una pelota se deja caer de una altura de 9 metros. Si cada vez rebota un tercio de la altura desde la cual ha caído esa vez, ¿cuánto rebotará la sexta vez? ¿Cuál será la distancia total recorrida al tocar el suelo por séptima vez?

24 Un hombre toma un empleo con un sueldo de \$9600 anuales en el entendido de que recibirá un 2% de aumento cada año. ¿Cuál será su sueldo después de 10 años de servicio?

25 Un automóvil comprado en \$3000 se deprecia 12% cada año. Calcúlese su valor al cabo de 5 años.

26 Si una servilleta de papel de 0,01 cm de espesor pudiera doblarse en dos, de modo que su ancho se redujera a la mitad y su espesor se hiciera el doble, y en seguida pudiera doblarse de nuevo en la misma manera, ¿cuál sería el espesor aproximado del trozo de papel resultante después de repetir la operación 30 veces?

27 Si a usted se le presenta la posibilidad de elegir entre un sueldo de \$1000 diarios durante un mes de 31 días y un sueldo de \$1 en el primer día, \$2 el segundo, \$4 el tercero y así sucesivamente por el resto del mes, duplicándose cada día el sueldo del día anterior, ¿cuál elección le significaría un sueldo mayor?

28 Utilizando la ec. (14.2), demuéstrese que las dos definiciones de progresión geométrica son equivalentes.

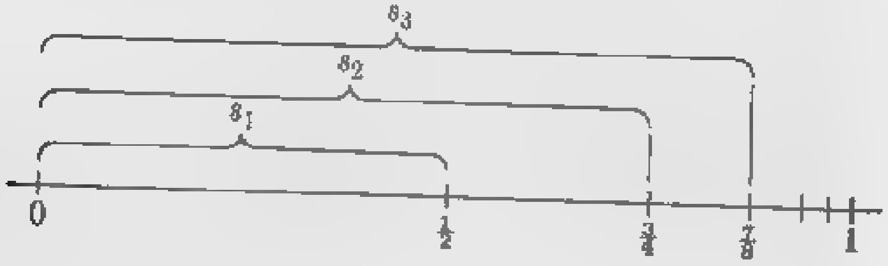
14.3. Progresiones geométricas con un número infinito de términos

Hasta ahora hemos considerado solamente la suma de términos de una sucesión finita. Si analizamos la definición de progresión aritmética, se ve claramente que una progresión de ese tipo con un número infinito de términos no puede tener una suma finita. Lo mismo resulta para progresiones geométricas con $|r| > 1$, puesto que, siendo cada término mayor en valor absoluto que el anterior, no puede existir un valor definido que represente esa suma infinita. Incluso para $r = 1$, no existe la suma infinita, ya que todos los términos son iguales.

Si $|r| < 1$, la situación es diferente. Considérese, por ejemplo, la suma de la progresión geométrica

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \tag{14.5}$$

siendo $r = \frac{1}{2}$



14-2

Una interpretación de S_n puede verse en la fig. 14-2, en la cual está representado un segmento de longitud unitaria. Los corchetes indican la suma de los términos y los números abajo indican la suma de la progresión en cada etapa. Cada término que se suma corresponde a una longitud igual a la mitad de la longitud que queda entre el punto representativo de la suma finita y el punto 1. Mientras mas terminos se consideren en la ec. (14.1), más nos acercaremos al punto 1; incluso, podemos llegar tan cerca de 1 como queramos, tomando un número suficientemente grande de términos, pero cualquiera que sea el número de términos considerados, nunca sobrepasaremos el 1. En este caso decimos que el valor límite de S_n es 1 y escribimos

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1. \tag{14.6}$$

Esto puede demostrarse algebraicamente. La ec. (14.3) puede escribirse

$$S_n = \frac{t_1}{1-r} - \frac{t_1 r^n}{1-r}. \tag{14.7}$$

En la progresión (14.5), $t_1 = r = \frac{1}{2}$, de modo que

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - (\tfrac{1}{2})^n.$$

A medida que n aumenta, $(\frac{1}{2})^n$ disminuye, pudiendo hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande. Así, $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$,* de modo que tenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

El mismo procedimiento puede aplicarse a toda progresión geométrica con $|r| < 1$. Utilizando la ec. (14.7), tenemos

$$S_n = \frac{t_1}{1-r} - \frac{t_1 r^n}{1-r}.$$

Si hacemos crecer n indefinidamente, y puesto que t_1 y r son fijos y $|r| < 1$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_1 r^n}{1-r} = 0.$$

---

* Esta expresión se lee, *el límite de $(\frac{1}{2})^n$, cuando n crece indefinidamente, es 0.* (*N. del T.*)

TEOREMA 14.2 * *La «suma» S de una progresión geométrica de número infinito de términos existe si* $|r| < 1$ *y*

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{t_1}{1 - r}. \tag{14.8}$$

EJEMPLO 1. Determínese la suma de la progresión geométrica infinita** $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, ...

Solución: Con $t_1 = \frac{3}{2}$ y $r = \frac{2}{3}$, tenemos

$$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = 4\tfrac{1}{2}.$$

EJEMPLO 2. Transfórmese el decimal periódico 3,242424 ... en una fracción común equivalente.

Solución: El número 3,242424 ... puede expresarse como el número 3 más una progresión geométrica con $t_1 = 0{,}24$ y $r = 0{,}01$, puesto que

$$3{,}242424\ldots = 3 + (0{,}24 + 0{,}0024 + 0{,}000024 + \cdots).$$

La suma S de la expresión entre paréntesis puede escribirse

$$S = \frac{t_1}{1 - r} = \frac{0{,}24}{1 - 0.01} = \frac{0{,}24}{0{,}99} = \frac{8}{33}.$$

Luego

$$3{,}242424\ldots = 3 + \tfrac{8}{33} = \tfrac{107}{33}.$$

Este resultado puede verificarse dividiendo 107 por 33.

Recordemos aquí que todo decimal periódico puede expresarse como una fracción común equivalente y que toda fracción común puede escribirse como decimal periódico.

PROBLEMAS

Determínese la suma de cada una de las progresiones geométricas infinitas siguientes:

1 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

2 $128, 48, 18, \ldots$

3 $16, -4, 1, \ldots$

4 $\frac{4}{3}, 1, \frac{3}{4}, \ldots$

5 $2, \sqrt{2}, 1, \ldots$

6 $\sqrt{2} + 1, 1, \sqrt{2} - 1, \ldots$

* Aunque no es posible sumar un número infinito de términos, al $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ se le llama «suma».

** Con frecuencia, se habla en este caso de «serie geométrica». (*N. del T.*)

Transfórmese cada decimal periódico en una fracción común equivalente

7 3,333 ...	8 6,272727 ...	9 0,555 ...
10 8,690909 ...	11 5,818181 ...	12 0,142857142857 ...

13 La suma de una progresión geométrica infinita es $\frac{7}{2}$ y el primer término es 3. ¿Cuál es la razón común?

14 La longitud del lado de un cuadrado es 4 cm. Se inscribe un segundo cuadrado uniendo los puntos medios de los lados del primer cuadrado, en seguida se inscribe un tercer cuadrado uniendo los puntos medios de los lados del segundo cuadrado y así sucesivamente. Determínese la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados, incluyendo el primero.

15 Determínese la suma de los perímetros de todos los cuadrados descritos en el problema 14.

16 Si la figura original en el problema 14 hubiera sido un triángulo equilátero con longitud del lado igual a 4 cm, y se construyeran triángulos equiláteros en la misma manera, ¿cuál sería la suma de sus áreas, incluyendo la del triángulo original?

17 Una pelota cae de una altura de 12 m y rebota dos tercios de la distancia desde la cual cae. Si continúa cayendo y rebotando en esta forma, ¿qué distancia recorrerá antes de quedar en reposo?

18 Se borra el tercio central de una línea de 1 m de largo. De cada uno de los dos tercios restantes, se borra el respectivo tercio central. De cada uno de los cuatro novenos restantes, se borra el respectivo tercio central. Si el proceso se continúa indefinidamente, ¿cuál será la suma de las longitudes de los segmentos que quedan?

14.4. La función logarítmica

Puesto que para todo número positivo x y todo número positivo $a \neq 1$ existe un y sólo un valor real de y que satisface la ecuación $a^y = x$,* podemos despejar y de esta ecuación y tenemos y igual al exponente o potencia a que debe elevarse a para obtener el número x. Obtenemos así la siguiente definición:

DEFINICIÓN 14.3. *El exponente o potencia y, a que debe elevarse el número a para obtener el número x, se llama* logaritmo *de x con base a, y se escribe*

$$y = \log_a x, \tag{14.9}$$

siendo $x > 0$, $a > 0$ *y* $a \neq 1$. *Esta es la ecuación que define la función logarítmica*

$$l : x \rightarrow \log_a x. \tag{14.10}$$

* La demostración de esta proposición está fuera del objetivo de este libro, pero queda claramente de manifiesto en la fig. 14-2.

Esta función puede expresarse, evidentemente, de modo que se ponga énfasis en la idea de «pares ordenados».

$$l = \{(x, y) | y = \log_a x, x > 0, a > 0, a \neq 1\}.$$

Debe observarse que si $f : x \to a^x$, la función $l : x \to \log_a x$ es, en realidad, f^{-1}. En consecuencia, si recordamos que las dos expresiones

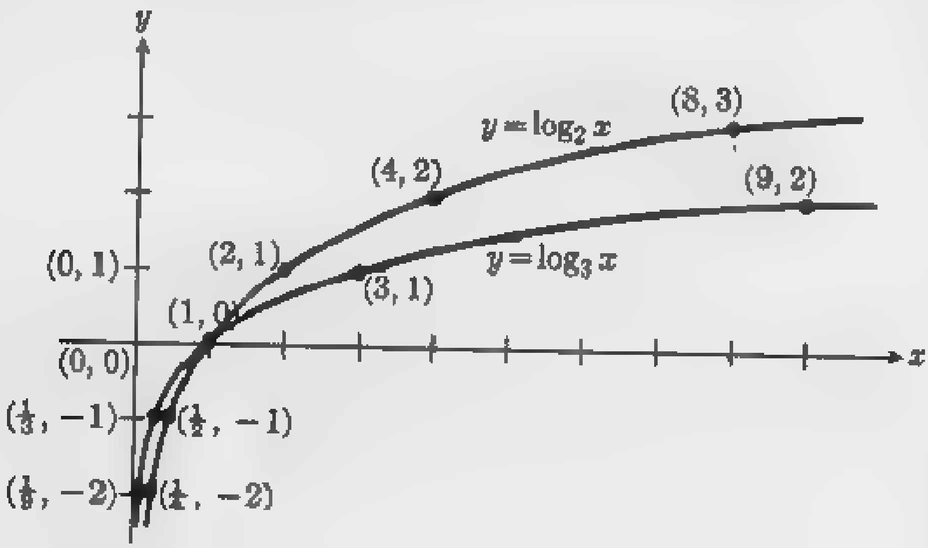
$$x = a^y \quad \text{e} \quad y = \log_a x \tag{14.11}$$

son equivalentes, muchas de las propiedades de la función logarítmica quedarán de manifiesto en forma evidente

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1.

$$\begin{aligned}
\log_3 9 &= 2 \leftrightarrow 3^2 = 9 \,* \\
\log_2 32 &= 5 \leftrightarrow 2^5 = 32. \\
\log_6 1 &= 0 \leftrightarrow 6^0 = 1. \\
\log_2 \tfrac{1}{16} &= -4 \leftrightarrow 2^{-4} = \tfrac{1}{16}. \\
\log_8 4 &= \tfrac{2}{3} \leftrightarrow 8^{2/3} = 4
\end{aligned}$$

Tracemos las gráficas de dos funciones logarítmicas definidas por las ecuaciones $y = \log_2 x$ e $y = \log_3 x$ y, con la ayuda de estas gráficas (fig. 14-3), consideremos algunas de las propiedades fundamentales de la función $l : x \to \log_a x$.



14-3

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3

$y = \log_2 x \leftrightarrow 2^y = x$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	-2	-1	0	1	2

$y = \log_3 x \leftrightarrow 3^y = x$

* El símbolo $\leftrightarrow$ significa «es lo mismo que» o «es equivalente a»; esto es, las dos expresiones son equivalentes.

1. La función es positiva para todo valor de x mayor que 1, pero negativa para todo x menor que 1. No está definida para valores negativos de x
2. La función es creciente.
3. El logaritmo de un número cualquiera con respecto a sí mismo como base es igual a 1 Gráficamente, todas las curvas pasan por el punto $(a, 1)$.
4. El único cero de la función es $x = 1$.

Existen varias propiedades más de los logaritmos, que pueden deducirse fácilmente recordando que un logaritmo es un exponente. Estas propiedades serán enunciadas y demostradas en forma de teoremas.

TEOREMA 14.3. *El logaritmo del producto de dos cantidades es igual al logaritmo de la primera cantidad más el logaritmo de la segunda.*

$$\log_a uv = \log_a u + \log_a v. \tag{14.12}$$

Demostración: Sean u y v dos cantidades positivas cualesquiera y sean x e y sus respectivos logaritmos,

$$x = \log_a u \quad \text{e} \quad y = \log_a v,$$

o

$$a^x = u \quad \text{y} \quad a^y = v.$$

Multiplicando miembro a miembro estas igualdades, tenemos

$$uv = a^x a^y = a^{x+y},$$

que por la definición de logaritmo se reduce a

$$\log_a uv = x + y = \log_a u + \log_a v.$$

TEOREMA 14.4 *El logaritmo del cuociente de dos cantidades es igual al logaritmo de la primera cantidad menos el logaritmo de la segunda.*

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v. \tag{14.13}$$

Demostración: Con la misma notación del Teorema 14.3, tenemos

$$\frac{u}{v} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

Escribiendo en forma de logaritmos, obtenemos

$$\log_a \frac{u}{v} = x - y = \log_a u - \log_a v.$$

TEOREMA 14.5. *El logaritmo de una potencia de una cantidad es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la cantidad, esto es,*

$$\log_a u^p \equiv p \log_a u. \tag{14.14}$$

Demostración: Sea u una cantidad positiva cualquiera y sea x su logaritmo. Entonces, $x = \log_a u$ o $a^x = u$. Elevando ambos miembros a la potencia p, tenemos

$$(a^x)^p = a^{xp} = u^p,$$

o, en forma logarítmica,

$$\log_a u^p = xp = p \log_a u.$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2. El Teorema 14.3 implica que

$$\log_{10} (47)(93) = \log_{10} 47 + \log_{10} 93$$

y

$$\log_{10} 4700 = \log_{10} 47 \cdot 100 = \log_{10} 47 + \log_{10} 100.$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3. El Teorema 14.4 implica que

$$\log_{10} \tfrac{82}{53} = \log_{10} 82 - \log_{10} 53.$$

Los Teoremas 14.3 y 14.4 implican que

$$\log_{10} \frac{(48)(96)}{23} = \log_{10} 48 + \log_{10} 96 - \log_{10} 23$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4. El Teorema 14.5 puede utilizarse tanto para potencias enteras como para raíces,

$$\log_{10} 28^5 = 5 \log_{10} 28,$$
$$\log_{10} \sqrt[3]{472} = \log_{10} (472)^{1/3} = \tfrac{1}{3} \log_{10} 472.$$

PROBLEMAS

Exprésense las siguientes expresiones en notación logarítmica, usando la ec. (14.11).

1 $= 27$ $\log_3 27 = 3$	2 $5^4 = 625$ $\log_5 625 = 4$	3 $4^0 = 1$ $\log_4 1 = 0$
4 $= 1000$	5 $8^{4/3} = 16$	6 $2^{-6} = \frac{1}{64}$
7 $= 0.001$	8 $b^x = w$	9 $4^1 = 4$

Escríbanse en forma exponencial, utilizando la ec. (13.11):

10 $\log_2 \frac{1}{8} = -3$.   11 $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.   12 $\log_{11} 1 = 0$.

Determínese por inspección el valor de x, a o u en cada una de las expresiones siguientes:

13 $x = \log_4 16$. $x = 2$ 14 $x = \log_7 1$. $x = 0$ 15 $x = \log_9 \frac{1}{9}$.

16 $x = \log \sqrt{636}$.   17 $\log_5 u = 2$. $u = 25$ 18 $\log_a 16 = 4$.

19 $x = \log_2 4^7$.   20 $\log_a 32 = -\frac{5}{2}$.   21 $\log_a \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

Trácense las gráficas de las siguientes funciones:

22 $y = \log_5 x$.   23 $y = \log_{1/2} x$.   24 $y = \log_{10} x$.   25 $y = \log_{1/3} x$.

Exprésese como un logaritmo único, utilizando los Teoremas 14.3, 4 y 5, cada una de las expresiones siguientes:

26 $\log_a x + \log_a y - \log_a z$ 27 $\log_b (a + 2) - \log_b (a - 3)$

28 $4 \log_{10} x - 3 \log_{10} y$ 29 $\frac{1}{2} \log_a x - \frac{2}{3} \log_a y$

30 $\log_b 2x + 3(\log_b x - \log_b y)$ 31 $\log_a x + 6 \log_a (x - 1) + 3 \log_a x^2$

Escríbase el logaritmo de cada expresión en función de los logaritmos de sus factores.

32 $\log_{10} (895)(1,47)$.   33 $\log_{10} (60,3)^4$.

34 $\log_{10} (68)^7(\sqrt{147})$.   35 $\log_{10} \dfrac{(54,3)^3(67)}{(93,9)(32,5)^2}$.

14.5. Logaritmos decimales

De la explicación hecha en la sección anterior queda claro que cualquier número positivo distinto de 1 puede utilizarse como base de un sistema de logaritmos. Por razones de cálculo, el sistema más conveniente es el que tiene a 10 como base. La primera tabla de logaritmos de base 10 fue construida por Henry Briggs (1560-1631). Las ventajas de este sistema se irán poniendo de manifiesto a medida que prosigamos en nuestro estudio. Escribiendo

$$\begin{aligned}
10^3 &= 1000 \\
10^2 &= 100 \\
10^1 &= 10 \\
10^0 &= 1 \\
10^{-1} &= 0.1 \\
10^{-2} &= 0.01 \\
10^{-3} &= 0.001
\end{aligned}$$

y considerando que esta lista se extienda indefinidamente en ambos sentidos, tenemos un método para representar algunos números como potencias de 10.

Si bien éstos son los únicos números que pueden escribirse como 10 elevado a un exponente entero, todos los números positivos pueden expresarse aproximadamente como 10 elevado a cierto exponente. Este exponente, por la definición de logaritmo, ec. (13.9), es el logaritmo del número con respecto a la base 10 y lo llamaremos *logaritmo decimal del número*. En adelante, cuando no se indique base supondremos que ésta es 10; de este modo, $\log 1000 = 3$, $\log 10 = 1$ ó $\log 0{,}001 = -3$.

No sólo las potencias de diez enumeradas arriba, sino todos los números positivos tienen logaritmos. Los valores de los logaritmos (con base diez) de todos los números positivos a intervalos de un centésimo han sido registrados, aproximados a cuatro decimales, en la tabla II del Apéndice. Por ejemplo, para encontrar log 7,63 miramos hacia abajo la primera columna N de la tabla hasta 7,6 y en seguida nos desplazamos hacia la derecha hasta el número que aparece en la columna encabezada por 3; este valor es 0,8825, o sea, $\log 7{,}63 = 0{,}8825$, que significa, evidentemente, $10^{0{,}8825} = 7{,}63$ (aproximadamente).

En realidad, utilizando el método de *interpolación lineal*, en forma similar a la de la sección 10.5, junto con la tabla II, podemos calcular el logaritmo de un número con cuatro cifras significativas. Si N está entre x y $x + 0{,}01$, entonces $N = x + 0{,}01r$, con r entre 0 y 1, de modo que, suponiendo que la gráfica de la función logarítmica es una recta entre x y $x + 0{,}01$,

$$\log N = \log x + r[\log(x + 0{,}01) - \log x]. \tag{14.15}$$

Ejemplo 1. Calcúlese log 3,476.

Solución: Puesto que $3{,}47 < 3{,}476 < 3{,}48$, tenemos

$$\begin{aligned}\log 3{,}476 &= \log 3{,}47 + 0{,}6\,(\log 3{,}48 - \log 3{,}47)\\ &= 0{,}5403 + 0{,}6(0{,}5416 - 0{,}5403)\\ &= 0{,}5403 + 0{,}0008\\ &= 0{,}5411.\end{aligned}$$

Este número sólo puede darse con no más de cuatro decimales, puesto que los logaritmos de la tabla son aproximaciones con cuatro cifras decimales.

Si se conoce el logaritmo de un número, dado con cuatro decimales, se puede determinar el número utilizando la tabla II. Si $\log N$ aparece en la tabla, el procedimiento para determinar N es el mismo anterior en orden inverso. Si $\log N$ está entre $\log x$ y $\log(x + 0{,}01)$, entonces $N = x + 0{,}01r$, con

$$r = \frac{\log N - \log x}{\log(x + 0{,}01) - \log x}, \tag{14.16}$$

aproximado a la décima más cercana. (¿Por qué?)

EJEMPLO 2. Determínese N si $\log N = 0{,}7281$.

Solución: Mirando la tabla, encontramos

$$0{,}7275 < 0{,}7281 < 0{,}7284,$$

donde

$$\log 5{,}35 = 0{,}7284, \quad \log 5{,}34 = 0{,}7275.$$

Por tanto, tenemos

$$r = \frac{0{,}7281 - 0{,}7275}{0{,}7284 - 0{,}7275} = 0{,}7 \quad \text{(redondeado)},$$

y $N = 5{,}347$.

PROBLEMAS

Utilizando la tabla II, calcúlese el logaritmo de cada uno de los siguientes números:

1 2,57	2 3,89	3 6,92	4 7,65
5 4,71	6 9,80	7 6,875	8 8,924
9 3,276	10 1,892	11 7,689	12 5,873

Utilizando la tabla II, calcúlese N si $\log N$ es igual a:

13 0,3856	14 0,8756	15 0,6149	16 0,6405
17 0,9415	18 0,7657	19 0,2675	20 0,5217
21 0,9229	22 0,7578	23 0,5069	24 0,6745

En general, el logaritmo de N tiene dos partes; un número entero, llamado la *característica* y una parte decimal positiva (un número n tal que $0 \leq n < 1$), llamada la *mantisa*. Si la coma decimal de un número esta exactamente a la derecha de la primera cifra no nula, el logaritmo del número tiene por característica 0. Todos los números entre 1 y 10 en la tabla II son de este tipo. De tales números se dice que tienen *la coma decimal en posición normal* (*estándar*).

Si un número se multiplica por 10, la coma se desplaza un lugar hacia la derecha y si se divide por 10, la coma se desplaza un lugar hacia la izquierda. Cada vez que un número se multiplica por 10, puesto que

$$\log 10N = \log N + \log 10 = \log N + 1,$$

el logaritmo del número aumenta en uno. Análogamente, si el número se divide por 10, su logaritmo disminuye en uno, porque

$$\log \frac{N}{10} = \log N - \log 10 = \log N - 1.$$

De esta manera, la regla general para obtener la característica puede expresarse en forma de teorema.

Teorema 14.6. *La característica del logaritmo de un número es igual al número de lugares que la coma decimal ha sido desplazada desde la posición normal. La característica es positiva si la coma se ha desplazado a la derecha y negativa si lo ha sido a la izquierda.*

Es a causa de esta propiedad de nuestro sistema numérico y de la correspondiente facilidad de determinar la característica, que los logaritmos de base diez se utilizan en los cálculos.

La mantisa, la parte del logaritmo que aparece en la tabla, no cambia al cambiarse la posición de la coma decimal en el número, sino que depende únicamente de su sucesión de dígitos. De este modo, por el resultado del ejemplo 1,

$$\log 347{,}6 = 2{,}5411,$$

puesto que su característica es 2, en tanto que

$$\log 0{,}003476 = -3 + 0{,}5411.$$

La característica -3 se escribe generalmente $7 - 10$ (por razones de cálculo, se acostumbra escribir toda característica negativa como un entero positivo menos un múltiplo de 10), de modo que

$$-3 + 0{,}5411 = 7{,}5411 - 10.$$

Problemas

Indíquese la característica y la mantisa de cada uno de los siguientes logaritmos:

1 $\log N = 1{,}3782$.

2 $\log N = 3{,}4729$.

3 $\log N = 0{,}5728 - 3$.

4 $\log N = 9{,}6847$.

5 $\log N = 5{,}8723$.

6 $\log N = 6{,}7253 - 10$.

7 $\log N = -3{,}7285$.

8 $\log N = 0{,}6892$.

Usando la tabla II, calcúlense los logaritmos de los siguientes números:

9 329.

10 0,00874.

11 4728.

12 32,46

13 0,07284.

14 0,6877.

Utilizando la tabla II, determínese N si

15 $\log N = 3{,}8228$.

16 $\log N = 0{,}9643 - 2$.

17 $\log N = 2{,}4268$.

18 $\log N = 9{,}8818 - 10$.

19 $\log N = 7{,}5627 - 10$.

20 $\log N = -1{,}4892$.

14.6. Cálculos mediante uso de logaritmos

Pasaremos a ver ahora en qué forma los cálculos que incluyen multiplicaciones, divisiones, elevaciones a potencia o extracciones de raíz pueden simplificarse utilizando logaritmos. El desarrollo de la operación debe delinearse sistemáticamente antes de efectuar los cálculos propiamente tales. Una disposición ordenada es de gran ayuda, no sólo para simplificar el trabajo, sino también para comprobar los resultados.

EJEMPLO 1. Utilícense logaritmos para calcular $(1280 \cdot 0{,}849)/62.8$.

Solución: Sea $N = (1280 \cdot 0{,}849)/62.8$. Utilizando los teoremas 14.3 y 14.4, tenemos $\log N = \log 1280 + \log 0{,}849 - \log 62{,}8$. Disponemos los cálculos en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \log 1280 &= 3{,}1072 \\ (+)\log 0{,}849 &= \underline{9{,}9289 - 10} \\ \log \text{numerador} &= 13{,}0361 - 10 \\ (-)\log 62{,}8 &= \underline{1{,}7980 } \\ \log N &= 11{,}2381 - 10 \\ N &= 17{,}3. \end{aligned}$$

Se da N con tres cifras significativas porque los números originales son de ese tipo.

EJEMPLO 2. Calcúlese utilizando logaritmos: $\sqrt{0{,}01278}/(0{,}4825)^3$.

Solución: Sabemos que $\log N = \frac{1}{2} \log 0{,}01278 - 3 \log 0{,}4825$. Disponemos los cálculos en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \log 0{,}4825 &= 9{,}6834 - 10 \\ 3 \log 0{,}4825 &= 29{,}0502 - 30 \\ &= 9{,}0502 - 10 \\ \log 0{,}01278 &= 18{,}1065 - 20 \\ \tfrac{1}{2}\log 0{,}01278 &= 9{,}0532 - 10 \\ (-)\, 3 \log 0{,}4825 &= 9{,}0502 - 10 \\ \log N &= 0{,}0030 \\ N &= 1{,}007. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Determínese el valor de $x = 52{,}8 \log 6{,}79$.

Solución: Es importante observar que este ejemplo pide el producto de los dos factores 52,8 y log 6,79 y *no*, 52,8 y 6,79. De esta forma,

$$\log x = \log 52{,}8 + \log[\log 6{,}79].$$

$$\begin{aligned} \log 52{,}8 &= 1{,}7226 \\ (+)\log[\log 6{,}79] = \log 0{,}832 &= \underline{9{,}9201 - 10} \\ \log x &= 1{,}6427 \\ x &= 43{,}9 \end{aligned}$$

PROBLEMAS

Utilizando logaritmos, calcúlese el valor de cada una de las expresiones siguientes con cuatro cifras significativas:

1 $(367)(87{,}2)$.

2 $(47{,}2)(0{,}897)$.

3 $\dfrac{32{,}7}{(0{,}892)^{1/2}}$.

4 $\dfrac{(245)(8{,}62)}{(7{,}84)^2}$.

5 $(32{,}79)(497{,}2)(9{,}738)$.

6 $\sqrt{756{,}9}(4{,}796)$.

*7 $(-0{,}8472)^4$

8 $(-3{,}472)^{-3}$.

9 $\dfrac{(6{,}892)(-0{,}9245)^{2/3}}{2{,}475}$.

10 $\left(-\dfrac{47{,}2}{6{,}783}\right)^3$.

11 $\dfrac{\sqrt{738{,}2}(38{,}74)}{(0{,}9576)^2(8743)}$

12 $\left[\dfrac{\sqrt{8453}(0{,}002477)}{347{,}9}\right]^{1/2}$.

13 $4{,}72\log 63{,}9$.

14 $\log(\log 82{,}4)$.

15 $\dfrac{\log 48{,}5}{\log 67{,}2}$.

16 $\dfrac{\log 0{,}8924}{\log 5{,}237}$.

14.7. Interés compuesto y su generalización

El estudio del interés compuesto hace uso del cálculo logarítmico y, además, introduce en forma lógica otro importante sistema de logaritmos.

Si una suma de dinero P se invierte a una tasa de interés r (expresada en tanto por unidad) por año, el interés al cabo de un año es Pr, de modo que la cantidad total es $P + Pr = P(1 + r)$. Si esta cantidad gana interés por un segundo año, al cabo de dos años la cantidad total es

$$P(1 + r) + P(1 + r)r = P(1 + r)(1 + r) = P(1 + r)^2.$$

* Si bien el logaritmo de un número negativo no está definido, el cálculo puede efectuarse considerando todos los factores como positivos y anteponiendo el signo apropiado al resultado.

Esto representa la cantidad compuesta de dinero al cabo de dos años debido a su inversión a la tasa de interés r. Continuando en esta forma, la cantidad P, invertida por n años y compuesta anualmente a la tasa r, está dada por

$$A = P(1 + r)^n. \tag{14.17}$$

EJEMPLO 1. Determínese la cantidad total al cabo de ocho años obtenida con un capital inicial de \$500 al 6% de interés compuesto anual.

Solución: Utilizando la ec. (14.17), tenemos $P = 500$, $r = 0{,}06$ y $n = 8$. Luego,

$$A = 500(1 + 0{,}06)^8 = 500(1{,}06)^8.$$

$$\begin{array}{rr} \log 1{,}06 = 0{,}0253 & \log\ 500 = 2{,}6990 \\ 8 \log 1{,}06 = 0{,}2024 & (+)\ 8 \log 1{,}06 = 0{,}2024 \\ & \log A = 2{,}9014 \\ & A = \$796{,}80. \end{array}$$

Puesto que n representa el número de años y r la tasa anual, podemos considerar el resultado debido a cantidades compuestas anualmente, semestralmente, trimestralmente, etc., si designamos por s el número de periodos de conversión o capitalización por año. En esa forma, en n años, el número de periodos será ns y la tasa por periodo r/s, o

$$A = P\left(1 + \frac{r}{s}\right)^{ns}. \tag{14.18}$$

EJEMPLO 2. Si los \$500 del ejemplo 1 se invierten por ocho años a interés de 6% anual compuesto trimestralmente, ¿cuál será la cantidad total?

Solución: Puesto que 6% compuesto trimestralmente por ocho años es $1\frac{1}{2}\%$ por periodo, durante 32 periodos, tenemos

$$A = 500(1{,}015)^{32},$$

que da $A = \$804{,}20$.

Este resultado y el del ejemplo 1 no son muy precisos, puesto que se han obtenido con tablas de logaritmos a cuatro decimales. Para obtener resultados precisos, ya que el exponente es grande, deben utilizarse tablas a siete decimales o bien tablas especiales de interés compuesto.

Una de las funciones exponenciales más importantes es resultado directo de una generalización de la ec. (14.18), que a veces es llamada *ley del crecimiento natural*. Tiene aplicaciones frecuentes tanto en biología, química y economía como en matemáticas. Supongamos que el número de periodos de capitalización

o conversión s aumenta indefinidamente, de modo que la cantidad se compone continuamente. Si $r/s = x$ y, por tanto, $s/r = 1/x$, tenemos de la ec. (14.18),

$$A = P\left[\left(1 + \frac{r}{s}\right)^{s/r}\right]^{rn} = P[(1 + x)^{1/x}]^{rn}. \tag{14.19}$$

Si s crece indefinidamente, con r fijo, $r/s = x$ decrece indefinidamente y tiende a cero por valores positivos. Si se desarrolla la ec. (14.19) mediante el teorema del binomio (véase problema 4, sección 12.5),

$$\begin{aligned} A &= P\left[1^{1/x} + \frac{1}{x}\cdot 1^{(1/x)-1}\cdot x + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{2!}\cdot 1^{(1/x)-2}\cdot x^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)}{3!}\cdot 1^{(1/x)-3}\cdot x^3 \cdots\right]^{rn} \\ &= P\left[1^{1/x} + 1^{(1/x)-1} + \frac{1-x}{2!}\cdot 1^{(1/x)-2} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{(1-x)(1-2x)}{3!}\cdot 1^{(1/x)-3} + \cdots\right]^{rn}, \end{aligned}$$

y si calculamos cada término de esta expresión para x igual a cero, obtenemos

$$A = P\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right)^{rn} \tag{14.20}$$

Si bien no podemos aquí demostrar que esta suma infinita tiene un valor definido,* parecería probable que la expresión entre paréntesis en la ec. (14.19) tiene un valor definido si se hace tender x a cero. Este es efectivamente el caso; este valor constante, que se designa por e, es un decimal no periódico que no termina y, por tanto, es irracional (sección 1.5). Con seis cifras significativas,

$$e = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\right) = 2{,}71828. \tag{14.21}$$

Tenemos así la función

$$A = Pe^{rn}, \tag{14.22}$$

que representa la cantidad P compuesta en forma continua durante n años a la tasa de interés anual r.

---

* Al igual que en la sección 12.5, en general, toda demostración de la existencia de un valor definido para una suma infinita está fuera del objetivo de este libro.

EJEMPLO 3. La población de cierta localidad es 20.000 y crece continuamente a una tasa $r = 0{,}037$, de acuerdo con la ley del crecimiento natural, ec. (13.22). Determínese la población aproximada después de 25 años.

Solución: Con la fórmula $A = Pe^{rn}$, tenemos $P = 20\,000$, $r = 0{,}037$ y $n = 25$. Por tanto, aplicando logaritmos, tenemos

$$\log A = \log 20.000 + (0{,}037)(25) \log e$$
$$\log 20.000 = 4{,}3010$$
$$(+)\,(0{,}037)(25) \log e = 0{,}4017$$
$$\log A = 4{,}7027$$
$$A = 50.430 \text{ (población aproximada).}$$

PROBLEMAS

1 Calcúlese la cantidad compuesta al cabo de 10 años con un capital inicial de \$200 al 4%:

(a) compuesto anualmente.
(b) compuesto semestralmente.
(c) compuesto mensualmente.
(d) compuesto continuamente.

2 Calcúlese la cantidad compuesta al cabo de 20 años con un capital inicial de \$3000 al 6 %

(a) compuesto anualmente.
(b) compuesto mensualmente.
(c) compuesto continuamente.

3 ¿Qué tiempo se necesita para duplicar cierta cantidad:

(a) compuesta anualmente al 6 %?
(b) compuesta continuamente al 6 %?

Indicación: Hágase $J = 1$ y $A = 2$.

En los problemas 4 a 8 supondremos que rige la ley del crecimiento natural, ec. (14.22).

4 La población de cierta ciudad es 80.000 y ha estado creciendo continuamente en los últimos 20 años a una tasa $r = 0{,}025$. ¿Cuál era la población hace 20 años?

5 En un cultivo hay inicialmente 1000 bacterias y, 4 horas después, hay 4000. Determínese la tasa de crecimiento por hora de las bacterias.

6 Si la cantidad de cierto tipo de bacterias en un cultivo aumenta a razón de $r = 0{,}24$ por hora, ¿en cuánto tiempo 50 bacterias se transformarán en 1.000.000?

7 En una reacción química, la concentración inicial de 0,03 se reduce a 0,01 en 4 minutos.

(a) ¿Cuál es la velocidad de disminución de la concentración por minuto.
(b) ¿Cuál será la concentración después de 10 minutos?

8 Si el radio se descompone según la relación $y = y_0 e^{-0{,}04t}$, donde y_0 gramos de radio se reducen a y gramos en t siglos, ¿en cuánto tiempo se reducirá un gramo a medio gramo?

14.8. Aplicaciones de las funciones exponenciales

En la sección anterior vimos una aplicación importante de la función exponencial. Antes de considerar otras aplicaciones de esta función, analizaremos el método para determinar el valor numérico de un logaritmo respecto a una base cualquiera y para cambiar de una base a otra. En realidad, la función exponencial puede utilizarse para calcular el logaritmo de un número respecto a cualquier base.

EJEMPLO 1. Calcúlese el valor de $\log_4 15$.

Solución: Si $y = \log_4 15$, tenemos la ecuación equivalente

$$4^y = 15.$$

Toda ecuación de este tipo puede resolverse tomando el logaritmo decimal de cada miembro y calculando el valor pedido y. De este modo,

$$\log 4^y = \log 15, \quad y \log 4 = \log 15.$$

Despejando y, tenemos

$$y = \frac{\log 15}{\log 4} = \frac{1{,}1761}{0{,}6021} = 1{,}953.$$

Si se conoce el logaritmo de un número respecto a cierta base, a menudo es necesario calcular el logaritmo del número respecto a una base diferente. Sea

$$y = \log_a N.$$

que, escrito en forma equivalente, es

$$a^y = N,$$

y tomando el logaritmo como base b de cada miembro, tenemos

$$\log_b a^y = \log_b N, \quad \text{o} \quad y \log_b a = \log_b N.$$

Recordando que $y = \log_a N$, tenemos

$$\log_a N \cdot \log_b a = \log_b N. \tag{14.23}$$

Por la importancia del caso en que una base es 10 y la otra e, observamos que en este caso, con $a = e$ y $b = 10$, la ec. (14.23) se reduce a

$$\log_{10} N = \log_e N \cdot \log_{10} e = 0{,}4343 \log_e N, \tag{14.24}$$

y

$$\log_e N = \frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} N = 2{,}303 \log_{10} N. \tag{14.25}$$

Estas dos expresiones se usan extensamente para pasar del sistema de logaritmos decimales al sistema de logaritmos de base e, y viceversa.

EJEMPLO 2. Calcúlese $\log_e 3{,}24$.

Solución 1: Por la ec. (14.25),

$$\begin{aligned} \log_e 3{,}24 &= 2{,}303 \log 3{,}24 \\ &= (2{,}303)(0{,}5105) \\ &= 1{,}175. \end{aligned}$$

Solución 2: Este ejemplo puede resolverse, evidentemente, en la misma forma que el ejemplo 1. Haciendo

$$y = \log_e 3{,}24, \quad \text{entonces} \quad e^y = 3{,}24$$

y tomando logaritmo decimal de cada miembro, obtenemos

$$\log e^y = \log 3{,}24 \quad \text{ó} \quad y \log e = \log 3{,}24.$$

Despejando y, tenemos

$$y = \frac{\log 3{,}24}{\log e} = \frac{0{,}5105}{0{,}4343} = 1{,}175.$$

El método empleado en la resolución del ejemplo 1 y en la segunda solución del ejemplo 2 es similar al empleado en la resolución de ecuaciones tanto exponenciales como logarítmicas.

EJEMPLO 3. Resuélvase $4^{x+3} = 7^{x-1}$.

Solución: Tomando logaritmo decimal de cada miembro,

$$\log 4^{x+3} = \log 7^{x-1}.$$

Utilizando el Teorema 14.5, tenemos

$$(x + 3) \log 4 = (x - 1) \log 7.$$

Despejando x en esta ecuación, obtenemos

$$x \log 4 + 3 \log 4 = x \log 7 - \log 7,$$
$$x(\log 4 - \log 7) = -\log 7 - 3 \log 4,$$
$$x = \frac{\log 7 + 3 \log 4}{\log 7 - \log 4}$$
$$= \frac{2{,}6514}{0{,}2430} = 10{,}92 \text{ (aproximadamente).}$$

EJEMPLO 4. Resuélvase $\log(x+3) - \log x = 2$.

Solución: Si aplicamos el teorema 14.4,

$$\log(x+3) - \log x = \log \frac{x+3}{x} = 2,$$

de modo que

$$\frac{x+3}{x} = 100, \qquad x + 3 = 100x,$$
$$99x = 3 \qquad \text{ó} \qquad x = \tfrac{1}{33}.$$

PROBLEMAS

Calcúlense los logaritmos siguientes:

1 $\log_2 14$. 2 $\log_5 27$. 3 $\log_7 128$. 4 $\log_{27} 15$.

5 $\log_e 7$. 6 $\log_e 12$. 7 $\log_e 1{,}79$. 8 $\log_e 3{,}78$.

Determínese el valor de x en cada una de las expresiones siguientes:

9 $\log_4 x = 23$. 10 $\log_{12} x = 17$.

11 $\log_e x = 3{,}28$. 12 $\log_e x = 1{,}72$.

13 $\log_e x = 0{,}8473$. 14 $\log_e x = 2{,}547$.

▶ 15 Demuéstrese la relación $\log_b a = 1/(\log_a b)$.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones exponenciales.

16 $3^x = 27$. 17 $2^x = 32$.

18 $2^x = 27$. 19 $3^x = 32$.

20 $3^{x+1} = 4^{x-7}$. 21 $5(6^x) = 21^{x-2}$.

22 $17^{2x-3} = 25^{x-1}$. 23 $2{,}78^x = 7{,}38^{3x-1}$.

24 $e^x + e^{-x} = 2.$

Indicación: Esta ecuación es cuadrática en e^x.

25 $e^x - e^{-x} = 2.$

Resuélvanse las siguientes ecuaciones logarítmicas:

26 $\log x - 2\log 4 = \log 32.$

27 $\log(x + 2) - \log x = \log 12.$

28 $\log(3x + 2) = \log(x - 4) + 1.$

29 $\log(x + 1) - \log x = 2{,}4742.$

$$\log x - \log 8 = \log 32$$

$$\log \frac{x}{8} = \log 32$$

$$\frac{x}{8} = 32$$

$$\boxed{x = 256}$$

15

Aplicaciones de las funciones circulares

El tipo general de aplicación de las funciones circulares emana del hecho de que las soluciones de un gran número de los problemas que estudia la ciencia actual son de naturaleza periódica. Problemas de esta especie aparecen en astronomía y mecánica y en el estudio de fenómenos como la luz, el sonido y la electricidad. El análisis de estos problemas requiere, entre otras cosas, el uso frecuente de las funciones circulares, en especial algunas de sus propiedades y sus gráficas. En el presente capítulo examinaremos con cierta detención estas propiedades y gráficas, y, además, consideraremos algunas aplicaciones que surgen naturalmente.

15.1. Gráficas de las curvas $y = a$ sen kx

Al trazar la gráfica de $y =$ sen x (fig. 6-7, sección 6.3), podríamos haber diagramado los puntos directamente, dando valores cualesquiera a x, calculando el valor correspondiente de y y determinando los puntos cuyas coordenadas son los valores así obtenidos. Si bien este método puede utilizarse para trazar la gráfica de cualquier función circular, rara vez se emplea en el caso de expresiones más generales, puesto que es más conveniente generalizar a partir de curvas simples ya diagramadas, dejándose a veces la diagramación directa de algunos puntos como método de comprobación.

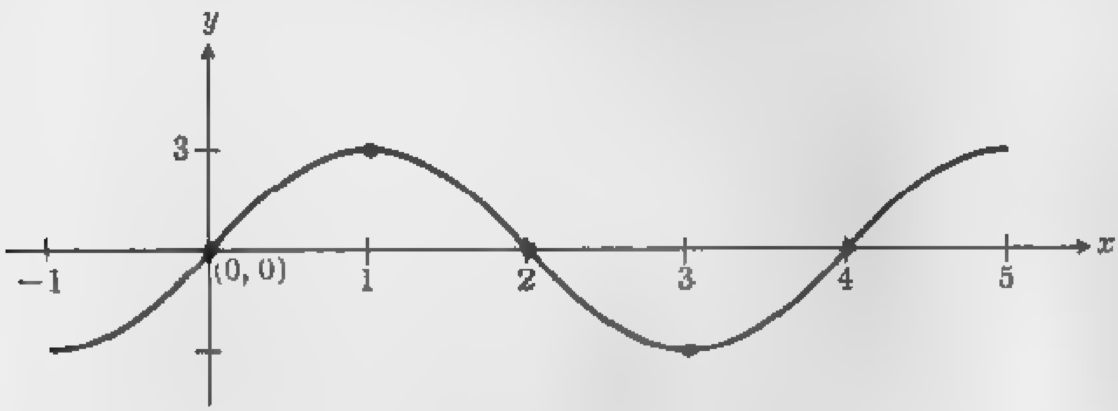
Las gráficas de la función definida por $y = a$ sen kx para distintos valores de las constantes a y k pueden considerarse como gráficas de las «curvas sinusoidales» generales de las cuales $y =$ sen x es un caso especial. Puesto que la función $y =$ sen x es periódica de periodo 2π [recuérdese ec (6.5)], su gráfica tiene la mayor ordenada, uno, cuando $x = \pi/2 \pm 2n\pi$. En esta forma, la función general $y = a$ sen kx (suponiendo $a > 0$ y $k > 0$) es también periódica, repitiéndose cada vez que kx varía en una longitud de 2π ó x en una longitud $2\pi/k$. Su periodo es entonces $2\pi/k$ y su gráfica tiene la mayor ordenada cuando $x = \pi/2k \pm 2n\pi/k$. Esta ordenada mayor a, o *máximo* de la función se llama *amplitud* de la función y la longitud de un *ciclo* completo, $2\pi/k$, se llama *periodo*.

Para trazar la gráfica de cualquier curva sinusoidal del tipo $y = a$ sen kx,

márquese a partir del origen en el sentido positivo del eje x una distancia igual al periodo. Al igual que en la fig. 6-7, los dos extremos y el punto medio de este intervalo son puntos de la curva. La gráfica toma su mayor valor (máximo) para el valor de x equidistante de los dos primeros puntos y toma su valor negativo de mayor valor absoluto (mínimo) para el valor de x equidistante de los dos últimos puntos. Estos puntos bastan generalmente para trazar la gráfica con una precisión aceptable. A menudo es conveniente tomar subdivisiones de distinta longitud en los dos ejes; también, puede ser más claro expresar las unidades horizontales en función de π.

EJEMPLO Indíquense la amplitud y el periodo de la función definida por $y = 3\,\text{sen}\,(\frac{1}{2}\pi x)$ y trácese su gráfica.

Solución: La amplitud es 3 y el periodo $2\pi/(\pi/2) = 4$. La distancia marcada a partir del origen y de longitud igual a un periodo es 4, los extremos del intervalo son $(0, 0)$ y $(4, 0)$ y el punto medio es $(2, 0)$. Puesto que $a = 3$, los puntos



15-1

de valor máximo y mínimo son $(1, 3)$ y $(3, -3)$, respectivamente. Una vez diagramado este ciclo, es posible agregar a derecha e izquierda un número cualquiera de ciclos iguales adicionales. La gráfica de esta función se ilustra en la fig. 15-1.

Hasta ahora hemos supuesto a y k positivos. Si $k < 0$, pueden utilizarse las relaciones entre funciones de valores positivos y negativos* para cambiar kx por un valor positivo cuando x es positivo. De este modo, para completar la explicación necesitamos considerar solamente $y = -a\,\text{sen}\,kx$, donde a y k son positivos. Esta función tiene precisamente la misma gráfica de $y = a\,\text{sen}\,kx$, excepto que para cada valor de x los valores de y que eran positivos son ahora negativos y viceversa. En otras palabras, la gráfica de $y = -a\,\text{sen}\,kx$ podría describirse como el reflejo respecto al eje x de la gráfica de $y = a\,\text{sen}\,kx$.

* $-\text{sen}\,x = \text{sen}\,(-x)$, $\cos x = \cos(-x)$, etc.

El mismo procedimiento utilizado para diagramar $y = a \operatorname{sen} kx$ puede utilizarse con ligeras modificaciones para diagramar $y = a \cos kx$. Su curva tiene también una amplitud a y un período $2\pi/k$. La curva de la función coseno difiere de la curva de la correspondiente función seno, sin embargo, en que está desplazada o desfasada hacia la izquierda en una distancia igual a un cuarto de su periodo, puesto que $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x$. Compárense las figs. 6-7 y 6-8.

PROBLEMAS

Determínense la amplitud y el periodo y trácese la gráfica de cada una de las funciones definidas por:

1 $y = 5 \operatorname{sen} 2\pi x$.

2 $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$.

3 $y = 3 \operatorname{sen} \pi x/3$.

4 $y = 0{,}5 \cos 4x$.

5 $y = 1{,}5 \cos \frac{3}{2}x$.

6 $y = \operatorname{sen} 6x$.

7 $y = 2 \operatorname{sen}(-\frac{1}{4}x)$; ¿cómo es la gráfica comparada con la de $y = 2 \operatorname{sen}(\frac{1}{4}x)$?

8 $y = 2 \cos(-\frac{1}{4}x)$; ¿cómo es la gráfica comparada con la de $y = 2 \cos(\frac{1}{4}x)$?

9 $y = -0{,}5 \operatorname{sen} 3t$.

10 $y = 2 \operatorname{sen} 0{,}001\, \pi t$

11 $y = 100 \cos 0{,}0314t$.

12 $y = \operatorname{sen} 0.0025t$.

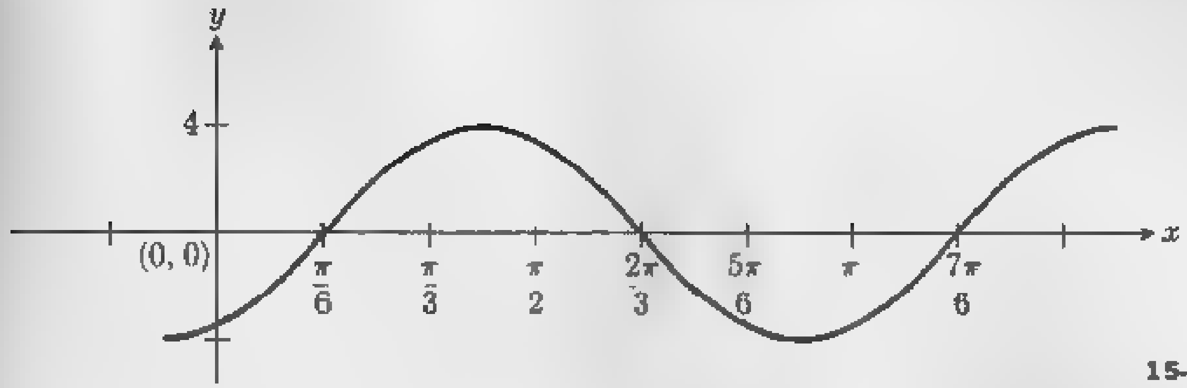
15.2. Gráficas de las curvas $y = a \operatorname{sen}(kx + b)$

Consideraremos ahora el caso de la función sinusoidal más general $y = a \operatorname{sen}(kx + b)$. En la sección anterior hicimos notar que $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ difiere de $\operatorname{sen} x$ solamente en un desplazamiento a la izquierda igual a $\pi/2$. Análogamente, la gráfica de $y = a \operatorname{sen}(kx + b) = a \operatorname{sen} k(x + b/k)$ difiere de la de $y = a \operatorname{sen} kx$ en un desplazamiento en dirección horizontal en una distancia b/k. Suponiendo $k > 0$, este desplazamiento es hacia la derecha o la izquierda, según que $b/k < 0$ ó $b/k > 0$. Llamamos a $|b/k|$ *desplazamiento de fase* o *desfasamiento* y a b, *constante de fase* o *diferencia de fase*. Las funciones tienen la misma amplitud a y el mismo período $2\pi/k$.

La gráfica de $y = a \cos(kx + b)$ puede obtenerse ya sea considerandola como una generalización de $y = a \cos kx$ o como una curva sinusoidal «desplazada».

EJEMPLO 1. Indíquese la amplitud, el periodo y el desfasamiento y trácese la gráfica de $y = 4 \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$.

Solución: La amplitud es 4 y el periodo π. Puesto que el desfasamiento es $\pi/6$ (¿por qué?), la gráfica pasa por el punto $(\pi/6, 0)$ y continúa hacia la derecha completando un período al pasar por $(7\pi/6, 0)$. La gráfica se ilustra en la figura 15-2.



15-2

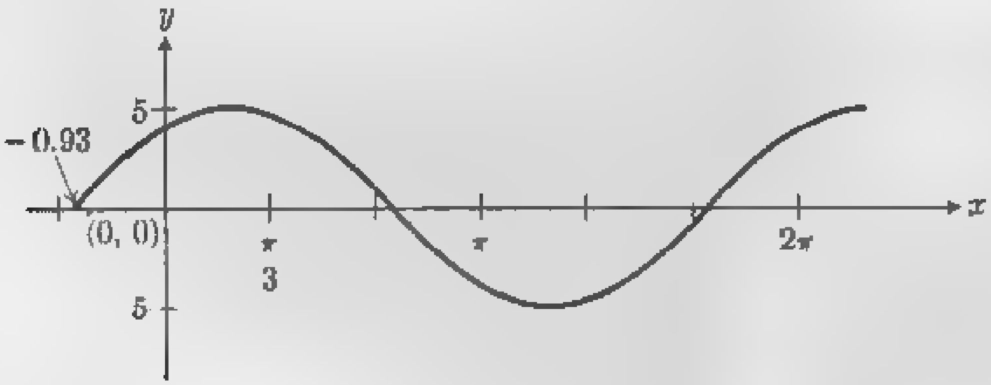
EJEMPLO 2 Trácese la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x$.

Solución: En el ejemplo 5, sección 6.9, demostramos que

$$3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x = 5 \operatorname{sen} (x + \theta_1),$$

donde $\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{4}{5}$ y $\cos \theta_1 = \frac{3}{5}$. De esta manera, utilizando la tabla 1, $\theta_1 = 0.93$ (aproximadamente), de modo que podemos trazar la gráfica considerando

$$y = 5 \operatorname{sen} (x + 0.93).$$



15-3

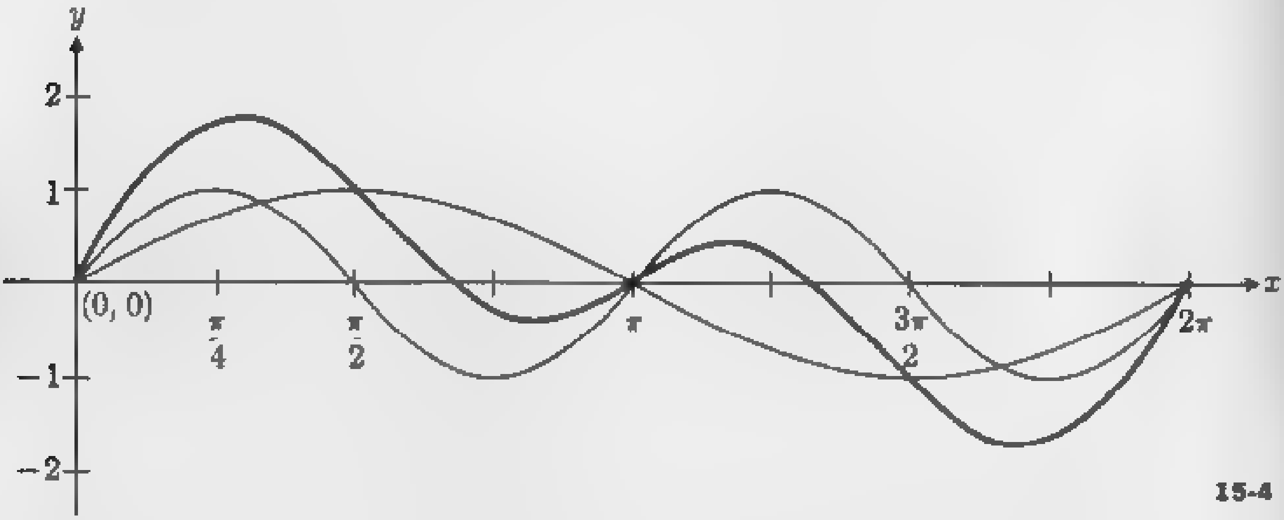
Asegúrese que la ubicación del punto $(-0.93, 0)$ sea compatible con la longitud del periodo $2\pi = 6.28$, como en la fig. 15-3.

15.3. Representación gráfica mediante adición de ordenadas

Otro método muy útil de diagramación es el conocido como *composición de ordenadas*. En la sección 15.6 utilizaremos este método en relación con algunas aplicaciones

EJEMPLO Trácese la gráfica de $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$.

Solución: Trácense, primeramente, en un mismo sistema de coordenadas las gráficas separadas de las dos funciones definidas por $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$ Entonces, la ordenada para un valor cualquiera de x es la suma de las ordenadas para ese valor de x de cada una de las gráficas, $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$. Esto se reduce a determinar la altura de la curva $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$ sumando las alturas correspondientes de las otras dos curvas, tomando en cuenta, evidentemente, los signos de cada una. El periodo de una de estas funciones es 2π y el de la otra es π; de esta forma, el periodo de la función definida por $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$ es 2π. La gráfica se ilustra en la fig. 15-4.



15-4

PROBLEMAS

Trácense las gráficas de las funciones definidas por las ecuaciones siguientes e indíquense sus amplitudes, periodos y desfasamientos.

1 $y = 2 \operatorname{sen} (x - \pi/6)$.
2 $y = 4 \operatorname{sen} (x - 1)$.
3 $y = 0{,}5 \operatorname{sen} (2x + \pi/8)$.
4 $y = 3 \cos (t/2 - 1)$.
5 $y = \operatorname{sen} (t + 0{,}25)$.
6 $y = 2 \operatorname{sen} [(t - 1)/3]$.
7 $13y = 5 \operatorname{sen} x + 12 \cos x$.
8 $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.
9 $y = 15 \operatorname{sen} x + 8 \cos x$.
10 $y = 24 \operatorname{sen} x + 7 \cos x$.
11 $y = 2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$.
12 $y = 0{,}6 \operatorname{sen} 2x + 0{,}5 \cos 2x$.

Trácense, utilizando el método de adición de ordenadas, las gráficas de las funciones definidas por las ecuaciones siguientes e indíquese el periodo de cada una

13 $y = \operatorname{sen} x + \cos x$. (Compárese esta curva con la del problema 8.)

14 $y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos 2x$.

15 $y = 4 \cos x/2 - 3 \operatorname{sen} 2x$.

16 $y = 0{,}26 \operatorname{sen} x + 0{,}47 \cos 3x$.

17 $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$.

Trácense las gráficas de las funciones definidas por las siguientes ecuaciones.

18 $y = 2(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x)$.

19 $y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x$.

20 $y = \dfrac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{32} \operatorname{sen} 3x\right)$.

Trácense las gráficas de las funciones definidas en los problemas 21 a 23 eligiendo la misma unidad en ambos ejes.

21 $y = x + \operatorname{sen} x$.

22 $y = x - \operatorname{sen} x$.

23 $y = x - 2 \operatorname{sen} x$.

24 ¿Qué puede decirse acerca del número de ceros de las funciones definidas en los problemas 21 a 23? Recuérdese la ec. (6.64).

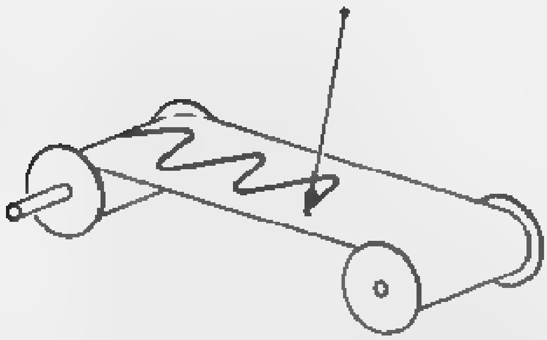
15.4. Movimiento armónico simple

La noción de movimiento armónico simple es fundamental para el estudio de fenómenos periódicos. Ejemplos de cuerpos que se mueven aproximadamente según las leyes del movimiento armónico son el disco de un péndulo simple, un corcho flotando en agua turbulenta, una partícula en una cuerda vibrante de violín, un punto en la punta de un diapasón, una partícula de aire al paso de una onda sonora simple y una partícula de la tierra durante un pequeño temblor. En realidad, todo cuerpo cuya posición d sobre una línea recta está dada para cualquier instante t por la ecuación $d = a \operatorname{sen} \omega t$ describe lo que se llama un *movimiento armónico simple*. Por tanto, solamente necesitamos recordar las propiedades de las funciones circulares para reconocer algunas de las características del movimiento armónico simple.

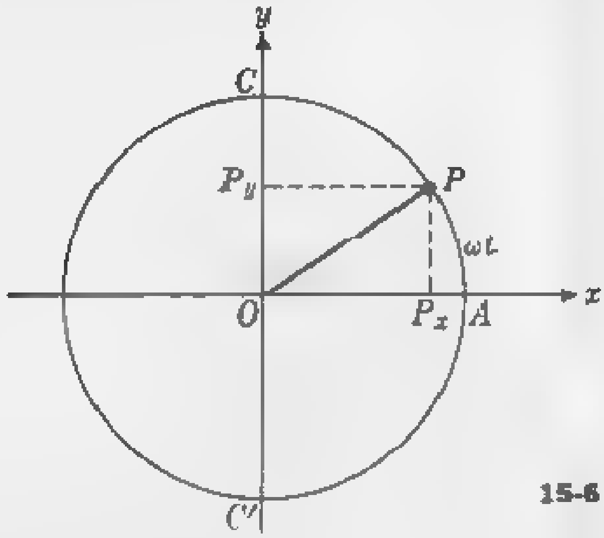
El movimiento armónico simple es de carácter oscilatorio, repitiéndose a intervalos de tiempo determinados, esto es, es periódico. La *amplitud* del movimiento es la magnitud del valor máximo de $a \operatorname{sen} \omega t$, o a, esto es, la magnitud del desplazamiento desde el punto central del movimiento. El tiempo necesario para una vibración completa o un ciclo se llama *período* $(2\pi/\omega)$. El número de períodos completos por unidad de tiempo, a saber $1/(2\pi/\omega) = \omega/2\pi$, se llama *frecuencia* del movimiento armónico simple. La *fase* en un instante cualquiera es la fracción de período que ha transcurrido desde que el cuerpo ha pasado por la posición central en el sentido positivo. En realidad, no es necesario indicar la posición del cuerpo a partir del instante $t = 0$, sino que puede indicarse a partir de un instante cualquiera t_0; así, la ecuación más general puede escribirse $d = a \operatorname{sen} \omega(t - t_0)$. Sabemos ya que esta ecuación más general representa la misma curva, a excepción de un desplazamiento sobre el eje t. Esta ecuación también describe un movimiento armónico simple, porque puede escribirse $d = a \operatorname{sen} \omega t'$, con $t' = t - t_0$. Puesto que $y = a \operatorname{sen} kt$ e $y = a \cos kt$ difieren

sólo en fase, $d = a \cos \omega t$ puede también utilizarse para describir un movimiento armónico simple.

Es interesante observar que la gráfica de un movimiento armónico simple puede obtenerse directamente a partir de una manifestación de este movimiento Consideremos, por ejemplo, la oscilación de un péndulo simple respecto de un punto fijo y el registro de su traza sobre una hoja de papel que se mueve a velocidad constante De la fig. 15-5 se ve claramente que el desplazamiento del disco del péndulo respecto a su posición central es una función sinusoidal del tiempo.



15-5



15-6

Uno de los ejemplos más elementales de movimiento armónico simple queda dado por un punto que se mueve con velocidad uniforme sobre una circunferencia unitaria. Considérese la circunferencia de centro O y radio uno en la fig. 15-6. Si imaginamos que el punto P se mueve con velocidad constante sobre la circunferencia, surge el problema de determinar el tipo de movimiento del punto P_x ó P_y, esto es, de la proyección de P sobre el eje x o de la proyección de P sobre el eje y. Supongamos que la velocidad uniforme de P sobre la circunferencia es ω unidades por segundo y que el punto P parte de A. Entonces, la distancia recorrida por P sobre la circunferencia en un instante cualquiera t, expresado en segundos, es ωt; P_y se mueve de modo que su ordenada está dada por $y = \operatorname{sen} \omega t$; esto es la proyección de P sobre el eje y describe un movimiento armónico simple. Es interesante observar que P_y está en el origen cuando $t = 0$ y que, a medida que P_y se desplaza hacia arriba, su velocidad decrece hasta hacerse cero en C. En seguida, el punto P_y se desplaza hacia abajo, aumentando su velocidad hasta que ésta alcanza el valor máximo al pasar P_y por el origen, decreciendo después hasta hacerse cero nuevamente en C'; el punto se desplaza en seguida hacia arriba con velocidad creciente hasta su punto de partida O. Después, todo el ciclo se repite. En realidad, la velocidad de todo cuerpo en movimiento armónico simple crece y decrece en la forma descrita.

PROBLEMAS

1 ¿Qué puede decirse del movimiento del punto P, en la fig. 15-6? Obténgase una expresión para su posición en un instante cualquiera t.

2 Las ecuaciones siguientes representan movimientos armónicos simples. Indíquense sus amplitudes, periodos y frecuencias y trácense sus gráficas.

(a) $y = 8 \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = 10 \operatorname{sen} (t/3)$
(c) $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3t$ (d) $y = 7 \cos 5x$
(e) $y = 4 \operatorname{sen} 2\pi x$ (f) $y = a \operatorname{sen} \omega t$

3 Una partícula se mueve sobre una recta en forma tal que su desplazamiento respecto de un punto fijo de la recta está dado por $d = 2 \operatorname{sen}^2 t$. ¿Puede expresarse este movimiento como movimiento armonico simple?

Indicacion ¿Puede expresarse $\operatorname{sen}^2 \theta$ en función de $\cos 2\theta$?

4 La cantidad de corriente eléctrica se mide en amperios, una unidad proporcional al numero de electrones que pasan por una sección transversal fija de un alambre durante un segundo. Para un generador simple esta cantidad de corriente esta expresada por

$$I = a_1 \operatorname{sen} \omega t.$$

Indíquese la expresión para I si la amplitud es 10 y la corriente es de 50 ciclos. Trácese la grafica de esta expresión La corriente de 50 ciclos (esto es, corriente con una frecuencia de 50 ciclos por segundo) se utiliza en algunos paises; en otros se utiliza corriente de 60 ciclos. (Véase el problema 5 que sigue.)

5 El flujo de electricidad depende de la fuerza electromotriz, que se mide en voltios. La expresión para la fuerza electromotriz de un generador simple está dada por

$$E = a_2 \operatorname{sen} \omega t.$$

¿Cómo queda expresada E en función de t si la amplitud es 8 y la corriente es de 60 ciclos?

6 La cantidad de potencia de una corriente eléctrica para encender lámparas, generar calor o hacer funcionar maquinarias depende de su energía en un instante cualquiera t. Esta potencia eléctrica se expresa generalmente en kilovatios y está dada por la expresión

$$P = EI.$$

Para las corrientes mencionadas en los problemas 4 y 5 demuéstrese que P puede escribirse en la forma

$$P = a_1 a_2 \operatorname{sen}^2 \omega t.$$

Determínese para cada ciclaje el periodo de esta función periódica. Observese que I, E y P en los problemas 4, 5 y 6 son todos ejemplos de comportamiento armonico simple.

7 Si se toca suavemente una flauta en el registro central, el sonido producido se aproxima con bastante exactitud a un sonido simple. Un sonido simple se define como el que produce en el oscilógrafo una onda que puede representarse por una curva armónica

simple, esto es, $y = a \operatorname{sen} \omega t$. Indíquese la expresión para un sonido de este tipo y trácese la gráfica de su ecuación si la frecuencia es de 400 ciclos por segundo y la amplitud de 0,001 cm.

8 La presión en una onda sonora que se propaga en cierto medio está dada por

$$p = 10 \operatorname{sen} 200\pi\left(t - \frac{x}{1000}\right) \text{dinas/cm}^2,$$

donde t está dado en segundos y x en centímetros. Trácense las gráficas de p como función de x para los siguientes valores de t. 0, 1/400, 2/400, 3/400 y 4/400 seg.

9 La ecuación de una onda sonora que se propaga en cierta cuerda está dada por la expresión

$$y = 25 \operatorname{sen} \pi(0{,}20t - 0{,}01x),$$

donde x está dado en centímetros y t en segundos. Trácense las gráficas cuando $x =$ 10, 25 y 100 cm.

15.5. Adición de dos funciones sinusoidales generales

Como aplicación de la representación gráfica, consideremos la combinación de dos funciones sinusoidales.

(1) Dos funciones sinusoidales generales con el mismo período quedan representadas por

$$y_1 = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

y (15.1)

$$y_2 = b \operatorname{sen}(\omega t + \beta).$$

Sus amplitudes son a y b, su diferencia de fase $\beta - \alpha$ y su período común es $2\pi/\omega$. Demostraremos que la suma de estas dos funciones es también una función sinusoidal con el mismo período.

$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + b \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \\ &= a(\operatorname{sen} \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \operatorname{sen} \alpha) + b(\operatorname{sen} \omega t \cos \beta + \cos \omega t \operatorname{sen} \beta) \\ &= A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t, \end{aligned} \tag{15.2}$$

donde

$$A = a \cos \alpha + b \cos \beta$$

y

$$B = a \operatorname{sen} \alpha + b \operatorname{sen} \beta.$$

Recordemos que A sen $\omega t + B \cos \omega t = r \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$, donde

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{A^2 + B^2} \\
&\sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + 2ab \cos \alpha \cos \beta + b^2 \cos^2 \beta) + (a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2ab \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + b^2 \operatorname{sen}^2 \beta)} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab(\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\beta - \alpha)},
\end{aligned}
$$

y donde

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{B}{r} \quad \text{y} \quad \cos \delta = \frac{A}{r}.$$

Por tanto, $y = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + b \operatorname{sen}(\omega t + \beta) - r \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$, donde r y β tienen los valores recién determinados.

Hemos demostrado así el siguiente importante teorema.

TEOREMA 15.1. *La suma de dos curvas sinusoidales generales del mismo periodo, independientemente de sus fases y amplitudes, es una curva sinusoidal con el mismo periodo.*

Este resultado puede generalizarse al caso de la suma de un numero finito cualquiera de curvas sinusoidales generales con el mismo periodo y es de gran utilidad en electricidad y acústica, como lo indicarán los problemas de la presente sección.

(2) Las ecuaciones de dos funciones sinusoidales generales con *diferentes frecuencias* que están en fase para $t = 0$, pueden expresarse como

$$y_1 = a \operatorname{sen} 2\pi n_1 t \quad \text{e} \quad y_2 = a \operatorname{sen} 2\pi n_2 t. \tag{15.3}$$

La función resultante se obtiene combinando estas funciones y U y_1 K y_2. En esta forma,

$$y = y_1 + y_2 = a(\operatorname{sen} 2\pi n_1 t + \operatorname{sen} 2\pi n_2 t),$$

y por la ec. (6.54), sección 6.12, con $\alpha + \beta = 2\pi n_1 t$ y $\alpha \cdot \beta - 2\pi n_2 t$.

$$y = 2a \operatorname{sen} 2\pi \frac{n_1 + n_2}{2} t \cos 2\pi \frac{n_1 - n_2}{2} t. \tag{15.4}$$

Este resultado no representa exactamente una función sinusoidal, pero bajo ciertas condiciones puede representar aproximadamente una función sinusoidal. Si $n_1 - n_2$ es pequeño comparado con n_1 y n_2, la ecuación resultante puede

considerarse como una «función sinusoidal con amplitud lentamente variable». Sean

$$n = \frac{n_1 + n_2}{2}, \quad \gamma = \frac{n_1 - n_2}{2}.$$

Entonces γ es pequeño comparado con n y substituyendo, tenemos

$$y = 2a \cos 2\pi\gamma t \operatorname{sen} 2\pi n t. \tag{15.5}$$

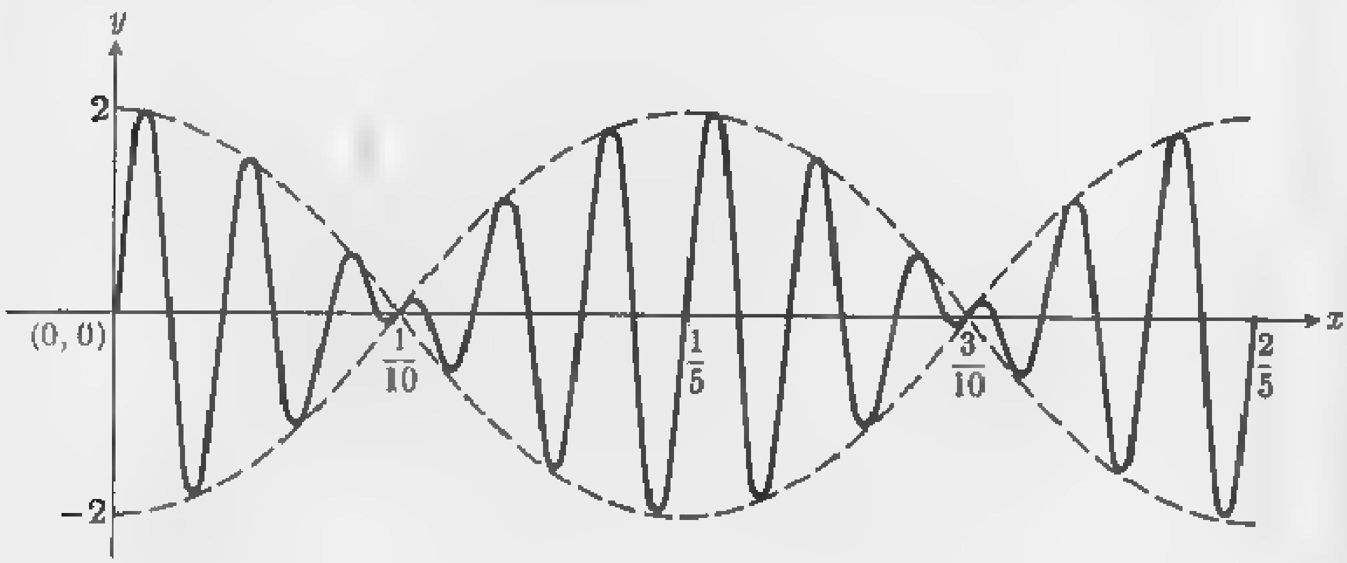
Puesto que γ es pequeño comparado con n, $\cos 2\pi\gamma t$ varía muy lentamente comparado con $\operatorname{sen} 2\pi n t$; esto es, el número de oscilaciones de la frecuencia n es grande durante el tiempo que el coseno emplea en completar un periodo. En esa forma, la curva resultante es una sinusoide con amplitud lentamente variable. En el caso de ondas sonoras, esta variación periódica de la amplitud se escucha como «pulsaciones». El número de pulsaciones por segundo es igual al número de veces por segundo que la onda $y = \operatorname{sen} 2\pi n t$ tiene valores 1 y -1. Este principio se utiliza en radio, televisión, ondas inalámbricas, telefonía y corriente eléctrica de alta frecuencia.

EJEMPLO Trácese la gráfica de la curva $y = \operatorname{sen} 50\pi t + \operatorname{sen} 60\pi t$.

Solución: Utilizando la ec. (15.5), tenemos

$$y = \operatorname{sen} 50\pi t + \operatorname{sen} 60\pi t = 2 \cos 5\pi t \operatorname{sen} 55\pi t.$$

Puesto que $\operatorname{sen} 55\pi t$ se encuentra siempre entre 1 y -1, la curva se encuentra situada entre las dos curvas $y = \pm 2 \cos 5\pi t$, tocándolas en los puntos en que $\operatorname{sen} 55\pi t = \pm 1$; o sea, para $t = 1/110$, $3/110$, $5/110$, etc. La gráfica se ilustra en la fig. 15-7.



15-7

Es importante comprender que esta explicación ha estado basada en dos funciones sinusoidales con la *misma* amplitud. En el caso de amplitudes diferentes, no sólo varía la amplitud de la función resultante, sino que también varía la frecuencia. De esta manera, no hay similitud entre este comportamiento y el de una función sinusoidal simple.

PROBLEMAS

1 Dos ondas atmosféricas dan origen a variaciones de presión en un determinado punto del espacio según las ecuaciones

$$p_1 = a \operatorname{sen} 2\pi nt \quad \text{y} \quad p_2 = a \operatorname{sen}\left(2\pi nt - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Calcúlese la amplitud de la onda resultante en este punto del espacio.

2 Exprésese $y = 4 \operatorname{sen}(\theta + \pi/6) + 5 \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ en la forma

$$y = r \operatorname{sen}(\theta + \delta)$$

3 La fuerza electromotriz E (recuérdese problema 5, sección 15.4) en un circuito está dada por $E = 80 + 8{,}2 \operatorname{sen} \omega t + 4{,}8 \cos \omega t - 0{,}8 \operatorname{sen} 3\omega t + 1{,}2 \cos 3\omega t$. Exprésese E en la forma $A_0 + A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) + A_2 \operatorname{sen}(3\omega t + \alpha_2)$, determinando los valores de A_0, A_1, A_2, α_1 y α_2.

4 Trácense las gráficas de los problemas 2 y 3. Las gráficas pueden completarse por el método de la sección 15.3 llamado *método de composición de ordenadas* o *principio de superposición*.

5 Las ondas son a veces reflejadas por los contornos de los cuerpos en los cuales se propagan, produciéndose así ondas que se propagan en sentido contrario. Estas se suman a las ondas originales, produciéndose una onda resultante de acuerdo con el principio de superposición. Considérese una columna de aire en la cual la ecuación de la onda original está dada por

$$y_1 = a \operatorname{sen} 2\pi n\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

y la ecuación de la onda reflejada es

$$y_2 = a \operatorname{sen} 2\pi n\left(t + \frac{x}{V}\right).$$

La onda resultante es $y_1 + y_2$. Demuéstrese, utilizando la ec. (6.54), sección 6.12, y haciendo $\alpha + \beta = 2\pi n(t - x/V)$ y $\alpha - \beta = 2\pi n(t + x/V)$, que

$$y = 2a \operatorname{sen} 2\pi nt \cos \frac{2\pi nx}{V}.$$

Esta es la ecuación de la llamada *onda estacionaria*. Se le da este nombre porque, para ciertos puntos en el cuerpo en el cual las ondas se propagan y es siempre 0; estos valores de x son aquellos para los cuales $\cos 2\pi nx/V = 0$, o sea,

$$\frac{2\pi nx}{V} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \text{ etc.}$$

¿Para qué valores de x es $y = 0$? Es interesante observar que esta onda resultante para un instante cualquiera t es una expresión armónica simple en x y para cada valor de x, representa una expresión armónica simple en t. En todos los instrumentos musicales el sonido es producido por ondas estacionarias.

Utilizando el método descrito en (2) de la presente sección, trácense las gráficas de:

6 $y = \operatorname{sen} 200t + \operatorname{sen} 210t$

7 $y = \operatorname{sen} 80t + \operatorname{sen} 100t$

15.6. Análisis y síntesis armónicos

Puede demostrarse matemáticamente que toda curva periódica seccionalmente continua* puede aproximarse mediante una suma finita de curvas senos y cosenos, en la cual la frecuencia más baja da el periodo de la curva misma, y los términos restantes tienen frecuencias que son múltiplos de la más baja. Este método, de gran utilidad para analizar una curva o función y conocido como *análisis armónico*, fue enunciado por primera vez por J. B. J. Fourier en 1807 y publicado en París en 1822. Sería de suponer que este método fue descubierto a través de estudios sobre acústica y movimientos ondulatorios pero, si bien es de gran utilidad en estos estudios, su origen estuvo en el desarrollo de los estudios de Fourier sobre conducción del calor.

El teorema de Fourier puede expresarse en forma matemática para la función periódica y mediante la igualdad aproximada

$$\begin{aligned} y \approx a_0 &+ a_1 \operatorname{sen} \theta + a_2 \operatorname{sen} 2\theta + a_3 \operatorname{sen} 3\theta + \cdots + a_n \operatorname{sen} n\theta \\ &+ b_1 \cos \theta + b_2 \cos 2\theta + b_3 \cos 3\theta + \cdots + b_n \cos n\theta. \end{aligned}$$

En esta expresión, y es la ordenada de la curva original para un valor cualquiera de x, y θ, expresado en función de x, es $2\pi x/L$. En esta forma, hacer variar a x entre 0 y L, donde L es el periodo de la curva, es equivalente a hacer variar θ entre 0 y 2π. Con la excepción de a_0, que indica simplemente el desplazamiento de toda la curva respecto del eje de referencia original, cada curva individual seno o coseno entra en la composición. De paso, mencionemos el hecho de que existen máquinas, llamadas *analizadores armónicos*, que permiten obtener expresiones para todos los coeficientes de Fourier de una curva determinada, esto es, a partir de la curva dibujada es posible obtener con esta máquina la ecuación de la curva.

---

* Una curva de este tipo, definida en un intervalo del eje x, consta de «trozos de curvas» en el sentido intuitivo. Toda definición rigurosa es imposible a este nivel matemático.

El inverso del proceso analítico que hemos explicado es también útil. Este proceso, llamado *síntesis armónica*, podría describirse como la combinación de varias curvas simples para obtener su curva resultante o compuesta. En algunos casos, esto puede hacerse mediante cálculos y siempre es posible, si bien sólo aproximadamente, mediante el método gráfico de sumar las ordenadas de las curvas individuales y diagramar los resultados, como se indicó en la sección 15.3.

El análisis armónico ha permitido hacer grandes progresos en diferentes campos científicos. En el estudio de las ondas sonoras musicales se registran los tonos de los distintos instrumentos musicales, se visualizan mediante un oscilógrafo y el resultado se estudia matemáticamente por medio del análisis armónico. Uno de los resultados de este estudio fue el desarrollo del órgano eléctrico. La *sismología*, que estudia los terremotos y sus orígenes, utiliza el análisis armónico por la naturaleza del movimiento vibratorio en los temblores y la forma de la onda resultante. Cuando las vibraciones son pequeñas, el movimiento es esencialmente armónico simple; en el caso más general, la onda es compuesta. Las ondas son registradas por un instrumento llamado *sismógrafo* y a partir de estos registros se pueden calcular la amplitud, dirección de movimiento y periodicidad de cada vibración. También se utilizan el análisis y síntesis armónicos en la predicción de las mareas. En muchos países existen organismos especializados que preparan y publican periódicamente calendarios de mareas. Estas «tablas de mareas», publicadas a veces con uno o dos años de anticipación, predicen las altas y bajas mareas en los principales puertos del mundo con gran precisión tanto en el tiempo (un minuto) como en la altura alcanzada (tres a cuatro centímetros). Estas predicciones se hacen mecánicamente utilizando las funciones circulares en relación con los movimientos periódicos del sol y de la luna.

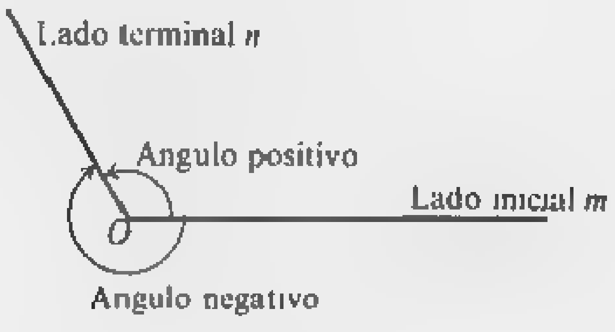
16

Aplicaciones de las funciones circulares a ángulos

Hay dos tipos de aplicaciones de las funciones circulares que son de importancia. En el capítulo anterior, estudiamos el tipo general de aplicación; un tipo más específico es el de las funciones en las cuales el número real θ es la medida de un ángulo. Consideraremos esta aplicación en el presente capítulo y, junto con ella, la resolución de triángulos y la determinación de relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Comenzaremos con la noción de ángulo.

16.1. Angulos

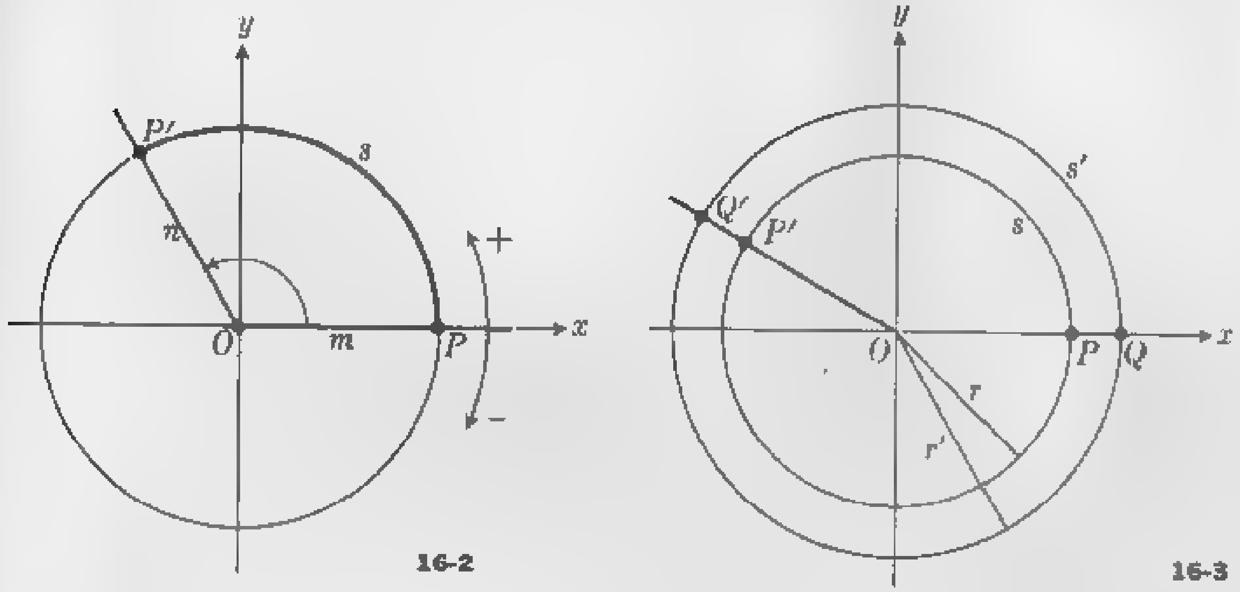
En geometría plana, un ángulo se define generalmente como la abertura comprendida entre dos semi-rectas (rayos) que parten de un punto. En trigonometría, agregamos a esa definición que el ángulo así definido tiene una medida que corresponde a la magnitud de rotación necesaria para llevar un rayo desde la posición de una de estas líneas hasta la de la otra. Considérese la fig. 16-1, en la cual los rayos m y n se cortan en el punto O, encontrándose ambos situados en un plano perpendicular a nuestra línea de visión. Si consideramos a m como el *lado inicial* y a n como el *lado final* o *terminal* del ángulo de vértice O, hay dos sentidos de rotación posibles para el lado inicial m. Se dice que el ángulo es positivo si la rotación es antihoraria y negativo si es horaria. Una flecha curva indicará el sentido de la rotación.



16-1

Consideremos ahora un rayo m que parte del origen de un sistema rectangular de coordenadas y coincide con el sentido positivo del eje x (fig. 16-2). A medida que este rayo gira en torno de O, un punto cualquiera P de él describirá una parte o toda la circunferencia de radio OP; incluso, la circunferencia puede ser descrita varias veces. Después de la rotación, OP se encontrará en una posición OP'; el arco de circunferencia $\widehat{PP'}$, designado por s, puede utilizarse para medir el ángulo POP'. De un ángulo tal como POP' se dice que está en posición *normal* (estándar) y que se encuentra en el cuadrante en que está ubicado su lado terminal OP'.

La unidad más lógica para medir la magnitud de un ángulo parecería ser el número de revoluciones o vueltas que resultan de la rotación desde el lado inicial hasta el terminal del ángulo. Dado que el número de revoluciones correspondientes a un ángulo cualquiera queda determinado por la razón entre la longitud s del arco interceptado y la longitud de la circunferencia, definimos la magnitud de un ángulo en la forma siguiente:



16-2

16-3

DEFINICIÓN 16.1. *La magnitud de un ángulo en revoluciones está dada por la relación:*

$$\boxed{\text{Angulo* en revoluciones} = \frac{s}{2\pi r}.} \qquad (16.1)$$

* En vista de que con mucha frecuencia consideramos la magnitud de un ángulo más bien que el ángulo mismo, emplearemos ordinariamente la palabra «ángulo» en lugar de «medida del ángulo».

Por ejemplo, si P recorre media circunferencia, el ángulo correspondiente queda medido por media revolución. De la misma manera si el arco es dos veces la circunferencia, la medida del ángulo es dos revoluciones.

Consideremos dos circunferencias concéntricas de centro O, fig. 16-3, y sean PP' un arco de longitud s en la circunferencia de radio r y QQ' un arco de longitud s' en la circunferencia de radio r'. Es intuitivo que la longitud de cada arco es la misma fracción o parte de la circunferencia correspondiente, de modo que

$$\frac{s'}{2\pi r'} = \frac{s}{2\pi r}$$

Esto puede demostrarse aplicando el teorema que dice que los triángulos semejantes tienen sus lados proporcionales. Recordando la definición de longitud de un arco, sección 4.7, tenemos $s'/r' = s/r$, de lo cual se deduce nuestro resultado. La magnitud de un ángulo cualquiera es, por tanto, independiente de la longitud de sus lados.

Si bien las revoluciones constituyen el método más natural para medir ángulos, existen otros sistemas más convenientes. El sistema más utilizado en aplicaciones prácticas tales como en topografía y navegación es el *sistema sexagesimal*, en el cual la unidad fundamental es el grado. En este sistema, una revolución = 360° (grados), 1° = 60′ (minutos) y 1′ = 60″ (segundos).

DEFINICIÓN 16.2. *La magnitud de un ángulo en grados está dada por la relación:*

$$\boxed{\textit{Angulo en grados} = (\textit{número de revoluciones})(360°).} \tag{16.2}$$

Por ejemplo, media revolución es 180° y un ángulo de dos revoluciones mide 720°.

El sistema más utilizado en matemáticas superiores es el *sistema circular* o *de radianes*. Si recordamos que la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, veremos la justificación de la definición siguiente:

DEFINICIÓN 16.3. *Un ángulo de una revolución es igual a un ángulo cuya medida es 2π radianes.*

De aquí se deduce inmediatamente que

$$\boxed{\textit{Angulo en radianes} = (\textit{número de revoluciones})\, 2\pi.} \tag{16.3}$$

Por ejemplo, media revolución es π radianes y un ángulo de dos revoluciones

mide 4π radianes. La medida de un ángulo en radianes es precisamente el número real θ para el cual hemos definido todas las funciones circulares. Es por esto que podemos utilizar la columna encabezada «radianes» en la tabla 1 del apéndice cuando queremos determinar una función circular de un numero real θ cualquiera. Convendremos en que cuando no se indique una unidad de medida ésta será el radián.

De estas definiciones se deducen dos resultados inmediatos. Despejando «número de revoluciones» en las ecs. (16.2) y (16.3) e igualando, tenemos la relación entre las medidas de un angulo en grados y radianes, esto es,

$$\boxed{\frac{\textit{Angulo en grados}}{360} = \frac{\textit{Angulo en radianes}}{2\pi}} \tag{16.4}$$

EJEMPLO 1. Un ángulo de 45° es igual a

$$\frac{45^\circ}{360^\circ}\,2\pi = \frac{\pi}{4}\text{ radianes.}$$

EJEMPLO 2. Un ángulo de $5\pi/6$ radianes es igual a

$$\frac{5\pi/6}{2\pi}\,360^\circ = 150^\circ.$$

EJEMPLO 3. Para expresar un ángulo de un radián en grados, se usa el mismo método:

$$1\text{ radián} = \frac{1}{2\pi}\,360^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 18' \text{ (aproximadamente)} \tag{16.5}$$

Análogamente, para un ángulo de un grado,

$$1^\circ = 2\pi\left(\frac{1^\circ}{360^\circ}\right) = 0{,}01745 \text{ radianes (aproximadamente).} \tag{16.6}$$

EJEMPLO 4. Exprésese el ángulo de 194°23′ en radianes.

Solución. En la tabla 1 del apéndice, los ángulos estan dados en las dos unidades, grados y radianes; por tanto, podemos utilizar esta tabla para pasar de un sistema a otro. Puesto que

$$194^\circ 23' = 180^\circ + 14^\circ 23',$$

e interpolando para $14°23'$,

$$14°20' = 0{,}2502 \text{ radianes},$$

y

$$14°30' = 0{,}2531 \text{ radianes}.$$

Puesto que $23'$ corresponde a 0,3 de la diferencia entre $30'$ y $20'$, la medida en radianes del ángulo supera a 0,2502 en 0,3 veces la diferencia entre 0,2531 y 0,2502, o sea, usando interpolación lineal,

$$14°23' = 0{,}2511 \text{ radianes}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 194°23' &= (\pi + 0{,}2511) \text{ radianes} \\ &= 3{,}3927 \text{ radianes (aproximadamente)}. \end{aligned}$$

El segundo resultado pone en evidencia una ventaja del sistema circular en la medición de ángulos.

Es posible expresar la longitud de un arco de circunferencia en función de su radio y del ángulo del centro correspondiente medido en radianes Substituyendo en la ec. (16.3) la expresión de «número de revoluciones» dada por la ec. (16.1), tenemos

$$\text{Angulo en radianes} = \frac{s}{2\pi r}(2\pi) = \frac{s}{r}.$$

Por tanto, la longitud del arco s interceptado por el ángulo del centro θ (medido en radianes) en una circunferencia de radio r está dada por

$$s = r\theta. \tag{16.7}$$

Obsérvese que obtenemos el resultado lógico, $s = \theta$, si consideramos una circunferencia unitaria, esto es, con $r = 1$.

Ejemplo 5. Una circunferencia tiene un radio de 40 cm. (a) ¿Qué longitud tiene el arco subtendido por un ángulo del centro de $36°$? (b) ¿Cuánto mide el ángulo del centro que subtiende un arco de 15 cm?

Solución: (a) Puesto que el número de radianes correspondientes a $36°$ es $\pi/5$,

$$s = 40\,(\pi/5) = 8\pi \text{ cm}.$$

Utilizando aproximaciones de π, podemos escribir la respuesta con la precisión deseada. (b) De $s = r\theta$, tenemos $15 = 40\theta$ ó $\theta = \frac{3}{8}$ radianes. Si se quiere el resultado en grados, reducimos $\frac{3}{8}$ radianes a grados, obteniendo $21°30'$.

Problemas

1 En un sistema rectangular de coordenadas, ubíquense los ángulos siguientes en posición normal, indicándose los lados inicial y terminal. Utilícese una flecha curva para indicar el sentido en que se mide el ángulo.

(a) $\frac{1}{4}$ rev (b) $-\frac{3}{4}$ rev
(c) 3 rev (d) $\frac{3}{8}$ rev
(e) $-\frac{1}{6}$ rev (f) $-\frac{5}{4}$ rev
(g) $\frac{5}{6}$ rev (h) $-\frac{5}{3}$ rev

2 Repítase el problema 1 para los ángulos siguientes expresados en grados:

(a) 45° (b) 135°
(c) −225° (d) −300
(e) 240° (f) 450°
(g) 720° (h) −120°

3 Repítase el problema 1 para los ángulos siguientes expresados en radianes:

(a) $\pi/6$ (b) $2\pi/6$
(c) $\pi/4$ (d) $4\pi/9$
(e) $-3\pi/2$ (f) $-5\pi/6$
(g) $5\pi/12$ (h) -5π

4 Exprésense los ángulos dados en los problemas 1 y 2 en radianes, dándose la respuesta en función de π.

5 Exprésense los ángulos dados en los problemas 2 y 3 en revoluciones.

6 Exprésense los ángulos dados en los problemas 1 y 3 en grados.

7 Transfórmense los ángulos siguientes a radianes, utilizando si es necesario la tabla I, e indíquense los resultados con cuatro decimales.

(a) 27° (b) 156°20′
(c) 47° (d) 189°32′
(e) 253°10′ (f) −378°49′

8 Transfórmense los ángulos siguientes a grados y minutos, usando si es necesario la tabla I, y aproxímense los resultados al minuto más cercano.

(a) $\pi/8$ (b) $-2\pi/13$
(c) 0,2443 (d) −1,3730
(e) 1,8600 (f) $\frac{9}{4}$
(g) −1,2900 (h) 5,7200

9 Escríbase cada una de las expresiones siguientes como un ángulo único en grados y minutos entre 0′ y 59′.

(a) $15°27' + 32°14'$
(b) $18°41' + 15°12'$
(c) $13°32' + 37°28'$
(d) $142°5' + 8°55'$
(e) $29°43' + 51°38'$
(f) $61°19' + 23°58'$
(g) $180° - 15°13'$
(h) $90° - 47°38'$
(i) $360° - 147°23'$
(j) $270° - 63°48'$
(k) $\frac{1}{2}(18°47' + 56°29')$
(l) $\frac{1}{2}(56°28' - 47°36')$

10 Si un arco de 20 cm subtiende un ángulo del centro de 2 radianes, determínese el radio de la circunferencia.

11 Una rueda de radio igual a 2 dm se desplaza rodando 3 dm. ¿En cuántos radianes gira? ¿En cuántos grados gira?

12 En una circunferencia de radio 14 cm, ¿qué longitud tiene el arco subtendido por un ángulo del centro de 82°?

13 ¿Cuántos grados mide el ángulo entre el minutero y el horario de un reloj que marca las 4,00?, ¿la 1,00?, ¿las 9,15?, ¿las 5,47?

14 Suponiendo que la tierra es una esfera de radio de 6370 kilómetros, determínese la distancia, medida sobre la superficie de la tierra, que hay desde la ciudad de Cauquenes, Chile, al Ecuador. La latitud de Cauquenes es 36°S.

15 Si un punto de la circunferencia de una rueda de 20 cm de diámetro recorre 300 m por minuto, ¿cuántos radianes gira la rueda en un segundo?

16 Para ángulos pequeños, el arco y la cuerda interceptados son aproximadamente de la misma longitud. Suponiendo que la tierra gira alrededor del sol sobre una circunferencia de radio 150.000.000 kilómetros, determínese el diámetro del sol si desde la tierra se le ve bajo un ángulo de 32'

16.2. Funciones circulares de ángulos

Observemos que la medida de un ángulo en radianes es el mismo número real θ para el cual definimos originalmente las funciones circulares. Esta correspondencia nos permite definir una función circular cualquiera de θ, donde θ es la medida de un ángulo en radianes, como la función circular del número real θ.

DEFINICIÓN 16.4. *Si $\theta \in R$, entonces toda función circular del ángulo cuya medida en radianes es θ es igual a la misma función circular de θ.*

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

(a) Si A es un ángulo cuya medida es 45° ó $\pi/4$ radianes, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \operatorname{sen} 45° \\ &= \operatorname{sen} (\pi/4 \text{ radianes}) \\ &= \operatorname{sen} \pi/4 = 1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) Si B es un ángulo cuya medida es 1 radián, entonces

$$\begin{aligned}\tan B &= \tan\ (1\ \text{radián})\\ &= \tan 57°18' \text{(Véase ejemplo 3, sección 16.1)}\\ &= \tan 1.\end{aligned}$$

Cuando se escriba sen $\pi/4$ ó tan 1, quedará claramente entendido a partir del contexto si se trata de una función de un número real o de un ángulo, en radianes. Por tanto, no complicaremos nuestra notación escribiendo, como en algunos libros, sen $\pi/4^{(r)}$, sino que escribiremos simplemente sen $\pi/4$ también para indicar el seno de un ángulo cuya medida en radianes es $\pi/4$, etc.

A partir de la Definición 16.4 podemos determinar las funciones circulares de un ángulo cualquiera, expresado ya sea en radianes o en grados. En ciertos casos, algunos ángulos especiales pueden dar valores exactos para las funciones, tal como en la sección 6.4, pero, en general, será necesario utilizar la tabla I en la forma analizada en la sección 6.13; puede también ser necesario usar en algunos casos la interpolación lineal.

Ejemplo 1. Determínese el valor exacto de sen 330°.

Solución. Puesto que 330° corresponde a $11\pi/6$ radianes, tenemos sen 330° = sen $11\pi/6 = -\frac{1}{2}$.

Ejemplo 2. Calcúlese el valor de cos 23°10′.

Solución: En la tabla I, buscamos en la columna encabezada «grados», el valor 23°10′ y, frente a este valor, en la columna coseno aparece 0,9194, de modo que cos 23°10′ = 0,9194.

Problemas

Indíquense los valores exactos de las expresiones siguientes:

1 sen 120° cos 150° + cos 120° sen 150°

2 csc 150° − cos 240° + tan 120°

3 sen 330° cos 120° tan 135°

4 sen 150° cos 120° tan 225°

Determínense todos los ángulos, expresándolos en grados, entre 0° y 360° que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

5 $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

6 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

7 $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$

8 $\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3}/2$

9 $\tan\theta = -1$

10 $\cos\theta = -\sqrt{2}/2$

11 $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}/2$

12 $\sec\theta = 2$

13 $\cot\theta = -\sqrt{3}$

15 Determínese el valor aproximado de cada expresión y, en esa forma, encuéntrese cuál es mayor.

(a) sen 2 y sen 2°
(b) cos 4 y cos 4° (Véase ejemplo ilustrativo b.)
(c) tan 1 y tan 1°

16 Exprésese sen 624° como función de un ángulo positivo agudo menor que 45°

Indicación: Puesto que 624° = 6(90°) + 84°, aplicando la ec. (6.34), tenemos sen 624° = −sen 84° y, de la ec. (6.22), −sen 84° = −cos 6°. Es conveniente repasar aquí la sección 6.10, teniendo presente la relación existente entre grados y radianes.

17 Escríbase cada una de las siguientes expresiones como función de un ángulo agudo positivo menor que 45°.

(a) sen 196°
(b) cos 147°
(c) sen 319°
(d) cos 254°
(e) tan 294°
(f) cos 728°
(g) sen (−625°)
(h) cos (−435°)

18 Escríbase cada una de las siguientes expresiones como función de un ángulo agudo positivo menor que 45°.

(a) tan 1004°
(b) sen 248°25′
(c) cos 106°18′
(d) tan 163°17′
(e) cos 204°46′
(f) tan 136°34′
(g) sen 156°39′
(h) cos 229°

19 Determínese el valor de cada una de las expresiones siguientes utilizando la tabla I.

(a) sen 14°20′
(b) tan 52°40′
(c) cos 28°50′
(d) sen 63°30′
(e) tan 21°10′
(f) cos 72°20′

20 En la resolución de triángulos, a menudo es necesario interpolar entre dos valores de la tabla I, estando los ángulos dados en grados. Explíquese por qué sen $(x + r)$ puede aproximarse a partir de la tabla mediante la fórmula

$$\operatorname{sen}(x + r) = \operatorname{sen} x + \frac{r}{10}[\operatorname{sen}(x + 10) - \operatorname{sen} x]$$

si x y $x + 10$ son dos ángulos consecutivos de la tabla, medidos en minutos, y r es un entero entre 0 y 10. [Compárese con la ec. (10.11).] Las otras funciones pueden expresarse mediante fórmulas similares.

21 Calcúlese sen 24°16′.

Indicación: Puesto que 24°16′ se encuentra comprendido entre 24°10′ y 24°20′,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 24°16' &= \operatorname{sen} 24°10' + \tfrac{6}{10}(\operatorname{sen} 24°20') - \operatorname{sen} 24°10')\\ &= 0{,}4094 + \tfrac{6}{10}(0{,}4120 - 0{,}4094)\\ &= 0{,}4094 + 0{,}0016\\ &= 0{,}4110.\end{aligned}$$

22 Determínese el valor aproximado de cada expresión siguiente utilizando la tabla I e interpolando

(a) sen 72°43′
(b) cos 28°46′
(c) tan 51°29′
(d) cos 63°23′
(e) tan 39°18′
(f) sen 128°36′
(g) cos 153°17′
(h) sen 8°9′

23 Utilizando la tabla I, determínese el ángulo θ entre 0° y 90° si:

(a) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}4253$
(b) $\tan\theta = 1{,}1237$
(c) $\cos\theta = 0{,}8857$
(d) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}8450$
(e) $\tan\theta = 0{,}2156$
(f) $\cos\theta = 0{,}2447$
(g) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}3475$
(h) $\cos\theta = 0{,}7844$

24 La tabla puede utilizarse también para determinar un ángulo, aproximado al minuto más cercano, si el valor de una función de este ángulo se encuentra entre dos valores dados en la tabla. Si se conoce sen θ, determinamos dos valores consecutivos en la columna «seno» entre los cuales se encuentre comprendido el valor dado. Haciendo $\theta = x + r$, donde r es un entero entre 0 y 10 y x y $x + 10$ son los dos valores consecutivos dados en la tabla, determinamos r mediante la aproximación

$$\frac{r}{10} = \frac{\operatorname{sen}(x + r) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x + 10) - \operatorname{sen} x}.$$

Explíquese cómo se obtiene esta fórmula.

25 Determínese el ángulo θ entre 0° y 90° si sen $\theta = 0{,}6231$.

Indicación: 0,6231 está comprendido entre los dos valores dados en la columna «seno» sen 38°30′ = 0,6225 y sen 38°40′ = 0,6248. En esta forma,

$$\frac{r}{10} = \frac{0{,}6231 - 0{,}6225}{0{,}6248 - 0{,}6225},$$

o

$$r = 10\left(\frac{0{,}0006}{0{,}0023}\right) = 3,$$

de modo que $\theta = 38°33'$, aproximado al minuto más cercano.

26 Determínense los valores aproximados entre 0° y 90°, utilizando la tabla I e interpolando, si:

(a) $\tan\theta = 0{,}8172$
(b) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}5331$
(c) $\cos\theta = 0{,}2717$
(d) $\cos\theta = 0{,}9392$
(e) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}7531$
(f) $\tan\theta = 0{,}8083$
(g) $\cos\theta = 0{,}5386$
(h) $\operatorname{sen}\theta = 0{,}9648$

27 En trigonometría se presentan a menudo cálculos que comprenden una gran cantidad de multiplicaciones y divisiones. Para facilitar estos cálculos, se han tabulado los logaritmos de las funciones circulares en la tabla III. Si bien los valores anotados son logaritmos (con las características incluidas), la forma de la tabla es la misma que la de la tabla I y se usa exactamente en la misma forma. Determínese log sen 36°17′.

Indicación: Puesto que 36°17′ está entre 36°10′ y 36°20′

$$\begin{aligned}\log \operatorname{sen} 36°17' &= \log \operatorname{sen} 36°10' + \tfrac{7}{10}(\log \operatorname{sen} 36°20' - \log \operatorname{sen} 36°10')\\ &= (9{,}7710 - 10) + \tfrac{7}{10}[(9{,}7727 - 10) - (9{,}7710 - 10)]\\ &= (9{,}7710 - 10) + \tfrac{7}{10}(0{,}0017)\\ &= (9{,}7710 - 10) + 0{,}0012\\ &= 9{,}7722 - 10.\end{aligned}$$

28 Utilizando la tabla III e interpolando si es necesario, determínese el valor de cada expresión siguiente:

(a) log sen 13°20′
(b) log cos 45°30′
(c) log sen 67°32′
(d) log cos 38°21′
(e) log tan 72°47′
(f) log sen 115°18′
(g) log cos 68°56′
(h) log sen 51°49′

29 Determínese el ángulo θ entre 0° y 90° si $\log \tan \theta = 0{,}1947$.

Indicación: 0,1947 se encuentra entre los valores dados en la columna «tangente»

$$\log \tan 57°20' = 0{,}1930 \quad \text{y} \quad \log \tan 57°30' = 0{,}1958$$

Luego,

$$\frac{r}{10} = \frac{0{,}1947 - 0{,}1930}{0{,}1958 - 0{,}1930},$$

o

$$r = 10(\tfrac{17}{28}) = 6.$$

de modo que $\theta = 57°26'$, aproximado al minuto más cercano

30 Determínese el valor de θ entre 0° y 90°, aproximado al minuto más cercano, utilizando la tabla III e interpolando si es necesario, si.

(a) $\log \operatorname{sen} \theta = 9{,}2870 - 10$
(b) $\log \cos \theta = 9{,}8365 - 10$
(c) $\log \tan \theta = 9{,}7353 - 10$
(d) $\log \cos \theta = 9{,}7316 - 10$
(e) $\log \operatorname{sen} \theta = 9{,}2278 - 10$
(f) $\log \tan \theta = 0{,}4937$
(g) $\log \cos \theta = 9{,}9797 - 10$
(h) $\log \operatorname{sen} \theta = 9{,}8761 - 10$

Utilizando logaritmos, calcúlese el valor de cada una de las expresiones siguientes con el número correcto de cifras significativas.

31 $\dfrac{32{,}86 \operatorname{sen} 27°42'}{\operatorname{sen} 54°17'}$.

Indicación: Sea x el valor pedido; entonces

$$x = \frac{32{,}86 \operatorname{sen} 27°42'}{\operatorname{sen} 54°17'}.$$

Tenemos

$$\log x = \log 32{,}86 + \log \operatorname{sen} 27°42' - \log \operatorname{sen} 54°17'.$$

Ordenando los cálculos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\log 32{,}86 &= \ \ 1{,}5167 \\
(+)\log \operatorname{sen} 27°42' &= \ \ \underline{9{,}6673 - 10} \\
\log \text{numerador} &= 11{,}1840 - 10 \\
(-)\log \operatorname{sen} 54°17' &= \ \ \underline{9{,}9095 - 10} \\
\log x &= \ \ 1{,}2745 \\
x &= 18{,}81.
\end{aligned}$$

32 $48{,}7 \tan 58°30'$

33 $\dfrac{68{,}2 \operatorname{sen} 37°20'}{\operatorname{sen} 49°50'}$

34 $897{,}2 \cos 63°48'$

35 $(189)(256) \cos 27°11'$

16.3. Utilización geométrica de los ángulos

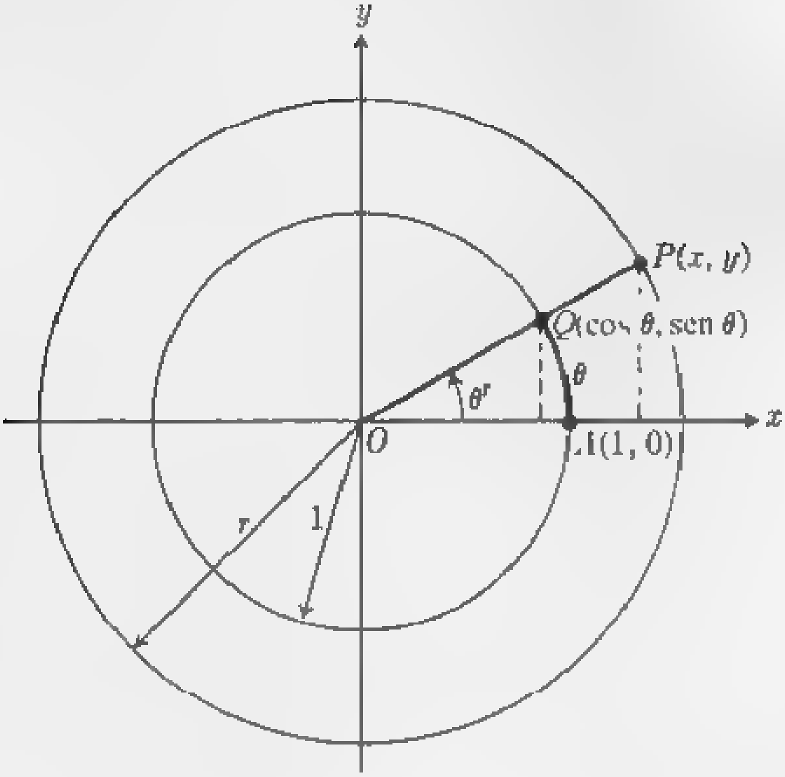
Consideremos la siguiente pregunta que surge en forma natural: ¿Qué interpretación geométrica puede darse a las funciones circulares de ángulos y cómo pueden utilizarse estas funciones?

Sea un *ángulo* θ, en posición normal, que ha sido generado por la rotación de un rayo de longitud r (fig. 15-4). Sean (x, y) las coordenadas de P, punto en el lado terminal del ángulo a distancia r del origen. Si Q es el punto de intersección de OP y la circunferencia unitaria, la longitud de OQ es uno y la del arco AQ es $|\theta|$ de modo que las coordenadas de Q son $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$. Si se bajan perpendiculares desde Q y P al eje x, se forman triángulos rectángulos semejantes, de modo que

$$\frac{x}{\cos \theta} = \frac{r}{1} \quad \text{e} \quad \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{r}{1}, \tag{16.8}$$

o sea, $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$.

Si P y, por tanto, Q están en un cuadrante distinto al primero, como en la fig. 16-5, una o las dos coordenadas de P pueden ser negativas, en cuyo caso las coordenadas correspondientes de Q tendrán los mismos signos, de modo que la ec. (16.8) será siempre válida. En esta forma, hemos demostrado el siguiente importante teorema:



16-4

TEOREMA 16.1 *Si $P(x, y)$ es un punto situado a la distancia del origen en el lado terminal de un ángulo θ, en posición normal, las coordenadas de P quedan dadas, en función de r y θ, por las expresiones*

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta. \tag{16.9}^*$$

Es interesante observar que si $r = 1$, $P(x, y)$ se encuentra en la circunferencia unitaria y coincide con Q, de modo que $x = \cos\theta$ e $y = \text{sen}\,\theta$, como era de esperar.

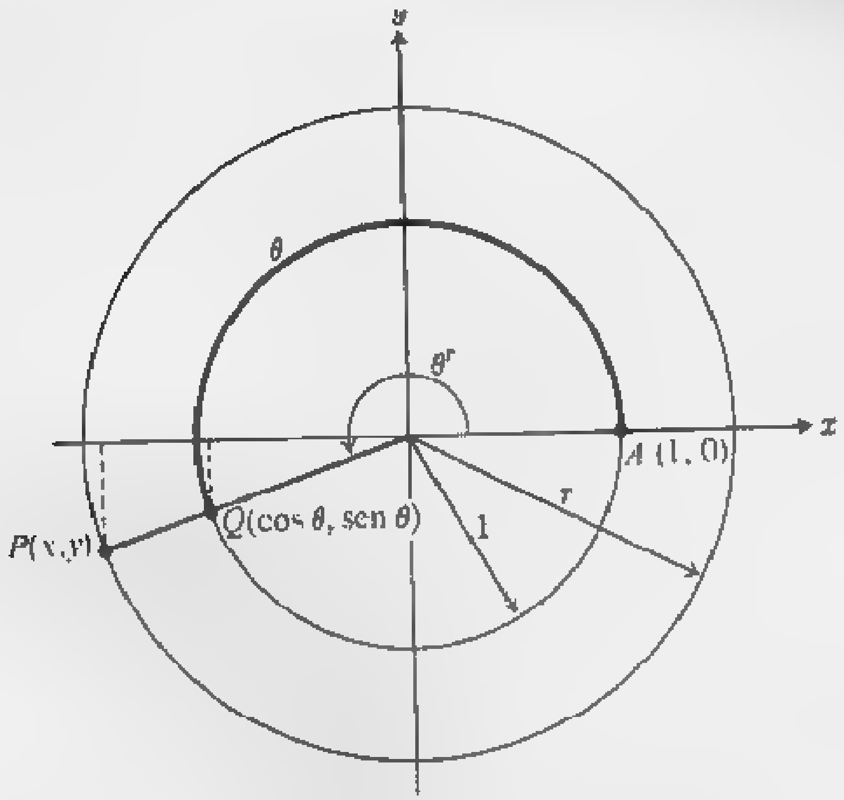
Como consecuencia del Teorema 16.1, demostraremos el siguiente teorema, cuyos resultados se toman frecuentemente como definiciones de las funciones circulares, cuando éstas se definen en función de un ángulo.

TEOREMA 16.2. *Si $P(x, y)$ es un punto situado a una distancia r del origen sobre el lado terminal de un ángulo θ, en posición normal, las funciones circulares del ángulo θ quedan dadas por las expresiones*

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r},$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0), \quad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0), \tag{16.10}$$

* Estas ecuaciones, con ciertas restricciones para θ, se conocen frecuentemente como las expresiones en coordenadas polares para x e y.



16-5

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0), \quad \csc\theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0).$$

Demostración: Puesto que $r \neq 0$, obtenemos las dos primeras expresiones directamente de la ec. (16.9). Puesto que, por la ec. (6.4), $\tan\theta \equiv \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$, tenemos $\tan\theta = (y/r)/(x/r) = y/x$. Las otras expresiones pueden establecerse en forma análoga utilizando las identidades para las funciones recíprocas, ecuaciones (6.11) a (6.13).

Ejemplo 3. Sea θ un ángulo en posición normal y tal que su lado terminal pasa por $(-3, 4)$. Determínese $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$

Solución: Puesto que $x = -3$ e $y = 4$, $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. Luego $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ y $\tan\theta = -\frac{4}{3}$. (Compárese con el ejemplo 1, sección 6.2).

En base del Teorema 16.1, parece apropiado hacer un comentario en relación con la representación gráfica de un par ordenado (x, y), ya sea que se le considere un punto, un vector o un número complejo como en el capítulo 7.

1) Si $P(x, y)$ se considera como punto del lado terminal de un ángulo θ en posición normal, puede ubicársele fácilmente utilizando el Teorema 16.1 (véase el problema 1.10).

2) En forma análoga, si (x, y) se considera como un vector ligado v (véase Definición 7.10), el ángulo de dirección de v, designado por θ, es el ángulo que el segmento entre $(0,0)$ y (x, y) forma con el eje x positivo (véanse los problemas 11 a 16).

3) También si (x, y) se considera como el número complejo $z = x + yi$, el punto puede diagramarse en el plano complejo y, de nuevo, su ángulo de dirección está en posición normal, con OP en su lado terminal y con su lado inicial a lo largo del eje x positivo. Como se recordará, esta representación corresponde al diagrama de Argand

Todo punto $P(x, y)$ en el plano complejo, que no sea el (0, 0), se encuentra en alguna circunferencia con centro (0, 0) y radio r, con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sea θ el ángulo en posición normal con OP como lado terminal (véase fig. 16-6), de modo que $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ Así, el número complejo $z = x + yi$, puede escribirse en forma trigonométrica como

$$x + yi = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta). \tag{16.11}*$$

Como $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$ son ambos periódicos, de periodo $2\pi = 360°$, para $r > 0$ y todo entero k,

$$r[\cos(\theta + k360°) + i\,\text{sen}(\theta + k360°)] \tag{16.12}$$

es también una forma trigonométrica para $x + yi$. Observemos que r debe ser mayor que cero. Como se recordará, el valor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ se llama *valor absoluto* o *módulo* de $x + yi$ El ángulo θ se llama *amplitud* o *argumento* de $x + yi$.

EJEMPLO 2. Exprésese el número $-2 - 2i$ en forma trigonométrica.

Solución: Ubicando el punto $(-2, -2)$ que corresponde a $-2 - 2i$ (véase fig. 16-7), tenemos

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

y $\tan\theta = 1$, con el lado terminal de θ en el tercer cuadrante: luego

$$\theta = 225° \quad \text{y} \quad -2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°).$$

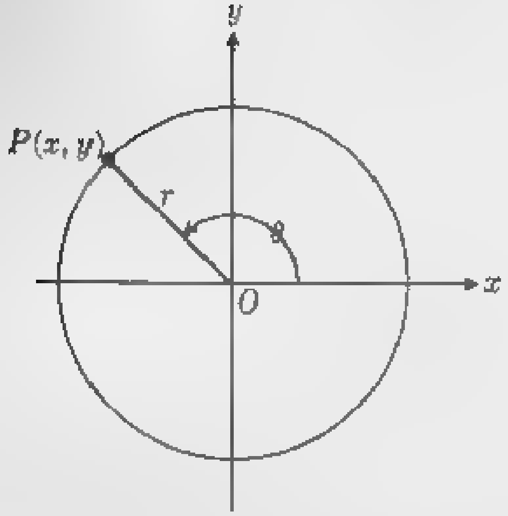
EJEMPLO 3. Exprésese el número complejo $3(\cos 150° + i\,\text{sen}\,150°)$ en la forma $x + yi$.

Solución: En el lado terminal del ángulo de 150° en posición normal, ubíquese el punto P a tres unidades del origen, como en la fig. 16-8. Como $P(x, y)$ representa el número complejo, tenemos

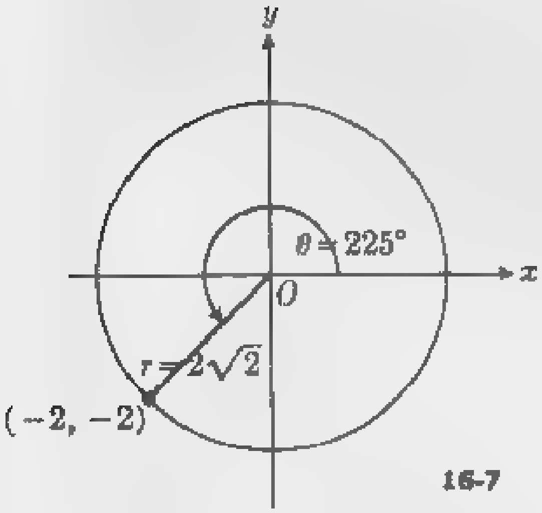
$$x = 3\cos 150° = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad y = 3\,\text{sen}\,150° = \frac{3}{2}.$$

---

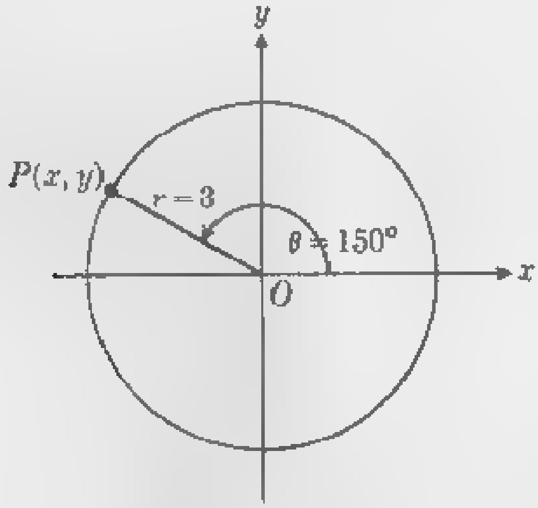
* La forma $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ se abrevia como $r\,\text{cos}\,\theta$



16-6



16-7



Por tanto,

$$3(\cos 150 + i \operatorname{sen} 150) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Una de las ventajas de la representación trigonométrica de los números complejos está en la facilidad que proporciona en la obtención de productos. Si $r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ representan dos números complejos, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 16.3. *El módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de los módulos y la amplitud es igual a la suma de las amplitudes.*

Demostración:

$$\begin{aligned}
&r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)\\
&\quad = r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + i^2\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)\\
&\quad = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)]\\
&\quad = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)]. \qquad (16.13)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Encuéntrese el número complejo w, que es el producto de los dos números complejos $z = x + yi = (x, y)$ e $i = (0, 1)$. Demuéstrese que, con la interpretación vectorial, w es un vector perpendicular a z y de la misma magnitud.

Solución: La primera parte de este ejemplo se puede resolver por tres métodos.

(a) Usando sólo álgebra, tenemos

$$w = i(x + yi) = xi + i^2y = -y + xi.$$

(b) De la Definición 7.4,

$$w = (0, 1) \cdot (x, y) = (0x - 1y,\ 0y + 1x) = (-y, x).$$

(c) Escribiendo cada uno de los números complejos en forma trigonométrica, obtenemos

$$i = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ \quad \text{y} \quad x + yi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Utilizando el Teorema 16.3, tenemos

$$\begin{aligned} w &= r[\cos(\theta + 90^\circ) + i \operatorname{sen}(\theta + 90^\circ)] \\ &= r(-\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta) = -y + xi. \end{aligned}$$

Para hacer ver que w es perpendicular a z y que tiene la misma magnitud, basta observar la primera expresión para w en (c). De hecho, esto indica que la multiplicación por i corresponde a una rotación antihoraria en 90° del número complejo con respecto al origen.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas siguientes, el lado terminal de un ángulo en posición normal pasa por el punto indicado. Diagrámense y calcúlense las funciones circulares de cada ángulo.

1 $(3, 4)$

2 $(-5, 12)$

3 $(-4, 3)$

4 $(24, -7)$

5 $(-8, -15)$

6 $(10, -8)$

7 $(0, -2)$

8 $(-1, 7)$

9 $(6, 0)$

10 Demuéstrese que, para todo ángulo θ en posición normal y tal que su lado terminal

corta a la circunferencia, de radio r y centro en el origen, en el punto P, las coordenadas de P son $(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$. Este es un concepto de gran importancia.

11 Encuéntrese el ángulo de dirección de cada uno de los vectores descritos en los problemas 1 a 6, sección 7.4.

12 Encuéntrese el ángulo de dirección de cada uno de los vectores descritos en los problemas 7 y 8, sección 7.4.

Encuéntrense, en forma de par ordenado, los vectores que tienen norma y ángulo de dirección dados en los problemas 13 a 16. Represéntese cada vector gráficamente.

13 $|\mathbf{v}| = 1,\ \theta = 30°$ 14 $|\mathbf{v}| = 4,\ \theta = 135°$
15 $|\mathbf{v}| = 8,\ \theta = 270°$ 16 $|\mathbf{v}| = 5,\ \theta = 120°$

17 Ubíquese el punto que representa gráficamente cada uno de los números complejos siguientes. Obténgase la forma trigonométrica de cada uno, utilizando el mínimo valor positivo (o cero) para su argumento.

(a) 2 (b) -2
(c) $3i$ (d) $-i$
(e) $2 - 2i$ (f) $-2 + 2i$
(g) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ (h) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Exprésese cada uno de los siguientes en la forma $x + yi$.

18 (a) $3(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$ (b) $2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$
(c) $\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°$ (d) $2(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$

19 (a) $2(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$ (b) $8(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$
(c) $4(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$ (d) $6(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

Efectúense las multiplicaciones indicadas expresando los resultados finales en la forma $x + yi$. Verifíquense estos resultados expresando cada uno de los factores en la forma $x + yi$ y en seguida efectuando las multiplicaciones algebraicamente.

20 (a) $3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) \cdot 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$
(b) $4(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) \cdot 2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

21 (a) $3(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) \cdot 4[\cos(-45°) + i \operatorname{sen}(-45°)]$
(b) $[2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)]^3$

22 Demuéstrese que el cuociente de dos números complejos $r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ está dado por

$$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{16.14}$$

23 Utilícese la ec. (16.14) para efectuar las siguientes divisiones. Verifíquese como en los problemas 20 y 21.

(a) $4(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) \div 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$
(b) $6(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) \div 3(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$

24 Demuéstrese que el recíproco de $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es

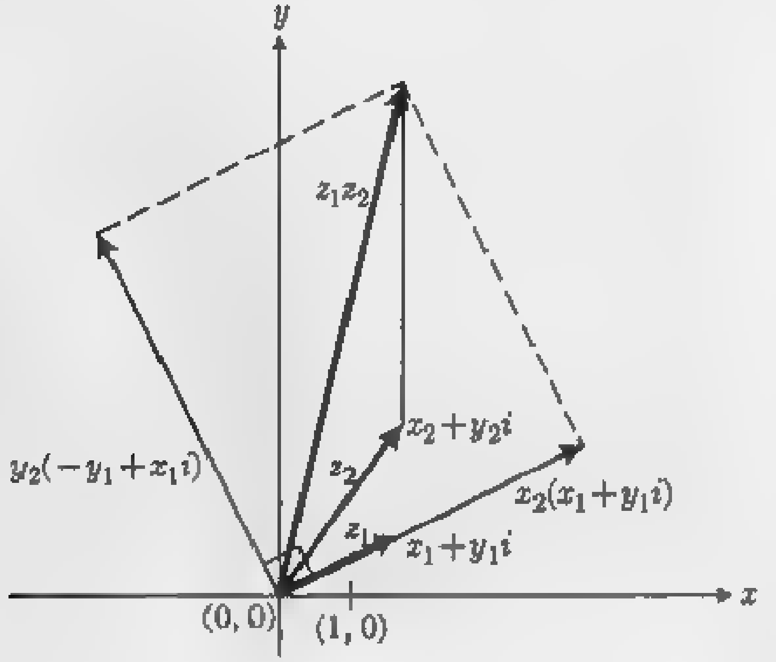
$$\frac{1}{r}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta).$$

25 Demuéstrese que $[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$.

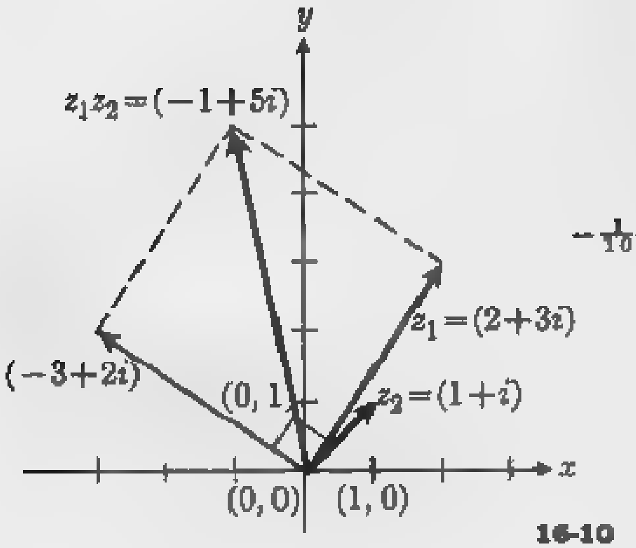
Hemos observado que la representación gráfica es la misma para un vector geométrico que para un número complejo. Esto también es válido para sumas y diferencias.

26 (a) Explíquese por qué la última proposición en la solución del ejemplo 4, multiplicación de $z = (x, y)$ por i, es también equivalente a una rotación antihoraria del vector correspondiente $\mathbf{v} = (x, y)$ en un ángulo de 90°.

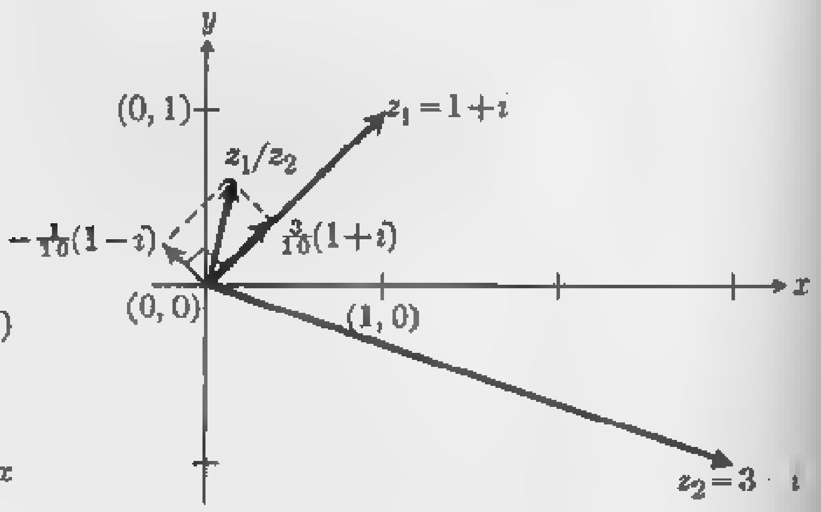
(b) Si el vector representado por el par ordenado (x, y) se rota en sentido antihorario en un ángulo α, indíquese la representación como par ordenado del vector resultante si $\alpha = 90°, 180°, -90°$. Represéntese cada uno gráficamente.



16-9



16-10



16-11

27 (a) Demuéstrese que el producto de dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ puede escribirse como la suma de dos números complejos, es decir,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \\ &= x_2(x_1 + y_1 i) + y_2(-y_1 + x_1 i). \end{aligned} \tag{16.15}$$

(b) Si escribimos el resultado de (a) en términos de pares ordenados, $x_2(x_1, y_1) + y_2(-y_1, x_1)$ y consideramos esta expresión como la suma (o resultante) de dos vectores, dese una interpretación geométrica para el producto de dos numeros complejos en términos de sus vectores correspondientes. Véase la fig. 16-9

28 Exprésense los siguientes productos de vectores como suma de dos números complejos, como se indica en el problema 27 Muéstrense los resultados gráficamente. La figura 16-10 ilustra la parte (a).

(a) $z_1 z_2 = (2 + 3i)(1 + i)$, (b) $z_1 z_2 = (-2 + i)(3 - 2i)$.
(c) $z_1 z_2 = (2, 3)(1, 4)$.

29 (a) Demuéstrese que el cuociente de dos numeros complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$ puede escribirse como la suma de dos números complejos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}(x_1 + y_1 i) + \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}(y_1 - x_1 i). \tag{16.16}$$

(b) Indíquese una interpretación geométrica para el cuociente de dos números complejos en términos de sus vectores correspondientes. Véase la fig. 16-11

30 Exprésense los cuocientes siguientes como suma de dos números complejos, como se indica en el problema 29 Represéntense los resultados gráficamente La fig. 16-11 muestra la parte (a).

(a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+i}{3-i}$ (b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1+4i}{2-3i}$ (c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-2+i}{3-2i}$

16.4. Potencias y raíces de números complejos

En la sección 16.3 obtuvimos una expresión para el producto de dos números complejos en forma trigonométrica; utilizando la ec. (16 13), obtenemos en forma inmediata

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta),$$

y en seguida,

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^3 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta).$$

Demostraremos, por inducción matemática, un teorema general conocido como teorema de De Moivre, en honor de su autor Abraham De Moivre (1667-1754).

TEOREMA 16.4. *Para todo entero positivo n,*

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta), \tag{16.17}$$

Este teorema es válido para exponentes racionales, irracionales y aun complejos, pero lo utilizaremos sólo en el caso de valores enteros.

Demostración: Parte (a). Verificación. Al comienzo de la presente sección quedó verificada la validez del teorema para $n = 2$ y $n = 3$; para $n = 1$, la ec. (16.17) es una identidad. Parte (b). Partiendo de

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^k = r^k(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta), \tag{16.18}$$

debemos demostrar

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{k+1} = r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta]. \tag{16.19}$$

Multiplicando ambos miembros de la ec. (16-18) por $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, tenemos

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{k+1} = r^k(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

y, por la ec. (16.13),

$$\begin{aligned}[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{k+1} &= r^{k+1}[\cos(k\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(k\theta + \theta)] \\ &= r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta],\end{aligned}$$

que es exactamente la ec. (16.19). La parte (c) es inmediata.

EJEMPLO 1. Demuéstrese que $z^3 = 1$ si $z = -\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$.

Solución. Escribiendo z en forma trigonométrica, tenemos

$$z = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ.$$

Luego,

$$\begin{aligned}z^3 &= (\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)^3 = \cos 3(120^\circ) + i \operatorname{sen} 3(120^\circ) \\ &= \cos 360^\circ + i \operatorname{sen} 360^\circ = 1.\end{aligned}$$

Una de las aplicaciones más importantes de la ec. (16.17) está en la determinación de raíces de números complejos. En los desarrollos que siguen debe tenerse presente que, para r positivo, $\sqrt[n]{r}$ representa la raíz n-ésima principal de r, esto es, la única raíz n-ésima de r que es real y positiva.

EJEMPLO 2. Determínense las tres raíces cúbicas de $-2 - 2\sqrt{3}i$.

Solución: Debemos encontrar valores de r y θ tales que

$$[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^3 = -2 - 2\sqrt{3}i.$$

Aplicando el Teorema 16.4 y expresando $-2 - 2\sqrt{3}i$ en forma trigonométrica, obtenemos

$$r^3(\cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta) = 4(\cos 240^\circ + i\,\mathrm{sen}\,240^\circ)$$

Si dos números complejos son iguales, sus modulos deben ser iguales y sus argumentos deben tambien ser iguales o diferenir en un multiplo entero de 360°. Luego,

$$r^3 = 4 \quad \text{y} \quad 3\theta = 240^\circ + k360^\circ,$$

o

$$r = \sqrt[3]{4} \quad \text{y} \quad \theta = 80^\circ + k120^\circ,$$

donde k es cualquier entero positivo, negativo o cero. Por tanto, $r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ será

$$\begin{array}{lll} \sqrt[3]{4}(\cos 80^\circ + i\,\mathrm{sen}\,80^\circ) & \text{para} & k = 0, \\ \sqrt[3]{4}(\cos 200^\circ + i\,\mathrm{sen}\,200^\circ) & \text{para} & k = 1, \\ \sqrt[3]{4}(\cos 320^\circ + i\,\mathrm{sen}\,320^\circ) & \text{para} & k = 2. \end{array}$$

Estos tres valores son diferentes entre si y representan las tres raices cúbicas de $-2 - 2\sqrt{3}i$. Para cualquier otro valor entero de k, la expresión que se obtiene se reduce a uno de estos tres valores, de modo que éstas son las únicas raíces cúbicas de $-2 - 2\sqrt{3}i$.

Un número complejo tiene tres y sólo tres raices cubicas, cuatro y sólo cuatro raices cuartas y, en general, n y solo n raices n-esimas. Si queremos expresar nuestras respuestas en la forma $x + yi$, nos bastará tomar de las tablas el valor de $\sqrt[3]{4}$ y los valores de las funciones de 80°, 200° y 320°.

Veamos ahora el teorema general sobre las raices de un numero complejo.

TEOREMA 16.5. *Para todo número complejo $r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y todo entero positivo n,*

$$\sqrt[n]{r}(\cos\theta k + i\,\mathrm{sen}\,\theta k), \tag{16.20}$$

donde

$$\theta k = \frac{\theta + k360^\circ}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1),$$

representa las n distintas raíces n-ésimas de $r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Demostración: Para demostrar que la ec. (16.20) es una raíz n-ésima de $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ para cada k, es suficiente elevarla a la potencia n-ésima utilizando la ec. (16.17).

$$\begin{aligned}[\sqrt[n]{r}(\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)]^n &= r(\cos n\theta_k + i \operatorname{sen} n\theta_k)\\ &= r[\cos(\theta + k360°) + i \operatorname{sen}(\theta + k360°)]\\ &= r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).\end{aligned}$$

Observemos, además, que los n números complejos dados por la ec. (16.20) para los n distintos valores de k son diferentes, ya que no hay dos de estos números cuyos argumentos difieran en un múltiplo entero de 360°

La ec. (16.20) permite determinar directamente las n raíces n-ésimas de un número complejo cualquiera.

Problemas

Escríbase cada una de las expresiones en los problemas 1 a 7 en la forma $x + yi$.

1 $[2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)]^6$

2 $[3(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)]^5$

3 $[2(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)]^3$

4 $[(\cos 36° + i \operatorname{sen} 36°)]^{10}$

5 $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5$

6 $(1 - i)^8$

7 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{200}$

Determínense y represéntense gráficamente las raíces indicadas en los problemas 8 a 15.

8 Raíces cuadradas de $4 + 4\sqrt{3}i$.

9 Raíces cuadradas de $-16i$.

10 Raíces cúbicas de 1.

11 Raíces cúbicas de -8.

12 Raíces cuartas de $4 - 4\sqrt{3}i$.

13 Raíces cuartas de $16(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$.

14 Raíces cúbicas de $8(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

15 Raíces décimas de 1. Compárese la figura con la fig. 6-14.

Resuélvanse las ecuaciones en los problemas 16 a 19 expresando las raíces en la forma $x + yi$ y representándolas gráficamente.

16 $z^6 = 64$

17 $z^4 = 1$

18 $z^3 + i = 0$

19 $z^5 + 32 = 0$

16.5. Explicación general de la resolución de triángulos

En relación con la resolución de triángulos ha cambiado en los últimos años todo el enfoque del problema. Tradicionalmente, se habia considerado que un gran número de métodos numéricos, numerosas fórmulas y un estudio detallado con muchos ejercicios constituían una parte importante de la trigonometría. Recientemente, sin embargo, ha adquirido mayor importancia la parte analítica de la trigonometría con sus aplicaciones a las matemáticas superiores y la ciencia en general.

Los nuevos desarrollos han dado origen a métodos gráficos de gran exactitud y han hecho posible, además, la utilización de calculadoras numéricas de alta velocidad. En nuestro estudio, concentraremos nuestra atención en los teoremas fundamentales y no insistiremos en procedimientos largos y detallados.

Si de un triángulo se conoce cierto número de sus lados y ángulos, se puede resolver el triángulo determinando los lados y ángulos restantes. Deduciremos dos de las muchas fórmulas utilizadas en la resolución de triángulos y consideraremos algunos casos especiales de estas fórmulas. En los ejemplos y problemas aparecerán otras fórmulas y relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Al deducir estas relaciones es importante recordar que un triángulo está determinado cuando (1) se dan un lado y dos ángulos, (2) se dan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, (3) se dan los tres lados, siendo el mayor de ellos menor que la suma de los otros dos. Además, puede haber a lo más dos triángulos cuando (4) se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Estos son los cuatro tipos de problemas que analizaremos. Denotaremos los ángulos de un triángulo ABC por α, β y γ, respectivamente, y los lados opuestos correspondientes por a, b y c.

16.6. El teorema de los senos

Deduzcamos el primero de los dos teoremas generales, el teorema de los senos. Este teorema relaciona los lados de un triángulo y los senos de sus ángulos y lo demostraremos mediante métodos analíticos. Eligiendo el sistema de coordenadas de modo que el ángulo α del triangulo ABC esté en posición normal (véase fig. 16-12), las coordenadas de B son $(c \cos \alpha, c \operatorname{sen} \alpha)$. (Recuérdese el problema 10, sección 16.3 o el Teorema 16.4.) Si, en cambio, el origen del sistema está en C con el ángulo $(180° - \gamma)$ en posición normal, las coordenadas de B son

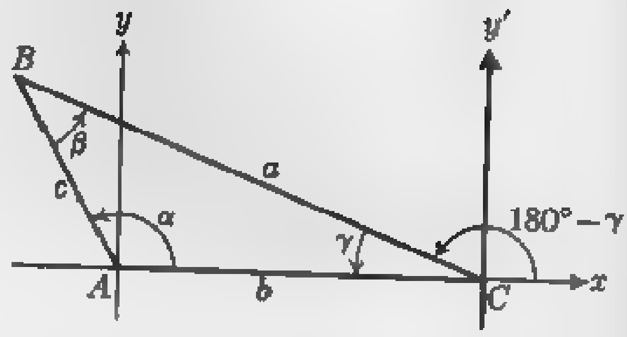
$$[a \cos (180° - \gamma),\ a \operatorname{sen} (180° - \gamma)].$$

Puesto que, en ambos casos, las ordenadas de B son iguales (iguales distancias el eje x), tenemos

$c \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen}(180° - \gamma) = a \operatorname{sen} \gamma.$

Dividiendo esta igualdad por sen α sen γ, obtenemos

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha}.$$



16-12

Eligiendo en forma diferente el eje x obtenemos $b/\operatorname{sen} \beta = a/\operatorname{sen} \alpha$, con lo cual completamos la demostración del siguiente teorema:

TEOREMA 16.6. *En todo triángulo de ángulos α, β y γ y lados opuestos correspondientes a, b y c se verifica la siguiente relación:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}. \tag{16.21}$$

Esta relación nos permite resolver los problemas mencionados en (1) y (4) de la sección 16.5. Sin embargo, antes de aplicar la ec. (16.21) a la resolución de problemas generales, consideremos un caso especial de suma importancia. Los problemas más generales serán estudiados en la sección 16.9.

16.7. Resolución de triángulos rectángulos

Si γ es un ángulo recto, esto es, $\gamma = 90°$, la ec. (16.21) se reduce a sen $\alpha = a/c$ y sen $\beta = b/c$. Además, de $\gamma = 90°$ y $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, resulta $\beta = 90° - \alpha$ de modo que cos $\alpha = b/c$ y, puesto que tan α = sen α/cos α, tenemos también tan $\alpha = a/b$. En estas condiciones, resulta el siguiente corolario que también podría considerarse como una consecuencia directa de las definiciones originales de estas funciones circulares.

COROLARIO 6.6. *En todo triángulo rectángulo con $\gamma = 90°$,*

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \tag{16.22}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \tag{16.23}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} \tag{16.24}$$

Las siguientes observaciones sobre cifras significativas serán también de utilidad en la resolución de triángulos.

1. Los resultados no pueden ser mas exactos que los lados y ángulos dados. Convendremos en establecer la siguiente tabla de exactitud.

Número de cifras significativas para los lados:	Angulos aproximados a:
2	grado
3	diez minutos
4	minuto
5	décimo de minuto

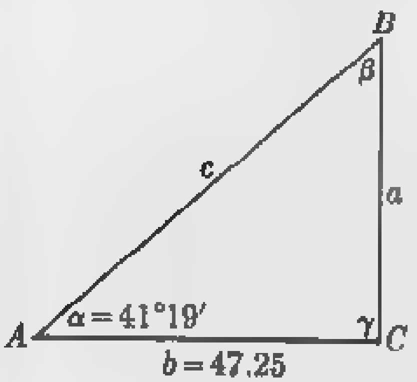
2. Si los resultados se necesitan con sólo dos o tres cifras significativas, los cálculos pueden hacerse con regla de cálculo. Además, la regla de cálculo puede utilizarse como medio de comprobación, a menos que los resulta os deban ser de una exactitud mayor que la que se pue a obtener en esta forma.

3. Si los resultados se necesitan con más cifras significativas, deben emplearse tablas. Si se dispone de máquinas calculadoras, se emplean generalmente las funciones naturales y métodos aritméticos; pero, dado que la mayoria de los estudiantes no tienen acceso a estas máquinas, el método lógico es el logarítmico. Este es el método utilizado en la mayoria de los ejemplos.

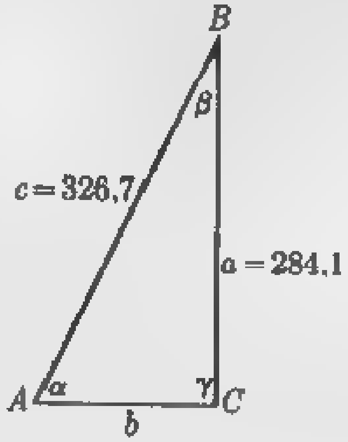
4. Al resolver un problema, es conveniente dibujar el triángulo, indicar las partes conocidas y hacer un plan general completo y sistemático de todo el proceso de resolución antes de efectuar los cálculos numéricos.

Ejemplo 1. En el triángulo rectángulo ABC, $b = 47{,}25$, $\alpha = 41°19'$. Determínense las partes restantes y el área.

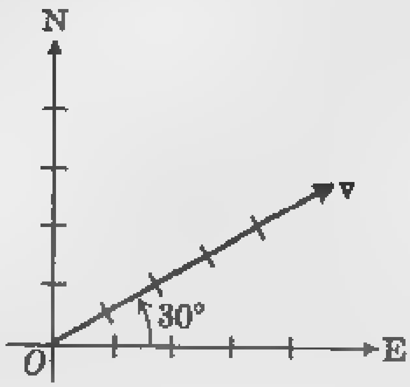
Solución: Primeramente, dibujamos el triángulo indicando los valores de los datos dados, fig. 16-13. Entonces, $\beta = 90° - \alpha = 48°41'$. Para determinar a, partimos de $\tan \alpha = a/b$ y para determinar c, de $\cos \alpha = b/c$:



16-13



16-14



16-15

$$a = 47{,}25 \tan 41°19' \qquad c = \frac{47{,}25}{\cos 41°19'}$$

$$\begin{array}{rrl} \log 47{,}25 = & 1{,}6744 & \\ (+)\ \log \tan 41°19' = & 9{,}9440 - 10 & \\ \hline \log a = & 11{,}6184 - 10 & \\ a = & 41{,}54 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} \log 47{,}25 = & 11{,}6744 - 10 \\ (-)\ \log \cos 41°19' = & 9{,}8757 - 10 \\ \hline \log c = & 1{,}7987 \\ c = & 62{,}90 \end{array}$$

El área del triángulo es $K = \frac{1}{2}ab$.

$$\begin{array}{rl} \log 41{,}54 = & 1{,}6184 \\ (+)\ \log 47{,}25 = & 1{,}6744 \\ \hline \log ab = & 3{,}2928 \\ (-)\ \log 2 = & 0{,}3010 \\ \hline \log K = & 2{,}9918 \\ K = & 981{,}2 \end{array}$$

Los resultados se indican con cuatro cifras significativas, al igual que en la tabla III.

EJEMPLO 2. Resuélvase el triángulo rectángulo en el cual $a = 284{,}1$ y $c = 326{,}7$.

Solución: Dibújese el triángulo e indíquense los valores de los datos dados, fig. 15-8. Puesto que a y c están dados, utilizamos la relación sen $\alpha = a/c$ para determinar α y luego cos $\alpha = b/c$ para determinar b:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{284{,}1}{326{,}7} \qquad b = 326{,}7 \cos 60°24''$$

$$\begin{array}{rl} \log 284{,}1 = & 12{,}4534 - 10 \\ (-)\ \log 326{,}7 = & 2{,}5141 \\ \hline \log \operatorname{sen} \alpha = & 9{,}9393 - 10 \\ \alpha = & 60°24' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log 326{,}7 = & 2{,}5141 \\ (+)\ \log \cos 60°24' = & 9{,}6937 - 10 \\ \hline \log b = & 12{,}2078 - 10 \\ b = & 161{,}4 \end{array}$$

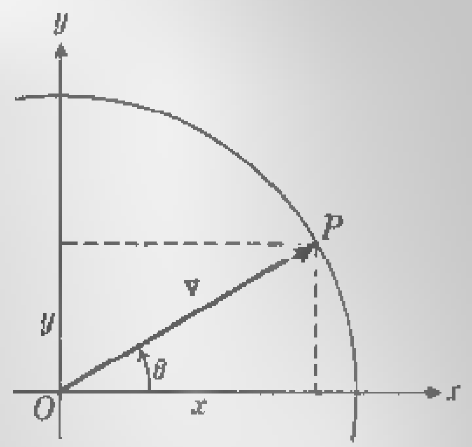
Log cos α puede encontrarse en la tabla al mismo tiempo que log sen α. Esta es una de las ventajas que se obtienen ordenando sistematicamente el cálculo numérico.

Vectores. En ciencia e ingeniería, para determinar completamente algunas entidades físicas tales como velocidad, aceleración y fuerza es necesario conocer no solamente su magnitud, sino también su dirección y sentido. Las entidades de este tipo se representan mediante segmentos rectilíneos con una flecha en un extremo, la cual indica su sentido. La longitud del segmento, referida a cierta escala, indica la magnitud. Estos segmentos reciben el nombre de *vectores*.

Por ejemplo, con una escala de 40 kilogramos por unidad de longitud, el vector de la fig. 16-15 representa una fuerza de 200 kilogramos actuando en una dirección que forma un ángulo de 30° con el semieje x.

Puesto que $\mathbf{v}$, con su punto inicial u origen en 0 como en la fig. 16-16, tiene longitud $|\mathbf{v}|$ y forma un ángulo θ con el semieje x positivo, su punto terminal P tiene por coordenadas $(|\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta)$. Estas coordenadas, que se designan por x e y, respectivamente, se llaman componentes o proyecciones de $\mathbf{v}$ sobre los ejes coordenados y satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} x &= |\mathbf{v}| \cos \theta, \\ |\mathbf{v}^2| &= x^2 + y^2, \\ y &= |\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta, \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned} \qquad (16\text{–}25)$$



16-16

Ejemplo 3 Determínense x e y para el vector con $|\mathbf{v}| = 247$ y $\theta = 37°40'$.

Solución:

$$x = 247 \cos 37°40' = (247)(0{,}7916) = 196,$$
$$y = 247 \operatorname{sen} 37°40' = (247)(0{,}6111) = 151.$$

Considerando los vectores x_i e y_j, podemos imaginar a $\mathbf{v}$ como un vector único equivalente a estos dos. En forma más general, un vector $\mathbf{v}$ es la resultante o suma de dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ que, considerado como una fuerza única, produciría el mismo efecto de las dos fuerzas actuando juntas. (Recuérdese (4g) y problema 23, sección 7.4.) Esta noción se utiliza por primera vez en el problema 22.

Problemas

En la resolución de los problemas, utilícese, si es posible, una máquina calculadora para efectuar algunos de los cálculos; para los otros, utilícense logaritmos. Todas las soluciones deben comprobarse.

1 Determínense los lados y ángulos no conocidos de cada uno de los siguientes triángulos para los cuales se tiene en cada caso $\gamma = 90°$:

(a) $\alpha = 37°20'$, $a = 243$
(b) $\alpha = 62°40'$, $b = 796$
(c) $a = 3{,}28$, $b = 5{,}74$
(d) $b = 68{,}4$, $c = 96{,}2$
(e) $\beta = 51°10'$, $c = 0{,}832$
(f) $\alpha = 37°40'$, $a = 54{,}8$
(g) $a = 37{,}9$, $b = 57{,}3$
(h) $\beta = 41°25'$, $c = 3265$
(i) $a = 5429$, $c = 6294$
(j) $a = 3{,}273$, $b = 7{,}647$
(k) $\beta = 62°57'$, $a = 0{,}8263$
(l) $\beta = 47°23'$, $b = 72{,}55$
(m) $b = 3572$, $c = 4846$
(n) $\alpha = 24°47'$, $b = 318{,}4$

2 En una circunferencia de radio 96,4 cm, ¿cuánto mide el ángulo del centro que subtiende una cuerda de 40,3 cm?

3 Un sitio rectangular mide 102 por 296 m. Determínense la longitud de la diagonal y el ángulo que ésta forma con el lado mayor.

4 Un poste de telégrafo está sujeto al suelo mediante alambres amarrados al poste a una altura de 5,7 m de la base de éste. Determínese la longitud de un alambre si éste forma un ángulo de 26°20' con la vertical.

5 Determínese el área de un paralelogramo cuyos lados miden 33,7 y 15,2 cm si el ángulo entre ambos mide 67°40'.

6 Uno de los lados iguales de un triángulo isósceles mide 6,73 cm y uno de los ángulos basales mide 27°10'. Determínense la base y la altura.

7 Para alcanzar la cima de un muro de 8 m de altura se utiliza una escalera de 10 m. Si la escalera se extiende 50 cm más allá del muro, determínese su inclinación respecto a la horizontal.

8 Una fuente de forma hemisférica de radio interior 20 cm y de diámetro basal superior horizontal se llena con agua hasta una profundidad de 5 cm. ¿En qué ángulo puede inclinarse sin que el agua se derrame?

9 Un trozo de alambre de 24,78 m de largo se dobla en forma de triángulo isósceles con un ángulo igual a 97°26'. Determínese la longitud de cada lado del triángulo.

10 Desde un punto a nivel del suelo y a una distancia de 45,74 m del pie de un mástil, el *ángulo de elevación* del extremo superior del mástil es 31°46'. ¿Qué altura tiene el mástil?

Indicación. Cuando el objeto observado está sobre el plano horizontal, el ángulo entre la visual dirigida hacia el objeto y la horizontal se llama *ángulo de elevación;* si el objeto está bajo el plano horizontal, el ángulo se llama *ángulo de depresión.*

11 Desde un faro situado a 23,50 m sobre el nivel del agua, el ángulo de depresión de un bote es 23°40'. ¿A qué distancia está el bote del punto situado a nivel del agua y directamente bajo el punto de observación?

12 Determínese la altura a que se encuentra un globo directamente sobre una ciudad A si el ángulo de depresión de la ciudad B, situada a 10,25 km de A, es 15°20'.

13 Desde una torre de observación de 25 m de alto, un hombre observa desde una posición situada 2 m bajo el extremo superior de la torre que el ángulo de elevación de la copa de un árbol es 12°40' y que el ángulo de depresión de su base es 72°20'. Si las bases de la torre y del árbol están a un mismo nivel horizontal, ¿cuál es la altura del árbol?

14 Desde un punto situado a 6,25 m sobre la superficie del agua, el ángulo de elevación

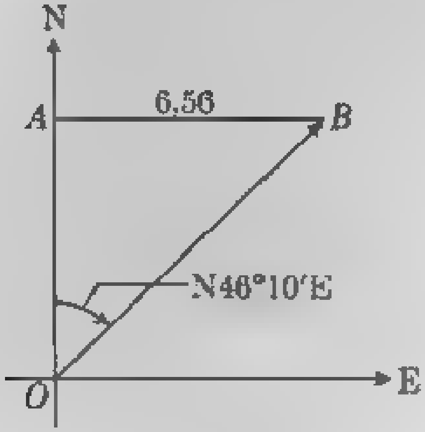
de un edificio a la orilla del agua es 38°16′, en tanto que el ángulo de depresión de su imagen en el agua es 56°28′. Determínense la altura del edificio y la distancia horizontal desde el punto de observación.

15 Desde un cerro de 540 m de altura, el ángulo de depresión de un punto en la ribera más cercana de un río es 48°40′ y el del punto en la ribera opuesta directamente frente al anterior es 22°20′. ¿Qué anchura tiene el río entre estos dos puntos?

16 Desde cierto punto el ángulo de elevación de la cumbre de un monte es 40°20′. Desde un punto situado 2850 m más lejos del cerro y en el mismo plano horizontal, el ángulo de elevación es 29°50′. Determínese la altura del monte sobre el plano horizontal.

17 El faro B se encuentra 9,84 km directamente al este del faro A. Un barco en O observa que el faro A se encuentra directamente al norte y que la demarcación de OB es N 46°10′ E. ¿A qué distancia se encuentra el barco de A? ¿De B?

Indicación: La *demarcación* de una línea en un plano horizontal es el ángulo agudo que esta línea forma con el eje norte-sur. Cuando se da la demarcación de una línea, se antepone al valor del ángulo la letra N (norte) o S (sur) y se escribe después del valor la letra E (este) u O (oeste). En esta forma, en la fig. 16-17, la demarcación de OB se lee «norte 46°10′ este».



16-17

18 Un avión se encuentra 180 km al este de una radioestación A y una segunda radioestación está 215 km al norte de A. ¿Cuál es la distancia y la demarcación de la segunda estación con respecto al avión?

19 A causa del viento, un barco de vela navega 1576 m en dirección S 47°29′ O. ¿Cuánto ha navegado hacia el sur? ¿Cuánto hacia el oeste?

20 Determínense x e y para cada uno de los vectores para los cuales v y θ están dados por:

(a) $|\mathbf{v}| = 75$, $\theta = 60°$ (b) $|\mathbf{v}| = 48$, $\theta = 136°$
(c) $|\mathbf{v}| = 4{,}72$, $\theta = 217°10'$ (d) $|\mathbf{v}| = 58{,}47$, $\theta = 47°18'$

21 Determínense la longitud y la dirección de cada vector si

(a) $x = 3$, $y = 4$ (b) $x = 23$, $y = 45$
(c) $x = -16{,}2$, $y = 28{,}7$ (d) $x = 382{,}4$, $y = -768{,}3$

22 Si una fuerza de 658,4 kg actúa hacia el este y una fuerza de 316,2 kg actúa hacia el norte, ¿qué magnitud y dirección tiene la resultante?

23 Un globo se eleva a la velocidad de 4 m/seg y al mismo tiempo es empujado horizontalmente por el viento a 6 m/seg. Determínese el ángulo que su trayectoria forma con la vertical y su velocidad real.

24 Un río corre directamente hacia el este a una velocidad de 1,92 km/h. Si un nadador puede nadar a 2,63 km/h en agua quieta y comienza a cruzar el río nadando directamente hacia el norte, ¿en qué dirección se mueve en realidad? ¿En qué punto llega a la ribera opuesta si el río tiene una milla de anchura?

25 ¿En qué dirección debiera orientarse el nadador del problema 24 para alcanzar la ribera opuesta en el punto situado directamente frente al punto de partida?

26 Un avión viaja a 232 km/h en aire en calma. El viento sopla a una velocidad de 37 km/h desde la dirección N 27° E.

(a) Si el avión lleva rumbo N 63° O, determínense la magnitud de la velocidad y la dirección del avión con relación al suelo.
(b) ¿En qué rumbo debe orientarse el avión para volar en dirección N 63° O y cuál sería en ese caso su velocidad real en el aire?

27 Determínese la resultante de cada uno de los siguientes conjuntos de fuerzas, siendo $\mathbf{f}_i$ la magnitud y θ el ángulo que cada fuerza forma con el semieje x positivo.

(a) $|\mathbf{f}_1| = 15$, $\theta_1 = 65°$, $|\mathbf{f}_2| = 37$, $\theta_2 = 142°$
(b) $|\mathbf{f}_1| = 6280$, $\theta_1 = 37°10'$, $|\mathbf{f}_2| = 2840$, $\theta_2 = -16°40'$
(c) $|\mathbf{f}_1| = 6800$, $\theta_1 = 210°$, $|\mathbf{f}_2| = 7200$, $\theta_2 = 315°$, $|\mathbf{f}_3| = 5600$, $\theta_3 = 90°$

Indicación. Si bien es posible determinar la resultante como diagonal de un paralelogramo, en problemas de este tipo es más sencillo trabajar con las componentes. Determínense la suma de las componentes según x y la suma de las componentes según y y, en seguida, determínese la resultante de las dos sumas.

En los problemas 22 a 27 se han considerado los vectores principalmente como velocidades. Los vectores también pueden aplicarse a sistemas de fuerzas. Por ejemplo, cuando un cuerpo está en reposo (o en movimiento con velocidad constante) la suma o resultante de las fuerzas que actúan sobre él es cero.

28 ¿Cuál es la tensión en cada una de las dos cadenas AB y BC que soportan el peso de 1000 kg de la fig. 16-18? Si seguimos las proposiciones que preceden al problema, así como la indicación del problema 27, se tiene para la suma de los componentes según y

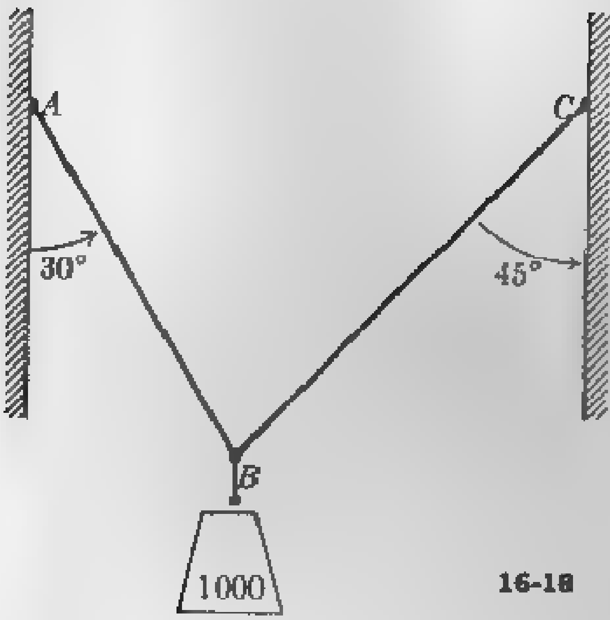
$$|\mathbf{t}_1| \cos 30° + |\mathbf{t}_2| \cos 45° - 1000 = 0.$$

y para la suma de los componentes según x

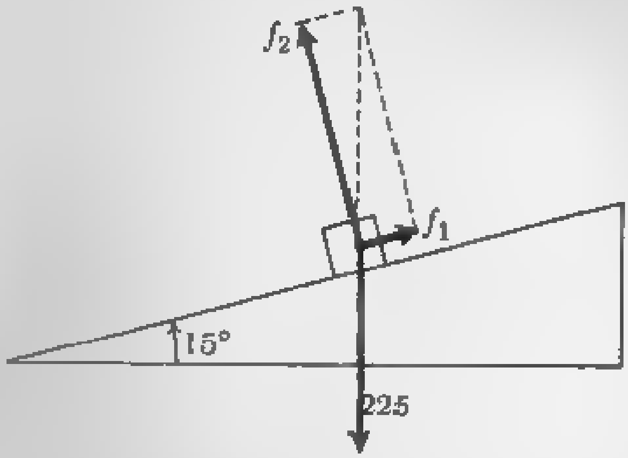
$$|\mathbf{t}_2| \cos 45° - |\mathbf{t}_1| \cos 60° = 0.$$

29 Un peso de 450 kg está suspendido de dos cables. Si uno de estos forma un ángulo de 24° con la vertical, y el otro uno de 32°, ¿cuál es la tensión en cada cable?

30 Un cajón de 225 kg de peso se encuentra en un plano inclinado. Sobre él actúan dos



16-18

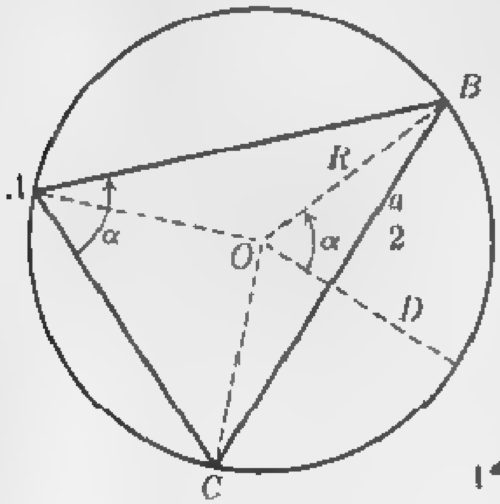


16-19

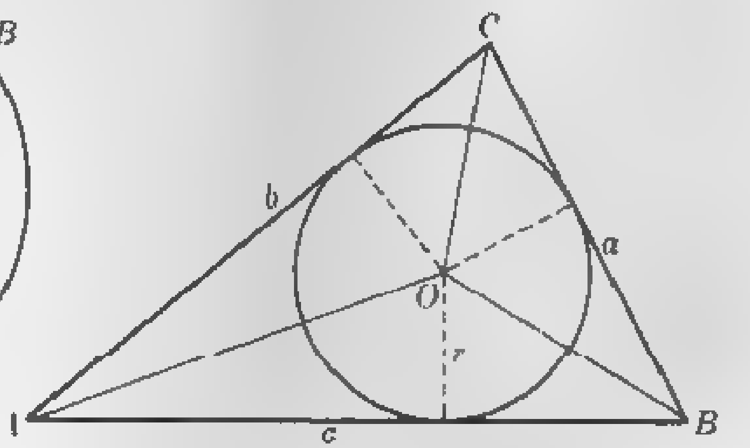
fuerzas, como consecuencia de su peso. Una de las fuerzas, $\mathbf{f}_2$, es perpendicular al plano inclinado y la otra, $\mathbf{f}_1$, fuerza de roce, es paralela a él. Encontrar la magnitud de cada fuerza si el plano forma un ángulo de 15° con la horizontal. Véase fig. 16-19.

31 Un vehículo cuyo peso es de 2500 kg está detenido en una pendiente con ángulo de 12°. ¿Cuál es la fuerza de frenado necesaria para mantener el vehículo en reposo?

32 Tres fuerzas de 150, 200 y 250 kg, respectivamente, están en equilibrio. ¿Cuáles son los ángulos entre ellas?



16-20



16-21

33 En la fig. 16-20, la circunferencia de centro O es la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y OD es perpendicular a BC. ¿Qué relación existe entre $\sphericalangle BOD$ y α? Utilizando el triángulo rectángulo BDO, demuéstrese que sen $\alpha = a/2R$ y, con una construcción adicional, demuéstrese el teorema de los senos.

34 En el triangulo rectángulo ABC, con $\alpha = 30°$ y $AB = 2$, se determina D sobre AC de modo que $DC = BC$ y desde D se baja la perpendicular a AB, la cual corta a este lado en K. Demuéstrese que $\sphericalangle DBK = 15°$ y, calculando las longitudes de los segmentos correspondientes, demuéstrese que

$$\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

35 Utilizando la fig. 16-21, demuéstrese que el área K del triangulo ABC es $K = rs$, donde $s = (a + b + c)/2$ y r es el radio de la circunferencia inscrita.

16.8 El teorema del coseno

Demostraremos ahora otra importante relación, que se conoce con el nombre de *«teorema del coseno»*.

TEOREMA 16.7. *En todo triángulo de ángulos α, β y γ y lados opuestos correspondientes a, b y c,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \tag{16.26}$$

Demostración: En la fig. 16-12, en la cual el ángulo α del triángulo ABC está en posición normal, las coordenadas de C son $(b, 0)$ y las de B, $(c \cos \alpha, c \operatorname{sen} \alpha)$; por tanto, la distancia entre B y C está dada por [recuérdese la ec. (4.9)]

$$\sqrt{(c \cos \alpha - b)^2 + (c \operatorname{sen} \alpha - 0)^2}.$$

Pero esta longitud es igual a a, de modo que

$$a = \sqrt{c^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + b^2 + c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha},$$

o

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

En forma análoga obtenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \tag{16.27}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \tag{16.28}$$

Estas tres relaciones constituyen el teorema del coseno y son válidas para todo triángulo. Se utilizan en la resolución de problemas de los tipos (2) y (3) de la sección 16.5. Si en la ec. (16.28) $\gamma = 90$, resulta $c^2 = a^2 + b^2$ Por esta razón, el teorema del coseno es llamado a veces *teorema general de Pitágoras*.

16.9. Aplicaciones a triángulos oblicuángulos

Para aclarar la utilización de los teoremas de los senos y del coseno, consideremos los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1. Resuélvase el triángulo ABC de la fig. 16-22 dados $a = 524{,}7$, $\beta = 46°24'$ y $\gamma = 98°41'$.

Solución: Tendremos $\alpha = 180° - (46°24' + 98°41') = 34°55'$. Conocido α, podemos aplicar el teorema de los senos para determinar b y c.

$$b = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\beta$$

$$\begin{aligned}
\log 524{,}7 &= 12{,}7199 - 10\\
(-)\log\operatorname{sen} 34°55' &= \underline{9{,}7577 - 10}\\
\log\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= 2{,}9622\\
(+)\log\operatorname{sen} 46°24' &= \underline{9{,}8599 - 10}\\
\log b &= 12{,}8221 - 10\\
b &= 663{,}9
\end{aligned}$$

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\gamma$$

$$\begin{aligned}
\log\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= 2{,}9622\\
(+)\log\operatorname{sen} 98°41' &= \underline{9{,}9950 - 10}\\
\log c &= 12{,}9572 - 10\\
c &= 906{,}2
\end{aligned}$$

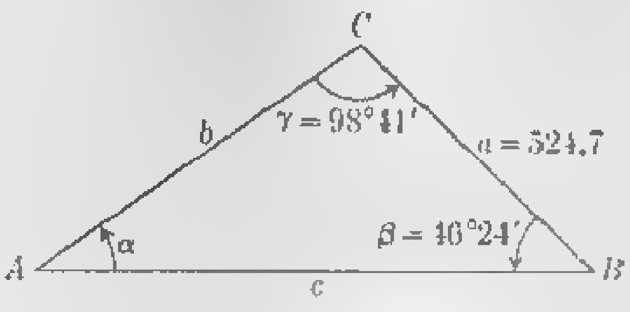
Este ejemplo corresponde a un problema de tipo (1) de la sección 16.5.

EJEMPLO 2. Determínense todos los triángulos con

$$a = 62{,}48, \quad b = 89{,}72,$$

y

$$\alpha = 32°16'.$$



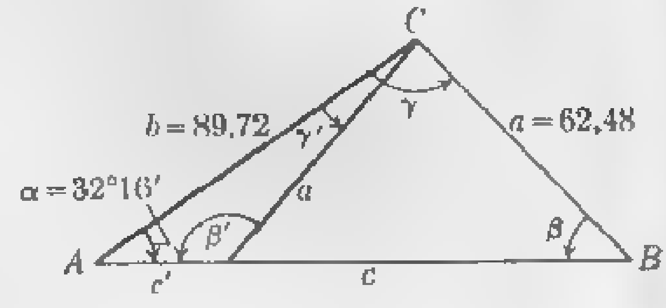
16-22

Solución: Este ejemplo ilustra el «*caso ambiguo*» del problema (4). Existe la posibilidad de dos soluciones, puesto que sen $(180° - \beta) = \operatorname{sen}\beta$. Si aplicamos el teorema de los senos y resolvemos respecto a β, quedan determinados dos valores, para cada uno de los cuales existen valores correspondientes de γ y c. De esta manera, hay dos soluciones distintas, como se ilustra en la fig 16-23

$$\operatorname{sen}\beta = b\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sen} 32°16' &= 9{,}7274 - 10\\
(-)\log 62{,}48 &= \underline{1{,}7958}\\
\log\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} &= 7{,}9316 - 10\\
(+)\log 89{,}72 &= \underline{1{,}9529}\\
\log \operatorname{sen}\beta &= 9{,}8845 - 10
\end{aligned}$$

$$\beta_1 = 50°2' \quad \text{ó} \quad \beta_2 = 129°58'.$$



16-23

De esta manera,

$$\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1) = 97°42', \quad \gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2) = 17°46'.$$

Entonces,

$$c_1 = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\gamma_1 \qquad\qquad c_2 = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\gamma_2$$

$$\begin{aligned}
\log\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= 2{,}0684 & \log\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} &= 2{,}0684\\
(+)\log \operatorname{sen} 97°42' &= \underline{9{,}9961 - 10} & (+)\log \operatorname{sen} 17°46' &= \underline{9{,}4845 - 10}\\
\log c_1 &= 12{,}0645 - 10 & \log c_2 &= 11{,}5529 - 10\\
c_1 &= 116{,}0, & c_2 &= 35{,}72.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Determínese el tercer lado del triángulo si $b = 47$, $c = 58$ y $\alpha = 63°$.

Solución: Para resolver este problema, tipo (2) de la sección 16.5, utilizamos el teorema del coseno. Es conveniente hacer notar que, utilizando tablas con cuatro decimales, este teorema da el tercer lado con no más de dos cifras significativas, puesto que aparece una raíz cuadrada

$$\begin{aligned}
a^2 &= (47)^2 + (58)^2 - 2\cdot 47\cdot 58\cos 63°\\
&= 2209 + 3364 - 2475{,}2\\
&= 3097{,}8.
\end{aligned}$$

Luego,

$$a = 56 \text{ (aproximadamente)}.$$

Los ángulos restantes pueden determinarse con el teorema de los senos.

Del ejemplo 3 se ve claramente que el teorema del coseno no se presta para resolver problemas de este tipo cuando los resultados se necesitan con más de dos cifras significativas. En este caso, es más conveniente utilizar otro teorema, llamado *primer teorema de las tangentes*. A partir de la relación $a/\text{sen}\,\alpha = b/\text{sen}\,\beta$, es fácil demostrar que

$$\frac{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta} = \frac{a-b}{a+b}.$$

De aquí y del problema 27, seccion 6.9, tenemos

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Esta igualdad y las cinco fórmulas similares que se obtienen permutando y rotando letras constituyen el *primer teorema de las tangentes*. (Véase problema 7.)

EJEMPLO 4. Resuélvase el triángulo con $a = 16{,}47$, $b = 25{,}49$ y $c = 33{,}77$.

Solución: Este ejemplo, del tipo (3), se resuelve aplicando el teorema del coseno: encontramos

$$\begin{aligned} a^2 &= 271{,}26, & 2ab &= 839{,}64,\\ b^2 &= 649{,}74, & 2ac &= 1112{,}4,\\ c^2 &= 1140{,}4, & 2bc &= 1721{,}6, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}8823, \quad \text{ó} \quad \alpha = 28°5',\\ \cos\beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0{,}6850, \quad \text{ó} \quad \beta = 46°46',\\ \cos\gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -0{,}2613, \quad \text{ó} \quad \beta = 105°9', \end{aligned}$$

La solución puede comprobarse fácilmente, puesto que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

El ejemplo 4 pudo haberse resuelto usando tablas de logaritmos con cinco decimales, pero el proceso es largo debido a la forma de la expresión del teorema del coseno. Para estos casos es más adecuada la forma de la expresión del llamado *segundo teorema de las tangentes*, especialmente si se utiliza el cálculo logarítmico. Sumando 1 en ambos miembros de la expresión para cos α en el ejemplo 4, dividiendo por 2 y descomponiendo en factores el segundo miembro, obtenemos

$$\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

Además,

$$\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

Haciendo $(a+b+c)/2=s$, y recordando las ecs. (6.49) y (6.51), tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad \text{y} \quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Dividiendo ambas expresiones miembro a miembro, obtenemos

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}, \tag{16.30}$$

donde

$$r^{*}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

La ec. (16. 30) y las fórmulas análogas

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{s-b} \quad \text{y} \quad \tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}$$

constituyen el *segundo teorema de las tangentes* y expresan los ángulos de un triángulo en función de los tres lados. (Véase problema 10.)

Problemas

1 Resuélvanse los triángulos siguientes, dados

(a) $\alpha=62°40'$, $\beta=79°20'$, $a=147$ (b) $\beta=81°43'$, $\gamma=57°51'$, $c=47{,}35$
(c) $\alpha=47°57'$, $\gamma=118°11'$, $b=87270$ (d) $\beta-14°36'$, $\gamma=53°8'$, $b=8{,}367$

2 Determínense y dibújense todos los triángulos con $a=62{,}48$, $b=43{,}17$ y $\alpha-32°16'$. Compárese con el ejemplo 2.

Indicación: No puede haber dos soluciones, puesto que $\beta_2+\alpha>180°$.

* Con los resultados del problema 35, sección 16.7, y del problema 12 de la presente sección, r resulta ser el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.

3 ¿Existe un triángulo con $a = 62{,}48$, $b = 143{,}4$ y $\alpha = 32°16'$? Compárese con el ejemplo 2 y dibújese la figura.

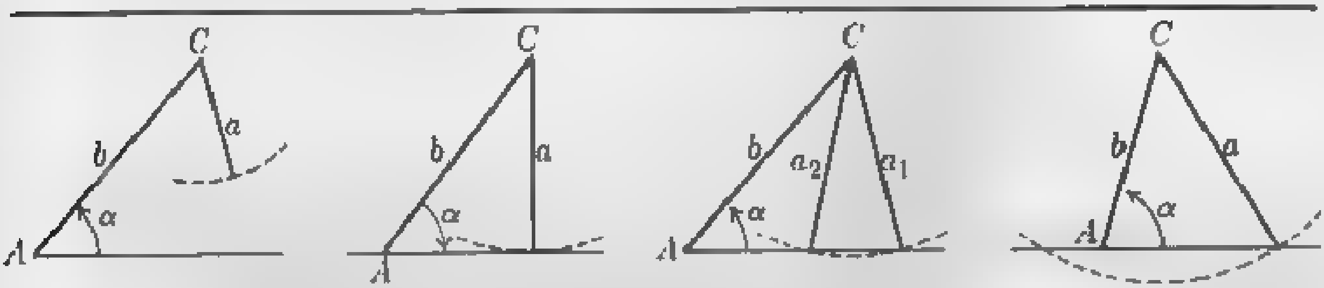
Indicación: ¿Puede ser sen β mayor que uno?

4 Obsérvese, comparando el ejemplo 2 con los problemas 2 y 3, las diferentes posibilidades que existen sobre número de soluciones cuando se dan dos lados y un ángulo menor que 90° y opuesto a uno de los lados dados. Suponiendo dados a, b y α, explíquese lo siguiente con la ayuda de la fig. 16-24.

$\alpha < 90°$	$\alpha > 90°$
$a < b$ sen α no da solución.	$a \leq b$ no da solución.
$a = b$ sen α da un triángulo rectángulo.	$b < a$ da una solución.
b sen $\alpha < a < b$ da dos soluciones.	
$a \geq b$ da una solución.	

5 En cada uno de los problemas siguientes, o bien demuéstrese que no hay solución, o bien determínense todas las soluciones.

(a) $b = 59{,}4$, $c = 72{,}3$, $\beta = 38°40'$ (b) $a = 49{,}3$, $c = 8{,}72$, $\alpha = 45°10'$
(c) $a = 14{,}72$, $b = 25{,}64$, $\beta = 147°47'$ (d) $b = 4{,}927$, $c = 5{,}764$, $\gamma = 57°18'$



16-24

6 Determínese en cada caso el lado opuesto al ángulo dado.

(a) $a = 4$, $b = 7$, $\gamma = 30°$ (b) $a = 7{,}6$, $c = 9{,}2$, $\beta = 47°$
(c) $b = 8{,}3$, $c = 4{,}4$, $\alpha = 138°$

▶ 7 Resuélvanse los triángulos siguientes, dados

(a) $b = 18{,}62$, $c = 35{,}61$, $\alpha = 52°18'$

Indicación: Utilice el primer teorema de las tangentes con $c - b = 16{,}99$, $c + b = 54{,}23$, $\frac{1}{2}(\gamma + \beta) = 63°51'$ y determínese $\frac{1}{2}(\gamma - \beta)$. Entonces, $\frac{1}{2}(\gamma + \beta) + \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \gamma$, etc.

(b) $a = 463$, $b = 628$, $\gamma = 57°40'$.

8 Resuélvanse los triángulos siguientes, dados

(a) $a = 356{,}8$, $c = 551{,}4$, $\beta = 87°48'$. (b) $b = 321{,}0$, $c = 672$, $\alpha = 124°16'$.

9 Utilizando el teorema del coseno, resuélvanse los triángulos siguientes:

(a) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$ (b) $a = 32$, $b = 56$, $c = 63$

▶ 10 Resuélvanse los triángulos siguientes por el método más conveniente.

(a) $a = 18{,}76$, $b = 25{,}31$, $c = 29{,}65$

Indicación: Si se usan logarítmos y se aplica el segundo teorema de las tangentes, se pueden ordenar los cálculos sistemáticamente en la forma siguiente.

$$\begin{aligned} 2s &= 73{,}72 \\ s &= 36{,}86 \\ s-a &= 18{,}10 \\ s-b &= \\ s-c &= \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \log(s-a) &= \\ \log(s-b) &= \\ (+)\log(s-c) &= \underline{\qquad\quad} \\ \log \text{numerador} &= 3{,}1782 \\ (-)\log s &= \underline{\qquad\quad} \\ \log r^2 &= \\ \log r &= 0{,}8058 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log r &= \\ (-)\log(s-a) &= \underline{\qquad\quad} \\ \log\tan\frac{\alpha}{2} &= \\ \frac{\alpha}{2} &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log r &= \\ (-)\log(s-b) &= \underline{\qquad\quad} \\ \log\tan\frac{\beta}{2} &= \\ \frac{\beta}{2} &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log r &= \\ (-)\log(s-c) &= \underline{\qquad\quad} \\ \log\tan\frac{\gamma}{2} &= \\ \frac{\gamma}{2} &= \end{aligned}$$

(b) $a = 523$, $b = 576$, $c = 615$
(c) $a = 0{,}8147$, $b = 0{,}6834$, $c = 0{,}3449$
(d) $a = 4{,}32$, $b = 5{,}78$, $c = 13{,}44$

▶ 11 Demuéstrese que el área del triángulo de la fig. 16-12 está dada por la fórmula

$$K = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha.$$

Permutando cíclicamente las letras se obtiene

$$K = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen} \beta = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma.$$

▶ 12 Utilizando los valores para sen $\theta/2$ y cos $\theta/2$ dados en la explicación que sigue al ejemplo 4 y, además, la fórmula $\frac{1}{2}$ sen α = sen $\alpha/2$ cos $\alpha/2$ (ec. 6.43), demuestrese que

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A partir de esta expresión y del resultado $K = rs$, problema 35, sección 16.7, establecemos la expresión

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

donde r es el radio de la circunferencia inscrita.

13 Utilícense los resultados del problema 11 y el teorema de los senos para demostrar que

$$K = \frac{a^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{b^2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{sen} \beta} = \frac{c^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{2 \operatorname{sen} \gamma}.$$

14 Calcúlense las áreas de los triángulos en los problemas anteriores que indique el profesor.

15 Determínense las longitudes de los lados de un paralelogramo si una diagonal mide 72,83 cm y forma con los lados ángulos de 27°52′ y 16°41′, respectivamente.

16 ¿Qué ángulo forma la falda de un cerro con la horizontal si un árbol de 22,3 m de alto, que crece en la falda, se ve bajo un ángulo de 19°30′ desde un punto situado a 44,1 m de la base del árbol? (La distancia se considera medida a lo largo de la falda del cerro y bajando en la dirección de máxima pendiente.)

17 Dos vías aéreas se cruzan bajo un ángulo de 49°. En cierto instante, el avión A está a 48 km del cruce, en tanto que otro avión B se encuentra a 114 km del cruce. ¿Qué distancia separa a los dos aviones en ese instante? (Dos soluciones.)

18 Dos lados de un paralelogramo miden 68 y 83 cm y una de las diagonales mide 42 cm. Determínense los ángulos del paralelogramo.

19 Desde un punto situado en el mismo plano horizontal que la base de un edificio, los ángulos de elevación del extremo superior y de la base de un mástil situado en la parte más alta del edificio son 64°40′ y 59°50′, respectivamente. Si la altura del edificio es de 33,6 m, ¿qué altura tiene el mástil?

20 Desde un tren que viaja hacia el norte por una vía recta, el maquinista observa una columna de humo en dirección N 20°20′ E. Después de recorrer 145 m observa la misma columna en dirección S 71°40′ E. ¿A qué distancia estaba el humo del primer punto de observación? ¿Del segundo? ¿De la vía férrea?

21 Un barco de guerra navega a lo largo de la costa con rumbo N 18°40′ E a una velocidad constante de 59 km/h. Si una escuadrilla de aviones, que vuela a 301 km/h, se encuentra directamente al este del barco, ¿en qué dirección debe volar para alcanzarlo lo antes posible?

▶ 22 Si $\mathbf{R}$ es la resultante de dos fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$, y $\mathbf{R}$, $|\mathbf{f}_1|$ y $|\mathbf{f}_2|$ representan las magnitudes respectivas, explíquese la fórmula $\mathbf{R}^2 = |\mathbf{f}_2| + |\mathbf{f}_2| + 2|\mathbf{f}_1||\mathbf{f}_2| \cos \theta$, siendo θ el ángulo entre las dos fuerzas. (Recuérdese el problema 22, sección 16.7.) Determínense la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas: 75 kg actuando hacia el norte y 93 kg en dirección N 63° O.

23 Un avión vuela a la velocidad de 260 km/h en aire en calma. Si el viento sopla con velocidad de 45,9 km/h desde la dirección S 21° O y el avión hace rumbo en dirección S 53° E, determínense la magnitud de la velocidad del avión y su dirección con relación al suelo.

24 La resultante de dos fuerzas de 61,3 kg y 34,9 kg es una fuerza de 73,7 kg. ¿Qué ángulo forma la resultante con cada una de las dos fuerzas?

PROBLEMAS DE REPASO

1 Una bomba de vacío remueve un quinto del aire contenido en un recipiente en cada golpe del émbolo. ¿Qué parte del aire contenido inicialmente ha sido removida des-

pués de 6 golpes del émbolo? ¿Cuántos golpes se requieren para remover el 80% del aire?

2 ¿Cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas?

(a) $\dfrac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

(b) $\dfrac{\log a}{\log b} = \log\left(\dfrac{a}{b}\right)$

(c) $\dfrac{\log a}{b} = \log \dfrac{a}{b}$

(d) $\dfrac{\log a}{b} = \log (a^{1/b})$

(e) $\dfrac{\log a}{b} = \log a^{1/b}$

3 Resuélvase el problema 18, sección 14.3, si en lugar de los tercios centrales se borran los décimos centrales.

4 Bosquéjese una gráfica de la función

$$E = \left\{(x, y) \middle| y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right\}.$$

Indicación: Considérense las ecuaciones $y = 2^x/2$ e $y = 2^{-x}/2$.

5 $\log\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)$ es idéntica a

(a) $\log\left(\dfrac{x}{2}\right) + \log \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$

(b) $\log \dfrac{x + \frac{1}{2}(x^2 + 4)}{2}$

(c) $\log (x + \sqrt{x^2 - 4}) - \log 2$

(d) $\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log (x^2 - 4)$

6 $\log \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$ es idéntica a

(a) $\log \sqrt{1 + x} - \log \sqrt{1 - x}$

(b) $\log (1 + \sqrt{x}) - \log (1 - \sqrt{x})$

(c) $\log \sqrt{x} - \log (-\sqrt{x})$

(d) $\dfrac{1}{2} \log \dfrac{1 + x}{1 - x}$

(e) $\frac{1}{2} \log (1 + x) - \frac{1}{2} \log (1 - x)$

7 Determínese el capital compuesto total obtenido al cabo de 12 años con un capital inicial de \$6000 al 4%.

(a) compuesto anualmente.
(b) compuesto trimestralmente.
(c) compuesto mensualmente.
(d) compuesto en forma continua.

8 Exprésese el número complejo $(1 - i)^4(2 + 2i)^3$ en la forma $x + yi$

9 Bosquéjese la gráfica de

(a) $\{(x, y) | y = \log \frac{x}{3}, 1 \le x \le 3\}$.
(b) $\{(x, y) | y = \log \sqrt[3]{1 - x^2}, \frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}\}$.

10 ¿Para qué valores de x es $\dfrac{\log 5x}{\log 3x}$

(a) positiva? (b) negativa? (c) cero?

11 Si $z_1 = 6(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$ y $z_2 = 12(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$, exprésese z_1/z_2 en la forma $x + yi$

12 (a) Determínese el conjunto $A \cap B$ si

$$A = \{(x, y) | y = 6x\} \quad \text{y} \quad B = \{(x, y) | y = \operatorname{sen} x\}.$$

(b) Utilizando el resultado de (a), determínese el número de raíces de la ecuación $6x - \operatorname{sen} x = 0$.

13 Aplicando el teorema de De Moivre a $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3$, demuéstrese que

(a) $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$. (b) $\operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta$

14 Un avión a reacción vuela a una velocidad de 840 km/h en aire en calma. Si el avión debe ir en la dirección N 37° E y el viento sopla a 60 km/h, desde la dirección S 45° E, determínese la velocidad del avión y su dirección respecto al suelo.

15 Calcúlese $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$

16 Determínense las raíces reales de la ecuación

$$e^{-4x} - 4e^{-3x} + 4e^{-2x} - 4e^{-x} + 3 = 0.$$

17 Resuélvanse las siguientes ecuaciones (para valores reales de x):

(a) $\log(4x - 7) + \log(2x - 4) - 1 = 0$.
(b) $2\log(2x - 3) + \log(3x + 4) - 1 = 0$.

18 Un avión comercial despega desde la ciudad A en vuelo a la ciudad B, situada a una distancia de 1315 km. Después de volar durante dos horas a una velocidad de 655 km/h, el piloto observa que ha estado volando en dirección desviada en 13°20′ de su ruta. ¿A qué distancia de B se encuentra?

19 Bosquéjese la gráfica para cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $y = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right)$. (b) $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$.

(c) $y = 2x - \cos 3x$.

20 Bosquéjese la gráfica de la función determinada por $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le 2\pi$.

TABLA I. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Grados	Radianes	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc		
0°00'	0000	.0000	1 0000	,0000	—	1 000	—	1.5708	90 00
10	029	029	000	029	343 8	000	343,8	679	50
20	058	058	000	058	171 9	000	171,9	650	40
30	,0087	0087	1 0000	0087	114.6	1 000	114,6	1,5621	30
40	116	116	9999	116	85.94	000	85.95	592	20
50	145	145	999	145	68.75	000	68,76	563	10
1°00'	0175	,0175	9998	0175	57.29	1,000	57.30	1 5533	89 00
10	204	204	998		49 10	000	49.11	504	[redacted]
20	233	233	997	233	42 96	000	42 98	475	[redacted]
30	,0262	0262	,9997	,0262	38.19	1 000	38 20	1 5446	30
40	291	291	[redacted]	291	34 37	000	34 38	417	20
50	320	320	995	320	31,24	001	31 26	388	10
2°00'	,0349	0349	[redacted]	0349	28 64	1 001	28 65	1 5359	88 00
10	378	378	993	378	26 43	001	26 45	330	50
20	407	407	992	407	24.54	001	24 56	301	40
30	,0436	0436	[redacted]	,0437	22 90	1,001	22.93	1 5272	30
40	465	[redacted]	989	466	21 47	001	21 49	243	20
50	495	494	988	495	20 21	001	20.23	213	10
3°00'	,0524	,0523	,9986	,0524	19 08	1 001	19,11	1 5184	87°00
10	553	552	985	553	18,07	002	18,10	155	50
20	582	581	983	582	17 17	002	17 20	126	40
30	,0611	0610	9981	0612	16 35	1,002	16,38	1 5097	30
40	640	640	980	641	15 60	002	15,64	[redacted]	20
50	669	669	978	670	14 92	002	14,96	039	10
4°00'	0698	,0698	9976	,0699	14.30	1 002	14 34	1 5010	86°00
10	727	727	974	729	13.73	003	13 76	981	[redacted]
20	756	756	971	758	13.20	003	13 23	952	40
30	0785	,0785	,9969	,0787	12.71	1.003	12.75	1,4923	30
40	814	814	967	816	12,25	003	12 29	893	20
50	844	843	964	846	11 83	004	11.87	[redacted]	10
5°00'	0873	,0872	,9962	0875	11 43	1 004	11,47	1,4835	85°00'
10	902	901	959	904	11 06	004	11 10	806	50
20	931	929	957	934	10,71	004	10 76	777	40
30	0960	,0958	,9954	0963	10 39	1,005	10 43	1,4748	30
40	[redacted]	987	951	992	10 08	005	10 13	719	20
50	,1018	,1016	948	,1022	9,788	005	9,839	690	10
6°00'	,1047	,1045	,9945	1051	9,514	1 006	9 567	1 4661	84°00'
10	076	074	942	080	9 255	[redacted]	9 309	632	50
20	105	103	939	110	9.010	[redacted]	9 065	603	40
30	1134	,1132	,9936	,1139	8,777	1 006	8.834	1,4573	30
40	164	161	932	169	8 556	007	8 614	544	20
50	193	190	929	198	8.345	007	8,405	515	10
7°00	1222	,1219	,9925	,1228	8,144	1,008	8.206	1 4486	83°00'
10	251	248	922	257	7 953	[redacted]	8,016	457	50
20	280	276	918	287	7,770	[redacted]	7,834	428	40
30	,1309	,1305	9914	1317	7 596	1.009	7,661	1 4399	30
40	338	334	911	346	7 429	009	7 496	370	20
50	367	363	907	376	7,269	009	7 337	341	10
8°00'	,1396	,1392	9903	,1405	7.115	1 010	7,185	1 4312	82°00'
10	425	421	[redacted]	435	6 968	010	7,040	283	50
20	454	449	[redacted]	465	6.827	011	6,900	254	40
30	,1484	,1478	9890	1495	6 691	1 011	6,765	1.4224	30
40	513	507	886	524	6 561	012	6,636	195	20
50	542	536	881	554	6,435	012	6,512	166	10
9°00	,1571	1564	,9877	1584	6,314	1.012	6.392	1,4137	81°00'
		Cos	Sen	Cot	Tan	Csc	Sec	Radianes	Grados

TABLA I. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS *(continuación)*

Grados	Radianes	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc		
9° 00'	1571	1564	9877	1584	6 314	1 012	6.392	1 4137	**81° 00'**
10	600	593	872	614	197	013	277	108	50
20	629	622	868	644	084	013	166	079	40
30	1658	1660	[redacted]	1673	5 976	1 014	6 059	1 4050	30
40	687	[redacted]	[redacted]	703	871	014	5.955	1 4021	20
50	716	708	853	733	769	015	[redacted]	992	10
10° 00'	1745	1736	9848	1763	5 671	1 015	5.759	1 3963	**80° 00'**
10	774	765	843	793	576	016	665	934	[redacted]
20	804	794	838	823	[redacted]	016	575	904	40
30	,1833	1822	[redacted]	1853	5 396	1 017	5 487	1.3875	30
40	[redacted]	851	827	883	309	018	403	846	20
50	891	[redacted]	822	914	228	018	320	817	10
11° 00'	,1920	1908	9816	1944	5 145	1 019	5 241	1 3788	**79° 00'**
10	[redacted]	937	811	974	066	019	164	759	50
20	978	[redacted]	805	2004	4 989	020	089	730	40
30	2007	1994	9798	2035	4 915	1 020	5 016	1 3701	30
40	036	2022	793	065	843	021	4 945	672	20
50	065	051	787	095	773	022	876	643	10
12° 00'	2094	2079	9781	2126	4 705	1 022	4 810	1 3614	**78° 00'**
10	123	108	775	156	638	023	746	584	[redacted]
20	153	136	[redacted]	186	574	024	682	555	40
30	2182	2164	9763	2217	4 511	1 024	4 620	1 3526	30
40	211	193	757	247	449	025	560	497	20
50	240	221	750	278	390	026	502	468	10
13° 00'	2269	,2250	9744	2309	4 331	1 026	4 445	1 3439	**77° 00'**
10	[redacted]	278	737	339	275	027	390	410	50
20	327	306	730	370	219	028	336	381	40
30	2356	2334	[redacted]	2401	4 165	1 028	4 284	1 3352	30
40	385	363	717	432	113	029	232	323	20
50	414	391	710	462	061	[redacted]	182	294	10
14° 00'	2443	2419	9703	2493	4 011	1 031	4 134	1 3265	**76° 00'**
10	473	447	696	524	3 962	031	086	235	50
20	502	476	689	555	914	032	039	206	40
30	2531	2504	9681	2586	3 867	1 033	3 994	1 3177	30
40	[redacted]	532	674	617	821	034	[redacted]	148	20
50	589	560	667	648	776	034	906	119	10
15° 00'	2618	2588	9659	2679	3 732	1 035	3 864	1 3090	**75° 00'**
10	647	616	652	711	689	036	822	061	[redacted]
20	676	644	644	742	647	037	782	032	40
30	2705	2672	[redacted]	2773	3 606	1 038	3 742	1 3003	30
40	734	700	628	805	566	039	703	974	20
50	763	728	621	836	526	039	665	945	10
16° 00'	2793	2756	9613	2867	3 487	1 040	3 628	1 2915	**74° 00'**
10	822	784	[redacted]	[redacted]	450	041	592	886	50
20	851	812	596	931	412	042	556	857	40
30	2880	2840	9588	2962	3 376	1 043	3 521	1 2828	30
40	909	868	580	994	340	044	487	799	20
50	938	[redacted]	572	,3026	305	045	453	770	10
17° 00'	2967	2924	9563	3057	3 271	1 046	3.420	1 2741	**73° 00'**
10	[redacted]	952	555	[redacted]	237	047	[redacted]	712	50
20	3025	[redacted]	546	121	204	048	356	683	40
30	,3054	3007	9537	,3153	3.172	1 049	3 326	1 2654	30
40	083	035	528	185	140	049	295	[redacted]	20
50	113	062	[redacted]	217	108	050	265	595	10
18° 00'	3142	3090	9511	3249	3 078	1 051	3 236	1 2566	**72° 00'**
		Cos	Sen	Cot	Tan	Csc	Sec	Radianes	Grados

TABLA I. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS *(continuación)*

Grados	Radianes	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc		
18° 00′	.3142	3090	9511	3249	3,078	1,051	3,236	1,2566	72° 00′
10	171	118	502	281	047	052	207	537	50
20	200	145	492	314	018	053	179	508	40
30	3229	,3173	,9483	3346	2 989	1 054	3.152	1.2479	30
40	258	201	474	378	[redacted]	056	124	450	20
50	287	228	[redacted]	411	932	057	098	421	10
19° 00′	3316	3256	[redacted]	3443	2 904	1 058	3.072	1 2392	71° 00′
10	345	283	446	476	877	059	046	363	50
20	374	311	436	508	[redacted]	060	021	334	40
30	3403	3338	9426	3541	2.824	1 061	2.996	1,2305	30
40	432	365	417	574	798	062	971	275	20
50	462	393	407	607	773	063	947	246	10
20° 00′	.3491	3420	9397	3640	2 747	1 064	2.924	1,2217	70° 00′
10	520	448	387	673	723	065	901	188	[redacted]
20	549	475	377	706	699	[redacted]	878	159	40
30	3578	3502	9367	3739	2 675	1 068	2,855	1.2130	30
40	607	529	[redacted]	772	651	069	[redacted]	101	20
50	636	557	[redacted]	805	[redacted]	070	812	072	10
21° 00′	3665	3584	9336	3839	2,605	1 071	2,790	1.2043	69° 00′
10	694	611	[redacted]	[redacted]	[redacted]	072	769	1.2014	50
20	723	[redacted]	315	[redacted]	560	074	749	[redacted]	40
30	3752	,3665	9304	3939	2 539	1 075	2,729	1,1956	30
40	782	[redacted]	293	973	517	076	709	926	20
50	811	718	283	4006	496	077	689	897	10
22° 00′	3840	3746	9272	4040	2.475	1,079	2,669	1 1868	68° 00′
10	869	773	261	074	455	080	650	839	50
20	[redacted]	800	250	[redacted]	434	081	632	810	40
30	.3927	,3827	9239	4142	2,414	1 082	2.613	1,1781	30
40	956	854	228	176	394	084	595	752	20
50	985	881	216	210	375	085	577	·723	10
23° 00′	4014	3907	,9205	4245	2 356	1 086	2 559	1,1694	67° 00′
10	043	[redacted]	194	279	337	[redacted]	542	[redacted]	50
20	072	961	182	314	318	089	525	636	40
30	,4102	3987	9171	4348	2 300	1 090	2.508	1,1606	30
40	131	4014	159	383	282	092	491	577	20
50	160	041	147	417	264	093	475	548	10
24° 00′	,4189	4067	9135	4452	2.246	1 095	2,459	1,1519	66° 00′
10	218	094	124	487	229	096	443	[redacted]	50
20	247	120	112	522	211	097	427	461	40
30	4276	4147	9100	,4557	2 194	1 099	2,411	1.1432	30
40	305	173	[redacted]	592	177	100	396	[redacted]	20
50	334	200	075	628	161	102	381	374	10
25° 00′	4363	4226	,9063	,4663	2,145	1 103	2.366	1,1345	65° 00′
10	392	253	051	699	128	105	352	316	50
20	422	279	038	734	112	106	337	286	40
30	4451	4305	[redacted]	4770	2.097	1.108	2.323	1,1257	30
40	480	331	013	806	081	109	309	228	20
50	[redacted]	358	001	841	066	111	295	199	10
26° 00′	4538	4384	,8988	4877	2.050	1,113	2.281	1 1170	64° 00′
10	567	410	975	913	035	114	268	141	50
20	596	436	962	950	020	116	254	112	40
30	4625	4462	[redacted]	,4986	2 006	1 117	2.241	1,1083	30
40	654	488	[redacted]	[redacted]	1 991	119	228	054	20
50	683	514	923	059	977	121	215	1,1025	10
27° 00′	4712	4540	8910	5095	1 963	1,122	2.203	1 0996	63° 00′
		Cos	Sen	Cot	Tan	Csc	Sec	Radianes	Grados

TABLA I. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS *(continuación)*

Grados	Radianes	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc		
27° 00′	4712	4640	8910	5095	1 963	1,122	2 203	1 0996	63° 00′
10	741	[redacted]	566	[redacted]	949	124	190	966	50
20	771	592	884	169	935	126	178	937	40
30	.4800	,4617	,8870	,5206	1,921	1,127	2 166	1 0908	30
40	[redacted]	643	857	243	907	129	[redacted]	879	20
50	[redacted]	[redacted]	843	280	894	131	142	[redacted]	10
28° 00′	4887	.4695	8829	5317	1,881	1,133	2,130	1 0821	62 00′
10	916	720	816	354	[redacted]	134	118	792	50
20	945	746	802	392	855	136	107	763	40
30	4974	,4772	8788	5430	1,842	1,138	2,096	1,0734	30
40	5003	797	774	467	829	140	085	705	20
50	031	[redacted]	760	505	816	142	074	676	10
29° 00′	5061	[redacted]	.8746	5543	1,804	1,143	2,063	1,0647	61° 00′
10	091	[redacted]	732	581	792	145	052	617	50
20	120	899	718	619	780	147	041	588	40
30	5149	[redacted]	8704	5658	1 767	1 149	2 031	1 0559	30
40	178	[redacted]	689	[redacted]	756	151	020	[redacted]	20
50	207	975	675	735	[redacted]	153	010	501	10
30° 00′	5236	[redacted]	8660	,5774	1,732	1 155	2.000	1,0472	60° 00′
10	265	025	646	812	720	157	1,990	443	[redacted]
20	294	050	631	851	709	159	[redacted]	414	40
30	,5323	,5075	[redacted]	,5890	1 698	1,161	1,970	1,0385	30
40	352	100	601	930	[redacted]	163	961	356	20
50	381	125	587	[redacted]	675	165	951	327	10
31° 00′	5411	5150	,8572	6009	1 664	1,167	1 942	1,0297	59° 00′
10	440	175	557	048	[redacted]	169	932	268	50
20	[redacted]	200	542	088	643	171	923	239	40
30	,5498	5225	8526	6128	1 632	1,173	1,914	1,0210	30
40	527	250	511	168	621	175	[redacted]	181	20
50	[redacted]	275	496	208	611	177	[redacted]	152	10
32° 00′	5585	5299	,8480	6249	1 600	1 179	1 887	1,0123	58° 00′
10	614	324	465	289	590	181	878	[redacted]	50
20	643	348	450	330	[redacted]	184	[redacted]	[redacted]	[redacted]
30	5672	.5373	.8434	6371	1 570	1,186	1 861	1 0036	30
40	701	[redacted]	418	412	[redacted]	188	853	1 0007	20
50	730	422	403	453	[redacted]	190	844	977	10
33° 00′	5760	5446	8387	6494	1,540	1,192	1,836	,9948	57° 00
10	789	471	371	[redacted]	530	195	[redacted]	919	50
20	818	495	356	577	520	197	820	[redacted]	40
30	,5847	,5519	.8339	6619	1,511	1,199	1,812	,9861	30
40	876	[redacted]	323	661	501	202	804	832	20
50	905	[redacted]	307	703	1,492	204	796	803	10
34° 00′	5934	5592	,8290	,6745	1 483	1 206	1,788	,9774	56° 00′
10	963	616	274	787	473	209	781	745	50
20	992	640	258	830	[redacted]	211	773	716	40
30	,6021	5664	.8241	6873	1,455	1 213	1 766	,9687	30
40	050	688	225	916	[redacted]	216	[redacted]	657	20
50	080	712	208	959	437	218	751	628	10
35° 00′	.6109	,5736	8192	,7002	1 428	1 221	1,743	9599	55° 00′
10	138	760	175	[redacted]	419	223	736	570	50
20	167	783	158	088	411	226	729	541	40
30	,6196	5807	,8141	7133	1 402	1,228	1 722	9512	30
40	225	831	124	177	393	231	715	483	20
50	254	854	107	221	385	233	708	454	10
36° 00′	6283	.5878	8090	7265	1,376	1,236	1,701	9425	54° 00′
		Cos	Sen	Cot	Tan	Csc	Sec	Radianes	Grados

TABLA I. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS *(continuación)*

Grados	Radianes	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc		
36° 00'	6283	.5878	8090	7265	1 376	1 236	1 701	9425	54° 00'
10	312	901	073	310	368	239	695	396	[redacted]
[redacted]	341	925	[redacted]	355	360	241	688	367	40
30	.6370	5948	8039	7400	1 351	1 244	1 681	9338	30
40	400	972	021	445	343	247	675	308	20
50	429	995	004	490	335	249	[redacted]	279	10
37° 00'	6458	6018	.7986	7536	1.327	1 252	1 662	9250	53° 00
10	487	041	969	581	319	255	655	221	50
20	516	065	951	627	311	258	649	192	40
30	.6545	[redacted]	.7934	7673	1 303	1 260	1 643	9163	30
40	574	111	916	720	295	263	636	134	20
50	603	134	898	766	288	[redacted]	630	105	10
38° 00'	6632	.6157	.7880	7813	1 280	1 269	1.624	9076	52° 00'
10	661	180	862	860	272	272	618	047	[redacted]
20	690	202	[redacted]	907	265	275	612	9018	40
30	6720	6225	.7826	7954	1 257	1 278	1 606	8988	30
[redacted]	749	248	808	[redacted]	250	281	601	959	20
50	778	271	790	050	242	284	595	930	10
39° 00'	.6807	6293	.7771	[redacted]	1 235	1 287	1 589	8901	51° 00'
10	836	316	753	146	228	290	583	872	50
20	[redacted]	338	735	195	220	293	578	843	40
[redacted]	6894	6361	.7716	8243	1 213	1 296	1.572	.8814	30
40	923	383	698	292	206	299	[redacted]	785	20
50	952	406	679	342	199	302	561	756	10
40° 00'	6981	.6428	.7660	8391	1 192	1 305	1,556	8727	50 00'
10	7010	450	642	441	185	309	[redacted]	698	50
20	039	472	623	491	178	312	545	[redacted]	40
[redacted]	7069	6494	.7604	8541	1 171	1 315	1 540	8639	30
40	098	517	585	591	164	318	[redacted]	610	20
50	127	539	[redacted]	642	157	322	529	581	10
41° 00'	.7156	6561	.7547	8693	1 150	1 325	1 524	8552	49° 00'
10	185	583	528	744	144	328	519	523	50
20	214	[redacted]	509	796	137	332	514	494	40
30	.7243	6626	.7490	8847	1,130	1 335	1 509	8465	30
40	272	[redacted]	470	[redacted]	124	339	504	436	20
50	301	670	451	[redacted]	117	342	499	407	10
42° 00'	7330	6691	7431	9004	1,111	1 346	1 494	8378	48 00'
10	359	713	412	057	104	349	[redacted]	[redacted]	50
20	389	734	392	110	[redacted]	353	[redacted]	319	40
30	.7418	6756	7373	9163	1,091	1 356	1,480	.8290	30
40	447	777	353	217	085	360	476	261	20
50	476	799	333	271	079	364	471	232	10
43° 00'	.7505	6820	7314	9325	1,072	1 367	1.466	.8203	47 00'
10	534	841	294	380	066	371	462	174	50
20	563	[redacted]	274	435	060	375	457	145	40
30	7592	.6884	7254	9490	1 054	1,379	1 453	.8116	30
40	621	905	234	545	048	382	[redacted]	087	20
50	650	926	214	601	042	386	444	058	10
44° 00'	7679	6947	7193	9657	1 036	1 390	1 440	8029	46° 00'
10	709	967	173	713	030	394	435	999	50
20	738	988	153	770	024	398	431	970	40
30	7767	7009	7133	.9827	1 018	1 402	1 427	.7941	30
40	796	030	112	884	012	406	423	912	20
50	825	050	092	942	006	410	418	883	10
45° 00'	7854	7071	7071	1 000	1 000	1 414	1 414	7854	45 00
		Cos	Sen	Cot	Tan	Csc	Sec	Radianes	Grados

TABLA II. LOGARITMOS DE NUMEROS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0000	0043	,0086	,0128	0170	,0212	,0253	0294	.0334	,0374
1,1	0414	0453	,0492	0531	0569	,0607	0645	0682	,0719	,0755
1,2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1,3	,1139	,1173	,1206	,1239	,1271	,1303	1335	1367	1399	,1430
1,4	,1461	,1492	,1523	,1553	,1584	,1614	,1644	1673	,1703	,1732
1,5	1761	,1790	1818	,1847	,1875	,1903	1931	,1959	1987	2014
1,6	2041	2068	2095	,2122	,2148	,2175	,2201	,2227	2253	2279
1,7	2304	2330	2355	2380	,2405	2430	,2455	,2480	2504	2529
1,8	2553	2577	2601	2625	,2648	,2672	2695	2718	2742	,2765
1,9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	,2923	,2945	2967	2989
2,0	,3010	3032	3054	3075	,3096	,3118	,3139	,3160	,3181	3201
2,1	,3222	3243	,3263	,3284	,3304	,3324	,3345	3365	3385	3404
2,2	,3424	,3444	3464	3483	,3502	,3522	3541	3560	3579	3598
2,3	,3617	3636	3655	3674	,3692	,3711	,3729	,3747	3766	3784
2,4	,3802	3820	,3838	,3856	,3874	3892	,3909	,3927	3945	,3962
2,5	,3979	3997	,4014	,4031	4048	4065	,4082	,4099	,4116	4133
2,6	,4150	4166	4183	,4200	,4216	,4232	4249	,4281	4281	4298
2,7	,4314	,4330	,4346	,4362	,4378	,4393	4409	,4425	,4440	4456
2,8	,4472	,4487	4502	,4518	,4533	,4548	4564	,4579	,4594	,4609
2,9	4624	4639	4654	4669	,4683	4698	4713	4728	4742	4757
3,0	4771	4786	4800	,4814	,4829	4843	4857	4871	4886	4900
3,1	4914	4928	4942	,4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3,2	5051	5065	5079	5092	,5105	5119	5132	5145	5159	5172
3,3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3,4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	,5403	5416	5428
3,5	,5441	5453	,5465	5478	,5490	5502	5514	5527	5539	,5551
3,6	5563	5575	5587	[redacted]	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3,7	,5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3,8	,5798	5809	5821	5832	5843	[redacted]	,5866	5877	5888	5899
3,9	,5911	,5922	5933	5944	5955	5966	,5977	,5988	5999	6010
4,0	,6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	,6107	6117
4,1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	,6222
4,2	6232	6243	6253	,6263	6274	,6284	6294	6304	,6314	6325
4,3	6335	6345	,6355	6365	6375	6385	6395	6405	,6415	,6425
4,4	6435	6444	,6454	6464	,6474	6484	,6493	6503	,6513	6522
4,5	6532	,6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4,6	,6628	,6637	,6646	,6656	,6665	6675	,6684	,6693	6702	,6712
4,7	,6721	,6730	,6739	,6749	,6758	6767	,6776	,6785	,6794	,6803
4,8	,6812	,6821	6830	6839	[redacted]	6857	,6866	,6875	,6884	,6893
4,9	,6902	6911	,6920	,6928	6937	,6946	6955	6964	6972	,6981
[redacted]	,6990	6998	7007	,7016	7024	,7033	,7042	7050	7059	7067
5,1	,7076	7084	,7093	,7101	7110	,7118	,7126	,7135	7143	,7152
5,2	7160	,7168	7177	7185	7193	7202	7210	,7218	,7226	,7235
5,3	7243	,7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5,4	,7324	,7332	,7340	,7348	7356	7364	7372	7380	,7388	,7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLA II. LOGARITMOS DE NUMEROS *(continuación)*

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	,7404	,7412	,7419	,7427	,7435	,7443	,7451	,7459	,7466	,7474
5.6	,7482	,7490	,7497	,7505	7513	,7520	,7528	,7536	,7543	7551
5.7	,7559	,7566	,7574	7582	,7589	7597	,7604	,7612	,7619	,7627
5.8	7634	,7642	,7649	,7657	7664	7672	,7679	,7686	,7694	,7701
5.9	,7709	,7716	,7723	,7731	,7738	7745	,7752	,7760	,7767	7774
6.0	,7782	,7789	,7796	,7803	7810	,7818	,7825	,7832	,7839	,7846
6.1	7853	7860	,7868	7875	,7882	,7889	,7896	7903	,7910	7917
6.2	,7924	7931	,7938	,7945	7952	,7959	,7966	,7973	7980	7987
6.3	7993	,8000	8007	,8014	8021	,8028	,8035	,8041	[redacted]	,8055
6.4	,8062	,8069	,8075	8082	8089	,8096	,8102	8109	,8116	8122
6.5	,8129	8136	,8142	8149	,8156	,8162	8169	,8176	,8182	8189
6.6	,8195	8202	,8209	,8215	,8222	,8228	,8235	,8241	,8248	,8254
6.7	,8261	,8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	,8331	8338	,8344	8351	,8357	8363	,8370	8376	,8382
6.9	,8388	,8395	8401	,8407	[redacted]	,8420	,8426	,8432	,8439	,8445
7.0	8451	8457	,8463	,8470	,8476	8482	,8488	,8494	,8500	[redacted]
7.1	,8513	,8519	,8525	,8531	,8537	,8543	,8549	,8555	8561	8567
7.2	8573	,8579	[redacted]	,8591	,8597	,8603	,8609	,8615	8621	,8627
7.3	,8633	8639	8645	,8651	[redacted]	,8663	,8669	,8675	,8681	8686
7.4	8692	,8698	,8704	,8710	8716	,8722	,8727	,8733	,8739	,8745
7.5	,8751	8756	8762	8768	,8774	,8779	8785	8791	8797	8802
7.6	[redacted]	8814	8820	8825	,8831	,8837	,8842	[redacted]	[redacted]	,8859
7.7	[redacted]	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	,8921	,8927	8932	[redacted]	8943	[redacted]	8954	[redacted]	[redacted]	8971
7.9	,8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	[redacted]	,9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	[redacted]	,9096	9101	9106	,9112	9117	9122	[redacted]	,9133
8.2	9138	9143	9149	,9154	,9159	,9165	9170	,9175	9180	,9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	,9238
8.4	9243	9248	,9253	9258	,9263	,9269	9274	9279	[redacted]	,9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	,9355	,9360	[redacted]	,9370	,9375	9380	,9385	,9390
8.7	9395	,9400	,9405	,9410	9415	,9420	,9425	,9430	,9435	,9440
8.8	,9445	9450	,9455	[redacted]	[redacted]	,9469	,9474	9479	9484	,9489
8.9	,9494	[redacted]	,9504	,9509	9513	,9518	,9523	,9528	,9533	,9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	,9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	,9614	9619	9624	,9628	,9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	,9661	9666	9671	,9675	,9680
9.3	9685	[redacted]	,9694	9699	,9703	,9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	,9736	,9741	9745	9750	,9754	,9759	9763	9768	9773
9.5	,9777	9782	9786	9791	[redacted]	[redacted]	,9805	9809	9814	,9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	,9845	9850	9854	9859	,9863
9.7	9868	,9872	9877	,9881	9886	,9890	9894	9899	,9903	[redacted]
9.8	,9912	9917	9921	9926	9930	,9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	,9961	9965	,9969	9974	,9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLA III. LOGARITMOS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Grados	Log_{10} Sen	Log_{10} Tan	Log_{10} Cot	Log_{10} Cos	
0° 00'					90 00'
10'	4637 - 3	4637—3	2 5363	0000	50'
20'	7648—3	7648—3	2 2352	0000	40'
30'	9408—3	9409 3	2 0591	0000	30'
40'	0658—2	0658—2	1 9342	0000	20'
50'	1627 2	1627—2	1 8373	0000	10'
1° 00'	.2419—2	2419 2	1 7581	9999—1	89 00'
10'	3088—2	3089—2	1 6911	9999 -1	50'
20'	3668—2	3669—2	1 6331	9999—1	40'
30'	.4179—2	.4181—2	1 5819	9999—1	30'
40'	4637 —2	.4638 -2	1 5362	9998—1	20
50'	5050—2	.5053—2	1 4947	9998—1	10'
2° 00'	5428—2	5431—2	1 4569	9997—1	88 00'
10'	5776—2	5779—2	1 4221	9997—1	50'
20'	.6097—2	6101—2	1 3899	9996—1	40'
30'	6397—2	6401—2	1 3599	9996—1	30'
40'	6677—2	6682—2	1 3318	9995—1	20'
50'	.6940—2	6945—2	1 3055	9995—1	10'
3° 00'	.7188—2	7194—2	1,2806	9994—1	87 00'
10'	.7423—2	7429—2	1.2571	9993—1	50'
20'	.7645—2	7652 -2	1 2348	9993—1	40'
30'	7857—2	7865—2	1.2135	9992—1	30'
40'	.8059 -2	.8067—2	1.1933	9991—1	20'
50'	8251—2	8261—2	1.1739	9990—1	10'
4° 00	.8436—2	.8446—2	1.1554	9989—1	86° 00'
10'	.8613—2	8624—2	1.1376	9989—1	50'
20'	.8783—2	8795—2	1.1205	9988—1	40'
30'	8946—2	8960—2	1 1040	.9987 -1	30'
40'	.9104—2	9118—2	1.0882	9986—1	20
50'	.9256—2	.9272—2	1.0728	9985—1	10'
5° 00'	9403—2	9420—2	1 0580	9983—1	85° 00'
10'	9545—2	9563—2	1 0437	9982—1	50'
20'	9682—2	9701—2	1 0299	9981—1	40'
30'	9816—2	9836—2	1 0164	9980 1	30'
40'	9945—2	9966—2	1 0034	9979—1	20'
50'	0070—1	0093—1	[redacted]	9977—1	10'
6° 00'	.0192—1	.0216—1	9784	.9976—1	84° 00'
10'	0311—1	0336—1	[redacted]	9975—1	50'
20'	.0426 -1	0453—1	9547	9973—1	40'
30'	.0539—1	0567—1	9433	9972—1	30'
40'	,0648—1	0678—1	,9322	9971—1	20'
50'	.0755—1	.0786—1	9214	9969—1	10'
7° 00'	.0859—1	0891 -1	9109	9968—1	83 00'
10'	.0961—1	0995—1	9005	,9966—1	50'
20'	.1060 1	1096—1	.8904	9964—1	40'
30'	.1157—1	1194—1	8806	9963—1	30'
40'	.1252—1	1291—1	8709	,9961—1	20'
50'	1345—1	1385—1	.8615	.9959—1	10'
8° 00'	.1436—1	.1478—1	.8522	9958—1	82 00'
10'	.1525—1	1569—1	8431	9956—1	50
20	.1612—1	.1658—1	8342	9954—1	40'
30'	1697—1	.1745—1	.8255	9952—1	30'
40'	,1781—1	1831—1	8169	9950—1	20'
50'	.1863—1	1915—1	.[redacted]	9948—1	10'
9° 00'	.1943—1	1997—1	8003	9946—1	81° 00'
	Log_{10} Cos	Log_{10} Cot	Log_{10} Tan	Log_{10} Sen	Grados

TABLA III. LOGARITMOS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS *(continuación)*

Grados	$\log_{10}$ Sen	$\log_{10}$ Tan	$\log_{10}$ Cot	$\log_{10}$ Cos	
9°00'	1943—1	1997—1	,8003	,9946—1	81°00'
10'	2022—1	2078—1	,7922	9944—1	50'
20'	2100—1	2158—1	7842	,9942—1	40'
30	2176—1	,2236—1	,7764	9940—1	30'
40'	,2251—1	2313—1	,7687	9938—1	20'
50'	2324—1	2389—1	,7611	,9936—1	10'
10°00'	2397—1	2463—1	7537	9934—1	80°00'
10'	,2468—1	,2536—1	7464	9931—1	[redacted]
20'	,2538—1	2609—1	7391	9929—1	40'
30'	2606—1	2680—1	,7320	9927—1	30'
40'	2674—1	2750—1	7250	9924—1	20'
50'	,2740—1	2819—1	,7181	9922—1	10'
11°00'	2806—1	2887—1	,7113	9919—1	79°00'
10'	2870—1	2953—1	7047	9917—1	50'
20'	2934—1	3020—1	,6980	9914—1	40'
30'	2997—1	,3085—1	6915	9912—1	30'
40'	3058—1	,3149—1	6851	9909—1	20'
50'	3119—1	3212—1	,6788	9907—1	10'
12°00'	3179—1	3275—1	,6725	9904—1	78°00'
10'	3238—1	3336—1	6664	9901—1	50'
20'	3296—1	3397—1	6603	9899—1	40'
30'	3353—1	,3458—1	[redacted]	9896—1	30'
40'	3410—1	3517—1	,6483	9893—1	20'
50'	3466—1	3576—1	,6424	9890—1	10'
13°00'	3521—1	3634—1	6366	,9887—1	77°00'
10'	3576—1	3691—1	6309	9884—1	50'
20'	,3629—1	3748—1	6252	9881—1	40'
30'	3682—1	3804—1	6196	9878—1	30'
40'	3734—1	3859—1	6141	,9875—1	20'
50'	3786—1	,3914—1	6086	,9872—1	10'
14°00'	3837—1	3968—1	,6032	9869—1	76°00'
10'	3887—1	,4021—1	5979	9866—1	50'
20'	3937—1	4074—1	5926	9863—1	40'
30'	3986—1	,4127—1	5873	9859—1	30'
40'	4035—1	,4178—1	[redacted]	9856—1	20'
50'	4083—1	4230—1	5770	,9853—1	10'
15°00'	,4130—1	4281—1	5719	,9849—1	75°00'
10'	,4177—1	,4331—1	[redacted]	9846—1	50'
20'	4223—1	4381—1	[redacted]	,9843—1	40'
30'	4269—1	4430—1	5570	9839—1	30'
40'	4314—1	4479—1	5521	9836—1	20'
50'	4359—1	,4527—1	5473	9832—1	10'
16°00'	4403—1	,4575—1	,5425	9828—1	74°00'
10'	4447—1	4622—1	5378	9825—1	50'
20'	4491—1	,4669—1	5331	,9821—1	40'
30	4533—1	4716—1	5284	,9817—1	30'
40'	4576—1	,4762—1	5238	,9814—1	20'
50'	,4618—1	,4808—1	5192	,9810—1	10'
17°00'	4659—1	,4853—1	,5147	9806—1	73°00'
10'	4700—1	4898—1	5102	,9802—1	50'
20'	4741—1	,4943—1	,5057	9798—1	40'
30'	4781—1	4987—1	5013	,9794—1	30'
40'	4821—1	,5031—1	4969	9790—1	20'
50'	4861—1	5075—1	4925	,9786—1	10'
18°00	4900—1	5118—1	[redacted]	9782—1	72°00'
	$\log_{10}$ Cos	$\log_{10}$ Cot	$\log_{10}$ Tan	$\log_{10}$ Sen	Grados

TABLA III. LOGARITMOS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS *(continuación)*

Grados	Log_{10} Sen	Log_{10} Tan	Log_{10} Cot	Log_{10} Cos	
18° 00'	.4900—1	.5118—1	.4882	.9782—1	**72° 00'**
10'	.4939—1	.5161—1	.4839	.9778—1	50'
20'	.4977—1	.5203—1	.4797	.9774—1	40'
30'	.5015—1	.5245—1	.4755	.9770—1	30'
40'	.5052—1	.5287—1	.4713	.9765—1	20'
50'	.5090—1	.5329—1	.4671	.9761—1	10'
19° 00'	.5126—1	.5370—1	.4630	.9757—1	**71° 00'**
10'	.5163—1	.5411—1	.4589	.9752—1	50'
20'	.5199—1	.5451—1	.4549	.9748—1	40'
30'	.5235—1	.5491—1	.4509	.9743—1	30'
40'	.5270—1	.5531—1	.4469	.9739—1	20'
50'	.5306—1	.5571—1	.4429	.9734—1	10'
20° 00'	.5341—1	.5611—1	.4389	.9730—1	**70° 00'**
10'	.5375—1	.5650—1	.4350	.9725—1	50'
20'	.5409—1	.5689—1	.4311	.9721—1	40'
30'	.5443—1	.5727—1	.4273	.9716—1	30'
40'	.5477—1	.5766—1	.4234	.9711—1	20'
50'	.5510—1	.5804—1	.4196	.9706—1	10'
21° 00'	.5543—1	.5842—1	.4158	.9702—1	**69° 00'**
10'	.5576—1	.5879—1	.4121	.9697—1	50'
20'	.5609—1	.5917—1	.4083	.9692—1	40'
30'	.5641—1	.5954—1	.4046	.9687—1	30'
40'	.5673—1	.5991—1	[redacted]	.9682—1	20'
50'	.5704—1	.6028—1	.3972	.9677—1	10'
22° 00'	.5736—1	.6064—1	.3936	.9672—1	**68° 00'**
10'	.5767—1	.6100—1	.3900	.9667—1	50'
20'	.5798—1	.6136—1	.3864	.9661—1	40'
30'	.5828—1	.6172—1	.3828	.9656—1	30'
40'	.5859—1	.6208—1	.3792	.9651—1	20
50'	.5889—1	.6243—1	.3757	.9646—1	10
23° 00'	.5919—1	.6279—1	.3721	.9640—1	**67° 00'**
10'	.5948—1	.6314—1	[redacted]	.9635—1	50
20'	.5978—1	.6348—1	.3652	.9629—1	40'
30'	.6007—1	.6383—1	.3617	.9624—1	30'
40'	.6036—1	.6417—1	.3583	.9618—1	20'
50'	.6065—1	.6452—1	[redacted]	.9613—1	10'
24° 00'	.6093—1	.6486—1	.3514	.9607—1	**66° 00'**
10'	.6121—1	.6520—1	[redacted]	.9602—1	50
20'	.6149—1	.6553—1	.3447	.9596—1	40'
30'	.6177—1	.6587—1	.3413	.9590—1	30'
40'	.6205—1	.6620—1	.3380	.9584—1	20'
50'	.6232—1	.6654—1	.3346	.9579—1	10'
25° 00'	.6259—1	.6687—1	.3313	.9573—1	**65° 00'**
10'	.6286—1	.6720—1	.3280	.9567—1	50'
20'	.6313—1	.6752—1	.3248	.9561—1	40'
30'	.6340—1	.6785—1	.3215	.9555—1	30
40'	.6366—1	.6817—1	.3183	.9549—1	20'
50'	.6392—1	.6850—1	.3150	.9543—1	10'
26° 00'	.6418—1	.6882—1	.3118	.9537—1	**64° 00'**
10'	.6444—1	.6914—1	.3086	.9530—1	50'
20'	.6470—1	.6946—1	.3054	.9524—1	40'
30'	.6495—1	.6977—1	.3023	.9518—1	30'
40'	.6521—1	.7009—1	.2991	.9512—1	20'
50'	.6546—1	.7040—1	.2960	.9505—1	10'
27° 00'	.6570—1	.7072—1	.2928	.9499—1	**63° 00'**
	Log_{10} Cos	Log_{10} Cot	Log_{10} Tan	Log_{10} Sen	Grados

TABLA III. LOGARITMOS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS *(continuación)*

Grados	Log_{10} Sen	Log_{10} Tan	Log_{10} Cot	Log_{10} Cos	
27° 00′	.6570—1	.7072—1	.2928	.9499—1	**63° 00′**
10′	.6595—1	.7103—1	.2897	.9492—1	50′
20′	.6620—1	.7134—1	.2866	.9486—1	40′
30′	.6644—1	.7165—1	.2835	.9479—1	30′
40′	.6668—1	.7196—1	.2804	.9473—1	20′
50′	.6692—1	.7226—1	.2774	.9466—1	10′
28° 00′	.6716—1	.7257—1	.2743	.9459—1	**62° 00′**
10′	.6740—1	.7287—1	.2713	.9453—1	50′
20′	.6763—1	.7317—1	.2683	.9446—1	40′
30′	.6787—1	.7348—1	.2652	.9439—1	30′
40′	.6810—1	.7378—1	.2622	.9432—1	20′
50′	.6833—1	.7408—1	.2592	.9425—1	10′
29° 00′	.6856—1	.7438—1	.2562	.9418—1	**61° 00′**
10′	.6878—1	.7467—1	.2533	.9411—1	50′
20′	.6901—1	.7497—1	.2503	.9404—1	40′
30′	.6923—1	.7526—1	.2474	.9397—1	30′
40′	.6946—1	.7556—1	.2444	.9390—1	20′
50′	.6968—1	.7585—1	.2415	.9383—1	10′
30° 00′	.6990—1	.7614—1	.2386	.9375—1	**60° 00′**
10′	.7012—1	.7644—1	.2356	.9368—1	50′
20′	.7033—1	.7673—1	.2327	.9361—1	40′
30′	.7055—1	.7701—1	.2299	.9353—1	30′
40′	.7076—1	.7730—1	.2270	.9346—1	20′
50′	.7097—1	.7759—1	.2241	.9338—1	10′
31° 00′	.7118—1	.7788—1	.2212	.9331—1	**59° 00′**
10′	.7139—1	.7816—1	.2184	.9323—1	50′
20′	.7160—1	.7845—1	.2155	.9315—1	40′
30′	.7181—1	.7873—1	.2127	.9308—1	30′
40′	.7201—1	.7902—1	.2098	.9300—1	20′
50′	.7222—1	.7930—1	.2070	.9292—1	10′
32° 00′	.7242—1	.7958—1	.2042	.9284—1	**58° 00′**
10	.7262—1	.7986—1	.2014	.9276—1	50′
20′	.7282—1	.8014—1	.1986	.9268—1	40′
30′	.7302—1	.8042—1	.1958	.9260—1	30′
40′	.7322—1	.8070—1	.1930	.9252—1	20′
50′	.7342—1	.8097—1	.1903	.9244—1	10′
33° 00′	.7361—1	.8125—1	.1875	.9236—1	**57° 00′**
10′	.7380—1	.8153—1	.1847	.9228—1	50′
20′	.7400—1	.8180—1	.1820	.9219—1	40′
30′	.7419—1	.8208—1	.1792	.9211—1	30′
40′	.7438—1	.8235—1	.1765	.9203—1	20′
50′	.7457—1	.8263—1	.1737	.9194—1	10′
34° 00′	.7476—1	.8290—1	.1710	.9186—1	**56° 00′**
10′	.7494—1	.8317—1	.1683	.9177—1	50′
20′	.7513—1	.8344—1	.1656	.9169—1	40′
30′	.7531—1	.8371—1	.1629	.9160—1	30′
40′	.7550—1	.8398—1	.1602	.9151—1	20′
50′	.7568—1	.8425—1	.1575	.9142—1	10′
35° 00′	.7586—1	.8452—1	.1548	.9134—1	**55° 00′**
10′	.7604—1	.8479—1	.1521	.9125—1	50′
20′	.7622—1	.8506—1	.1494	.9116—1	40′
30′	.7640—1	.8533—1	.1467	.9107—1	30′
40′	.7657—1	.8559—1	.1441	.9098—1	20′
50′	.7675—1	.8586—1	.1414	.9089—1	10′
36° 00′	.7692—1	.8613—1	.1387	.9080—1	**54° 00′**
	Log_{10} Cos	Log_{10} Cot	Log_{10} Tan	Log_{10} Sen	Grados

TABLA III. LOGARITMOS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS *(continuación)*

Grados	Log_{10} Sen	Log_{10} Tan	Log_{10} Cot	Log_{10} Cos	
36° 00'	,7692—1	,8613—1	,1387	,9080—1	**54° 00'**
10'	7710—1	,8639—1	,1361	,9070—1	50'
20'	7727—1	,8666—1	,1334	,9061—1	40'
30'	7744—1	,8692—1	,1308	,9052—1	30'
40'	,7761—1	8718—1	,1282	,9042—1	20'
50'	,7778—1	,8745—1	,1255	,9033—1	10'
37° 00'	7795—1	,8771—1	1228	,9023—1	**53° 00'**
10'	,7811—1	,8797—1	,1203	,9014—1	50'
20'	7828—1	8824—1	,1176	,9004—1	40'
30'	,7844—1	,8850—1	,1150	,8995—1	30'
40'	,7861—1	,8876—1	,1124	,8985—1	20'
50'	,7877—1	,8902—1	,1098	,8975—1	10'
38° 00'	7893—1	,8928—1	,1072	,8965—1	**52° 00'**
10'	7910—1	8954—1	,1046	,8955—1	50'
20'	7926—1	,8980—1	1020	,8946—1	40'
30'	7941—1	,9006—1	0994	,8935—1	30'
40'	,7957—1	,9032—1	0968	,8925—1	20'
50'	7973—1	9058—1	0942	8915—1	10'
39° 00'	,7989—1	,9084—1	0916	,8905—1	**51° 00'**
10'	,8004—1	,9110—1	0890	,8895—1	50'
20'	,8020—1	,9135—1	0865	,8884—1	40'
30'	,8035—1	,9161—1	[redacted]	,8874—1	30'
40'	,8050—1	,9187—1	0813	,8864—1	20'
50'	8066—1	,9212—1	,0788	,8853—1	10'
40° 00'	8081—1	9238—1	0762	8843—1	**50° 00'**
10'	,8096—1	9264—1	,0736	8832—1	[redacted]
20'	,8111—1	9289—1	,0711	,8821—1	40'
30'	,8125—1	,9315—1	0685	,8810—1	30'
40'	,8140—1	,9341—1	0659	,8800—1	20'
50'	,8155—1	,9366—1	,0634	,8789—1	10'
41° 00'	,8169—1	,9392—1	,0608	,8778—1	**49° 00'**
10'	,8184—1	,9417—1	0583	,8767—1	50'
20'	,8198—1	,9443—1	,0557	,8756—1	40'
30'	,8213—1	,9468—1	,0532	,8745—1	30'
40'	,8227—1	,9494—1	,0506	,8733—1	20'
50'	,8241—1	,9519—1	,0481	,8722—1	10'
42° 00'	,8255—1	,9544—1	,0456	,8711—1	**48° 00'**
10'	,8269—1	,9570—1	,0430	,8699—1	50'
20'	,8283—1	,9595—1	,0405	,8688—1	40'
30'	,8297—1	,9621—1	,0379	,8676—1	30'
40'	,8311—1	,9646—1	,0354	,8665—1	20'
50'	,8324—1	,9671—1	,0329	,8653—1	10'
43° 00'	,8338—1	,9697—1	,0303	,8641—1	**47° 00'**
10'	,8351—1	9722—1	,0278	,8629—1	50'
20'	,8365—1	,9747—1	0253	,8618—1	40'
30'	,8378—1	,9772—1	,0228	,8606—1	30'
40'	,8391—1	,9798—1	,0202	,8594—1	20'
50'	,8405—1	,9823—1	0177	,8582—1	10'
44° 00'	,8418—1	,9848—1	,0152	,8569—1	**46° 00'**
10'	,8431—1	,9874—1	,0126	,8557—1	50'
20'	,8444—1	,9899—1	,0101	,8545—1	40'
30'	,8457—1	,9924—1	,0076	,8532—1	30'
40'	,8469—1	9949—1	,0051	8520—1	20'
50'	,8482—1	,9975—1	,0025	,8507—1	10'
45° 00'	,8495—1	[redacted]	,0000	,8495—1	**45° 00'**
	Log_{10} Cos	Log_{10} Cot	Log_{10} Tan	Log_{10} Sen	Grados

TABLA IV. POTENCIAS Y RAICES

N.°	Cuadrado	Raíz cuadrada	Cubo	Raíz cúbica	N.°	Cuadrado	Raíz Cuadrada	Cubo	Raíz cúbica
1	1	1,000	1	1 000	51	2 601	7 141	132,651	3.708
2	4	1,414	8	1,260	52	2 704	7,211	140 608	3.733
3	9	1,732	27	1,442	53	2 809	7,280	148 877	3.756
4	16	2,000	64	1 587	54	2 916	7,348	157 464	3.780
5	25	2 236	125	1,710	55	3 025	7.416	166 375	3.803
6	36	2,449	216	1,817	56	3 136	7 483	175 616	3.826
7	49	2,646	343	1,913	57	3 249	7 550	185 193	3 849
8	64	2,828	512	2,000	58	3 364	7 616	195 112	3.871
9	81	3,000	729	2,080	59	3 481	7 681	205.379	3.893
10	100	3,162	1,000	2,154	60	3 600	7 746	216 000	3.915
11	121	3,317	1 331	2,224	61	3 721	7 810	226 981	3.936
12	144	3.464	1 728	2,289	62	3 844	7.874	238 328	3.958
13	169	3,606	2 197	2,351	63	3 969	7 937	250 047	3 979
14	196	3,742	2 744	2,410	64	4 096	[redacted]	262 144	4,000
15	225	3.873	3 375	2,466	65	4 225	[redacted]	274 625	4.021
16	256	4.000	4 096	2 520	66	4 356	8.124	287 496	4,041
17	289	4 123	4 913	2,571	67	4 489	8 185	300 763	4.062
18	324	4,243	5 832	2.621	68	4 624	8 246	314 432	4.082
19	361	4.359	6 859	2 668	69	4 761	8.307	328 509	4.102
20	400	4,472	8 000	2.714	70	4 900	8.367	343 000	4 121
21	441	4.583	9 261	2,759	71	5 041	8.426	357 911	4 141
22	484	4,690	10 648	2.802	72	5.184	8.485	373 248	4,160
23	529	4 796	12 167	2 844	73	5 329	8.544	389 017	4,179
24	576	4,899	13 824	2,884	74	5 476	[redacted]	405 224	4,198
25	625	5.000	15 625	2.924	75	5 625	8.660	421 875	4,217
26	676	5.099	17 576	2,962	76	5,776	8.718	438 976	4.236
27	729	5,196	19 683	3,000	77	5 929	8,775	456 533	4,254
28	784	5.292	21 952	3,037	78	[redacted]	8.832	474 552	4 273
29	841	5.385	24 389	3,072	79	6 241	[redacted]	493 039	4,291
30	900	5.477	27 000	3.107	80	6 400	8 944	512 000	4 309
31	961	[redacted]	29 791	3.141	81	6 561	9 000	531 441	4 327
32	1 024	5,657	32 768	3.175	82	6 724	9.055	551 368	4,344
33	1 089	5,745	35 937	3,208	83	6 889	9.110	571 787	4.362
34	1 156	5.831	39 304	3,240	84	7 056	9.165	592 704	4.380
35	1 225	5,916	42 875	3.271	85	7 225	9,220	614 125	4 397
36	1 296	6.000	46 656	3,302	86	7 396	9.274	636 056	4 414
37	1 369	6,083	50 653	3.332	87	7 569	9.327	658 503	4 431
38	1 444	6,164	54 872	3.362	88	7 744	9 381	681 472	4.448
39	1 521	6.245	59 319	3 391	89	7 921	9.434	704 969	4,465
40	1 600	6.325	64 000	3.420	90	8 100	9.487	729 000	4.481
41	1 681	6,403	68 921	3 448	91	8 281	9 539	753 571	4 498
42	1 764	6,481	74 088	3.476	92	8.464	9 592	778 688	4.514
43	1 849	6.557	79 507	3.503	93	8 649	9.644	804 357	4.531
44	1 936	6.633	85 184	3,530	94	8 836	9.695	830 584	4.547
45	2 025	6.708	91 125	3.557	95	9 025	9 747	857 375	4,563
46	2 116	6,782	97 336	3.583	96	9 216	9,798	884 736	4,579
47	2 209	[redacted]	103 823	3,609	97	9 409	9 849	912 673	4 595
48	2 304	6,928	110 592	3,634	98	9 604	9,899	941 192	4,610
49	2 401	7,000	117 649	3.659	99	9 801	9 950	970 299	4 626
50	2 500	7,071	125 000	3.684	100	10 000	10.000	1 000 000	4,642

Respuestas

Sección 1.1

3 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$, $\{1/x | x$ es un número entero positivo menor que $10\}$.

5 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $\{x | x$ es múltiplo de 2 y es menor que $20\}$.

7 $\{x^2 | x$ es un número entero positivo menor que $6\}$.

9 $\{3x - 2 | x$ es un número entero positivo menor que $6\}$.

19 (a), (b), (c), (d) y (e) son equivalentes; (a), (b), (c) y (d) son iguales.

Sección 1.2

1 (a) Falsa. (b) Falsa. (c) Verdadera.
(d) Falsa. (e) Verdadera. (f) Falsa.
(g) Verdadera. (h) Verdadera. (i) Falsa.

3 $\{r\}$ y $\{r, s\}$.

5 (a) $\{a, b, c, d\}$.
(b) $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.
(c) $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$.
(d) $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$.
(e) $\emptyset$.

7 Uno, $A = \emptyset$.

9 (a) Verdadera. (b) Falsa. (c) Verdadera.
(d) Falsa. (e) Verdadera. (f) Falsa.
(g) Falsa. (h) Verdadera. (i) Falsa.
(j) Falsa.

11 (a) Sí. (b) Sí (c) No necesariamente.
(d) Sí. (e) Sí. (f) Sí.

15 (a) $\{6, 7, 8, 9\}$. (b) $\{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$.
(c) $\{0, 1, 2, 3, 8, 9\}$. (d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
(e) $\emptyset$. (f) U.

Sección 1.3

1 (a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (b) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (c) $\{6, 7\}$
(d) U (e) $\emptyset$ (f) $\{4, 5\}$
(g) A (h) $\emptyset$ (i) U
(j) D (k) $\{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$ (l) $\{0, 1, 2, 3, 8, 9\}$
(m) $\{6, 7, 8, 9\}$ (n) U (o) $\emptyset$

3 (a) $\{e\}$ (b) $\{i\}$ (c) $\emptyset$
(d) A (e) $\emptyset$ (f) E

5 (a) U (b) X (c) X

7 $X \cup X' = U$ y $X \cap X' = \emptyset$

11 (a) Verdadera (b) Falsa
(e) Falsa (f) Verdadera

13 $n(V) = 61$

15 $n(V) = 50$

17 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$.

19 (a) 2 (b) 3 (c) 6
(d) 4 (e) 9 (f) 6

21 $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

25 (a) Verdadera (b) Verdadera (c) Falsa
(d) Falsa (e) Falsa (f) Verdadera

Sección 2.1

1 (a) Axioma 4 (b) Axioma 2A
(e) Axioma 2M (f) Axioma 3M

3 (a) $10 + (8 + 20)$ por Axioma 2A; en seguida, aplíquese Axioma 3A.
(c) $3 \cdot (4 \cdot 10) + 3 \cdot 2$ por Axioma 4; en seguida, aplíquese Axioma 3M.
(e) $(40 + 30) \cdot 100 + (40 + 3) \cdot 2$ por Axioma 4, en seguida, aplíquese Axioma 4.
(g) $(3 \cdot 10) \cdot 20$ por Axioma 2M; en seguida, aplíquese Axioma 2M.

5 (a) Axiomas 4 y 5M.
(c) Axiomas 4 y 5M.

7 $(a \cdot b)^2 = (a \cdot b)(a \cdot b) = a \cdot (b \cdot (a \cdot b)) = a((a \cdot b) \cdot b) = a(a \cdot (b \cdot b)) = (a \cdot a)(b \cdot b) = a^2 \cdot b^2$; ¿cuáles axiomas se aplican en cada paso?

11 La unión de dos conjuntos es también un conjunto, la intersección de dos conjuntos es también un conjunto.

13 Los axiomas de conmutatividad corresponden a $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$ para conjuntos cualesquiera A y B. Los axiomas de asociatividad corresponden a $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ para conjuntos cualesquiera A, B y C.

Sección 2.2

1 $A \cup \phi = A$ y $\phi \cup A = A$, para todo conjunto A.

2 Véase la demostración de $(-a)b = -(ab)$ en Teorema 2.3.

7 Háganse $c = -1$ en el problema 6.

9 Si $a + u = 0$, entonces $-a + (a + u) = -a + 0$, de modo que $(-a + a) + u = -a$ por los Axiomas 2A y 5A. Así, $0 + u = -a$ por Axioma 6A y $u = -a$ por Axioma 5A.

Sección 2.3

1 $(-n)\cdot(-m) = nm$ por Teorema 2.3, de modo que, si n y m son positivos, entonces $(-n)\cdot(-m)$ es positivo.

3 $n\cdot 0 = 0$ por Teorema 2.2 y 0 es un entero.

5 $(-n) + (-m) = -(n + m)$ por Teorema 2.4 y $n + m$ es positivo

7 $15 = 3\cdot 5$. Los divisores positivos de 15 son 1; 3; 5 y 15.

9 $K \cap J = \{1, 2, 4, 8, 16\}$. El máximo común divisor es 16.

11 Véase el ejemplo ilustrativo 2 en la presente sección

15 Si $n = 2r$ y $m = 2s$, entonces $n\cdot m = (2r)(2s) = 2(r(2s))$ por Axioma 2A. Así, $n\cdot m = 2t$ donde $t = r(2s)$, que es el producto de dos enteros.

17 Axioma 5M. ¿Por qué?

19 Si $x = 2r + 1$ e $y = 2s + 1$, entonces

$$\begin{aligned} xy &= (2r + 1)\cdot(2s + 1) = 2r(2s + 1) + (2s + 1) \text{ por Axioma 4} \\ &= \big(2(r(2s + 1)) + 2s\big) + 1 \text{ por Axioma 2A y 2M} \\ &= 2\big(r(2s + 1) + s\big) + 1, \text{ de modo que } xy = 2u + 1 \end{aligned}$$

donde u es el entero $r(2s + 1) + s$.

21 Si x es un entero positivo, también lo es x^2. Si x es el negativo $-n$ de un entero n, entonces $x^2 = (-n)\cdot(-n) = n^2$ que es un entero positivo. Si $x = 0$, entonces $x^2 = 0$.

Sección 2.4

1 *Indicación:* Si $a = -a$, entonces $a + a = 0$; en seguida apliquese Axioma 4.

7 Si $a(bc) = 0$, entonces $a = 0$ ó $bc = 0$ por Teorema 2.6; en seguida, vuelvase a utilizar el Teorema 2.6.

11 Si $(a + c)/(b + c) = a/b$, entonces $(a + c)b = a(b + c)$ por Teorema 2.19, de modo que $ab + cb = ab + ac$ por Axioma 4 y $cb = ac$ por la ley de cancelación para la adición. Por tanto, $c = 0$ ó $a = b$ por la ley de cancelación para la multiplicación.

Sección 2.5

1 (a) 3/5 (b) 29/4
(c) $-1473/100$ (d) $-22/7$

3 (a) 5 (b) 1
(c) 12 (d) 3/2

5 *Indicación:* Dos decimales exactos pueden expresarse con un mismo denominador, el cual es una potencia de 10.

13 Muéstrese que si n es divisible por 3, entonces n^2 es divisible por 3, pero si n deja 1 ó 2 como residuo al ser dividido por 3; entonces n^2 no es divisible por 3.

Sección 3.1

1 $3a + b - 1,\ a + 5b - 7$

3 $6x + 6y - z,\ 2x + 3z$

5 $-8x - 11y,\ 12x - y$

7 $-2x - 4y$

9 $-6x - 9y - 4$

11 $16x - 3y - 9$

13 $13x - 10y$

15 $a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$

17 $4x^2 - (4y^2 + 4y + 1)$

19 $(c - a)x,\ -(a - c)x$

21 $(a + b)x,\ -(-a - b)x$

23 7

25 17

27 5

29 35

31 2

33 -4

35 a^2

37 $-a^3$

39 $2(a^3 - a)$

Sección 3.2

1 a^9

3 $3x^{12}$

5 y^{24}

7 a^{20}

9 $125c^3$

11 $32a^{15}$

13 $a^{(r+s)t}$

15 $2^n x^{n^2}$

17 $2x^2 + x - 15$

19 $16x^2 - 4y^2$

21 $r^3 - r^2s - rs^2 + s^3$

23 $x^3 + y^3$

25 $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x - 12y + 9$

27 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

29 $a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3$

31 $2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 6x + 8$

33 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

35 $x^6 - 8y^6$

37 $a^{2n+1} - a^{2n} - 7a^{n+1} + 7a^n + 10a - 10$

39 $x^{4n} - 2x^{2n}y^{2n} + y^{4n}$

41 $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

43 $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$

45 $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

Sección 3.3(1)

1 $3y^2 - 2x^2$

3 $2x^2/y - 3x^3$

5 $3x - 4y + 6x^2y^2$

7 $x^2 - 7x + 10 \equiv (x - 2)(x - 5)$

9 $3x^2 - 13x + 4 \equiv (3x - 1)(x - 4)$

11 $2x^3 - 7x^2 + 11x - 4 \equiv (x^2 - 3x + 4)(2x - 1)$

13 $x^2y - 6x^3 - 12xy^2 - 6y^3 \equiv (-3x^2 - 4xy - 12y^2)(2x - 3y) - 42y^3$

15 $4x^3 + 5 + 4x^2 - 13x \equiv (2x^2 - 3x + 1)(2x + 5)$

17 $5x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \equiv (5x + 8)(x^2 - 2x + 1) + (14x - 12)$

19 $x^6 - y^6 \equiv (x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)(x - y)$

Sección 3.3(2)

1 $Q = 3x + 7,\ R = 17$

3 $Q = x^2 - 4x + 8,\ R = -7$

5 (a) $Q = x^3 - 3x - 10,\ R = -28$
(b) $Q = x^3 - 3x^2 - 4,\ R = -4$

7 (a) $Q = 3x^3 + 6x^2 + 12x + 17,\ R = 14$
(b) $Q = 3x^3 - 6x^2 + 12x - 31,\ R = 42$

9 $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \equiv (x^2 + x + 6)(x - 3) + 14$

11 $x^4 - 5x^3 + x^2 - 6 \equiv (x^3 - 4x^2 - 3x - 3)(x - 1) - 9$

13 14

15 -9

Sección 3.4

1 $6ax - 8ay$

3 $-21x^3y - 28xy^2$

5 $4x^2 - 9y^2$

7 $x^4 - 16y^4$

9 $4x^2 + 28xy + 49y^2$

11 $x^2 - 7x + 10$

13 $x^2y^4 - 2xy^2z^2w + z^4w^2$

15 $28x^2 - 9xy - 9y^2$

17 $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 9$

19 $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 4yz$

21 $x^3 + 8$

23 $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4z^2 + 16zw - 16w^2$

25 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$

27 $4(x + 2y)^2 + 2(x + 2y) - 12$

29 $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

Sección 3.5(1)

1 $4(x-5)$

3 $3y(y-3)$

5 $xyz^2(yz-3x+5y^2)$

7 $(2x+5)(3y-4x)$

9 $2z(x+3y)(z-3x)$

11 $(3-a)(3+a)$

13 $(15a^4-8b)(15a^4+8b)$

15 $x(xy^2-5d^3)xy^2+5d^3)$

17 $(x+2y-z)(x+2y+z)$

19 $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$

21 $[9(4x-3y)+5(3z+w)][9(4x-3y)-5(3z+w)]$

23 $(x-4)^2$

25 $(3xy+11)^2$

27 $5(z-3w)^2$

29 $(7-x)^2$

31 $(a-2)(a^2+2a+4)$

33 $(2x^{2n}+3y^m)(4x^{4n}-6x^{2n}y^m+9y^{2m})$

35 $(x-5y)(19x^2-10xy+7y^2)$

37 $(x-4)(x-3)$

39 $(ab-5)(ab+4)$

41 $(7x-2)(5x-2)$

43 $(3a-4)(2a+5)$

45 $(x+y-5)(x+y-2)$

47 $(4x+2y-5)(2x+y+2)$

49 $2(2a+2b+c+d)(3a+3b-5c-5d)$

Sección 3.5(2)

1 $(a+b)(x-y)$

3 $(x-2)(x^2+4)$

5 $(a-3)(2-b^2)$

7 $(x-1+y)(x-1-y)$

9 $(2x+y-2)(2x-y+2)$

11 $(x+y+z-w)(x+y-z+w)$

13 $(x+2y-3)(x+2y+2)$

15 $(x^2-xy-3y^2)(x^2+xy-3y^2)$

17 $(a^2-2ab+3b^2)(a^2+2ab+3b^2)$

19 $(b^2+2bc+5c^2)(b^2-2bc+5c^2)$

21 $(x-2y)(3a+4b+c)$

23 $(z^3-2)(z+4)$

25 $(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

27 $(x-z)(x+2y+z)$

29 $3(z-x)(x+2y+z)$

Sección 3.6

1 $\dfrac{4}{9}$

3 $\dfrac{a^2x^2}{y^2}$

5 $\dfrac{a}{x+y}$

7 $\dfrac{x+1}{x}$

9 $\dfrac{x+4}{x-4}$

11 $\dfrac{y+2}{y+5}$

13 $\dfrac{3a+1}{2a-1}$

15 $\dfrac{2(3-x)}{x+5}$

17 $\dfrac{x+6}{x^2+6x+36}$

19 $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$

21 $\dfrac{1}{3-a}$

23 $x-4$

Sección 3.7

1 $\dfrac{6}{5}$

3 $\dfrac{(3x-4y)(3x+4y)}{12xy}$

5 $\dfrac{23-2x}{18}$

7 $\dfrac{2x^2-y^2}{x-y}$

9 $\dfrac{x-y}{5x-3}$

11 $\dfrac{5yz-4xz+3xy}{xyz}$

13 $\dfrac{5(1-x)}{3(x-4)}$

15 $\dfrac{2x^2-9x-9}{(2x-3)(x-5)(x-6)}$

17 $\dfrac{4a^2+9a+29}{a^3-27}$

19 $-\dfrac{5}{(x+2)(x+3)}$

21 $\dfrac{8y^4-28y^3+21y^2+27y-35}{(2y-3)^2(y+1)}$

23 $\dfrac{xz-x^2+xy-y^2+yz-z^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$

Sección 3.8(1)

1 $\frac{20}{21}$

3 $\frac{1}{6}$

5 $\frac{3}{10}$

7 $\dfrac{15x}{4y}$

9 $\dfrac{40x^3}{81}$

11 $\dfrac{x}{x^2+xy+y^2}$

13 $\dfrac{1}{x+3}$

15 $\dfrac{x+1}{(x+4)(x+5)}$

17 $\dfrac{x+2}{6(x-2)}$

19 y

21 1

23 $-\dfrac{2+3x}{x^2(x+1)}$

Sección 3.8(2)

1 $-\dfrac{57}{5}$

3 $\dfrac{x}{z}$

5 $\dfrac{2y+5x}{2y-5x}$

7 $x-1$

9 $(3x + 2y)(y - 2x)$

11 $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2 - x}$

Sección 3-9

1 8

3 $\dfrac{3y^4}{x^2}$

5 $\dfrac{2x^5}{3y^5}$

7 $\dfrac{cd(a + b)}{ab}$

9 $\dfrac{(a + b)^2}{ab}$

11 $x^{nm}y^{2m}$

Sección 3-10

1 5

3 $\frac{4}{7}$

5 $\frac{16}{9}$

7 $\frac{1}{64}$

9 81

11 $\sqrt[20]{x}$

13 $\sqrt[20]{x}$

15 $\sqrt[20]{x}$

17 $\dfrac{1}{64xy^5}$

19 $\dfrac{5x^2}{3y}$

21 $a + 2\sqrt{ab} + b$

23 $x + y$

25 $x^2 + \dfrac{2x}{y} + \dfrac{1}{y^2}$

27 $\dfrac{a^{7/2} + 2\sqrt{a} - a}{a^2}$

29 $|x - 1| + |x + 1|$

Sección 3-11

1 $2\sqrt{2}$

3 $\frac{5}{2}$

5 $-5\sqrt[3]{5}$

7 $3xy^2\sqrt{3xy}$

9 $3zx^2y\sqrt[3]{3zy^2}$

11 $5\sqrt{35}/21$

13 $b\sqrt{a^2 + c^2}$

15 $\sqrt{3xy}/y^2$

17 $\sqrt[3]{12}/4$

19 $3x\sqrt[3]{4xy}/2y$

21 $(x + 3)\sqrt{x}/x$

23 $xy\sqrt[4]{27x^3y^2}/9$

25 $\sqrt{5}$

27 $\sqrt[3]{45x}/3x$

29 $x\sqrt{13xz}/y$

Sección 3-12

1 $4\sqrt{3}$

3 $11\sqrt{2}$

5 $-\sqrt{2}/2$

7 $14\sqrt{3}$

9 $10\sqrt{2}$

11 $\left(a + 3b + \frac{1}{ab}\right)\sqrt[3]{ab}$

13 $-\sqrt{x+y}$

15 $(ac^2 + b^3c + a^4b^2)\sqrt{abc}$

17 $32\sqrt{3}/3$

19 5, 2

Sección 3-13

1 $\sqrt{65}$

3 $2\sqrt[3]{13}$

5 $(x - y)\sqrt{x + y}$

7 $(x + y)\sqrt{x^2 - xy + y^2}$

9 $2\sqrt[3]{3}$

11 $2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

13 -2

15 $-13 - \sqrt{15}$

17 $(3 - \sqrt{5})/2$

19 $\frac{8}{3}$

21 $\sqrt[3]{9}/3$

23 $\sqrt[4]{3a^2b^2}/b$

25 $\sqrt{15}/10$

27 $\sqrt[3]{4}$

29 $\dfrac{x^2\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2}$

31 $(5\sqrt{7} + 5\sqrt{3})/4$

33 $\dfrac{x^2 - x\sqrt{y}}{x^2 - y}$

35 $-(57 + 13\sqrt{21})/12$

37 $\dfrac{x^2(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x + 3})}{x^2 - x - 4}$

39 $\dfrac{2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - 9} - 9}{9}$

41 $\dfrac{x^2 + x + 2\sqrt{x}\sqrt{x^2 - 1} - 1}{1 + x - x^2}$

43 $2(4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})/5$

45 $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30})/12$

47 3,134

49 1,094

PROBLEMAS DE REPASO

Capítulos 1-3

1 (c)

3 (c)

5 (e)

7 No

9 Sí

11 Sí

13 Sí

15 $\dfrac{(2 - x^2)}{(1 - x^2)^{3/2}}$

17 No

19 $3/2 - 10\sqrt{2}$

21 $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{32 - x^2}}$

25 1

Sección 4.1

7 *Indicación:* Utilícese Teorema 4.7.

11 *Indicación:* Procédase como en el problema 8.

13 *Indicación:* Considérense por separado los casos $a > b \geq 0$, $a > 0 > b$, $0 \geq a > b$.

17 *Indicación:* Utilícese Teorema 4.8.

19 *Indicación:* Debemos demostrar que $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} > \frac{a}{2} + \frac{b}{2} > \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$. ¿Por qué?

Sección 4.2

1 $-6{,}5$, -5, -1, 0, $0{,}333$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{4}$, $2{,}3$, 2^3

5 (0), (-1), (1), $\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

7 (a) ± 2 (b) $\pm\sqrt{5}$ (c) ± 3
(d) $\pm\frac{1}{4}$ (e) $7, -3$ (f) 4
(g) $9, -3$ (h) $6, -4$ (i) $6, -2$
(j) Ninguno (k) Ninguno (l) $8, 2$

15 (a) Verdadero (b) Verdadero

17 Dos

Sección 4.3

3 (a) $(3, 2)$ (b) $(-4, 6)$ (c) $(5, 0)$

5 II, IV, III, I, II, IV

7 (a) $(8, 4)$, $(4, -4)$, $(-4, 4)$ (b) $(-1, 6)$, $(3, -2)$, $(-3, -4)$

11 (a) $(-1, \frac{7}{2})$ (b) $(\frac{11}{2}, -\frac{9}{2})$ (c) $(-1, 0)$

Sección 4.4

1 (a) $\sqrt{34}$ (b) $\sqrt{106}$
(c) $3\sqrt{2}/4$ (d) 13
(e) 8 (f) $\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2}$

3 (a) 13 (b) $2\sqrt{34}$

9 $h = 6$

15 $(2\sqrt{3}, -1 - 4\sqrt{3})$ ó $(-2\sqrt{3}, -1 + 4\sqrt{3})$

17 $(\pm a\sqrt{2}/2, 0)$ y $(0, \pm a\sqrt{2}/2)$

19 $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$

Sección 4.5

1 (a) $(x-3)^2+(y-1)^2=25$
(b) $(x-4)^2+(y+2)^2=9$
(c) $(x+1)^2+(y-3)^2=9$
(d) $(x-2)^2+(y+4)^2=25$

3 $x^2+y^2=r^2$

5 (a) Todos los puntos del plano.
(b) Todos los puntos que estan sobre o entre las circunferencias con centros en $(2,-7)$ y radios 1 y 3.

Sección 4.6

1 (a) sup -3, no hay inf
(b) no hay sup ni inf
(c) sup 0, inf -3
(d) sup 1, inf 0

Sección 4.7

1 $4r\sqrt{2}$

3 2π, $\pi/2$, $\pi/3$

Sección 5.1(1)

1 (a) Dominio, todos los números reales; recorrido, todos los números reales.
(b) Dominio, todos los reales no negativos; recorrido, todos los reales no negativos.
(c) Dominio, todos los números reales; recorrido, todos los reales no negativos.
(d) Dominio, todos los reales entre 2 y -2 inclusive; recorrido, todos los reales entre 0 y 2 inclusive.
(e) Dominio, todos los reales mayores que o iguales a 1 o menores que o iguales a -1; recorrido, todos los reales no negativos.
(f) Dominio, todos los reales excepto 1, recorrido, todos los reales excepto -1.
(g) Dominio, todos los reales excepto 1 y -1; recorrido, todos los reales excepto los que son iguales a -1 ó 0, que están entre ellos.
(h) Dominio, todos los reales; recorrido, todos los reales mayores que o iguales a -2.

3 (a) Dominio 1, 2, 3; recorrido 2, 3, 4.
(b) Dominio 1, 2; recorrido 2, 3, 4.
(c) Dominio R; recorrido R.
(d) Dominio R; recorrido R.
(e) Dominio, todos los reales menores que o iguales a 1; recorrido R.
(f) Dominio R; recorrido, todos los reales menores que o iguales a 1.
(g) Dominio, todos los reales entre -1 y 5 inclusive; recorrido, todos los reales entre 0 y 6 inclusive.
(h) Dominio R; recorrido R.
(i) Dominio R excepto 7; recorrido R excepto 3.
(j) Dominio, todos los reales entre -1 y 1 inclusive; recorrido, todos los reales entre -1 y 1 inclusive.

5 (a) Dominio, todos los reales; recorrido, todos los reales no negativos.
(b) Dominio, todos los reales, recorrido todos los reales mayores que o iguales a $-\frac{5}{4}$.

(c) Dominio, todos los números no negativos; recorrido, todos los reales; relación.

7 $0, 0, -2, 10$

9 $1, 2, 32, \frac{1}{32}$

11 $0, 1, 2, -2$

13 $6, -3, 4$

15 $A = \pi x^2, x \rightarrow \pi x^2$

17 $0, 15, 20, 15, 0$

19 $1, 0, -1, 0, 0, 1$

23 (a) 3, (b) $1/ax$

Sección 5.1(2)

1 $f + g : 5x - 1$; $fg : 6x^2 - 5x - 6$; dominio $f/g : (2x - 3)/(3x + 2$, todo $x \neq -\frac{2}{3}$; $f \circ g : 6x + 1$; $g \circ f : 6x - 7$

3 $f + g : -3x^2 - x + 4$; $fg : 9x^3 - 18x^2 + 8x$; $f/g : (4 - 3x)/(2x - 3x^2)$, $x \neq 0, \frac{2}{3}$; $f \circ g : 9x^2 - 6x + 4$; $g \circ f : -27x^2 + 66x - 40$

5 $f + g : x^3 + \sqrt{x}, x > 0; fg : x^3\sqrt{x}, x > 0; f/g : 1/x^{5/2}, x \neq 0; f \circ g : x\sqrt{x}, x > 0;$ $g \circ f : x\sqrt{x},\ x > 0$

7 $f(x) = 1 - x^2$

9 $g(x) = x^2 + 1$

11 $(f \circ g) \circ h : x^2; f \circ (g \circ h) : \backslash x^2$; sí

Sección 5.2

1 $-\frac{5}{2}$

3 0

5 $2, 5$

7 1

9 1

11 $0, \pm 1$

Sección 6.2

1 $+$

3 $+$

5 $+$

7 $-$

9 $+$

11 $+$

13 $+$

15 $-$

17 I o IV

19 III o IV

21 I o IV

23 IV

25 II

27 $\operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}; \cos \theta = \frac{3}{5}$

29 $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$; $\cos \theta = -\frac{4}{5}$

31 $\operatorname{sen} \theta = -\frac{15}{17}$; $\cos \theta = -\frac{8}{17}$

33 $\operatorname{sen} \theta = -1$; $\cos \theta = 0$

35 $\operatorname{sen} \theta = 0$; $\cos \theta = 1$

37 $\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5}$; $\tan \theta = \frac{3}{4}$

39 $\cos \theta = -\sqrt{5}/3$; $\tan \theta = -2/\sqrt{5}$

41 $\operatorname{sen} \theta = -\sqrt{11}/6$; $\tan \theta = -\sqrt{11}/5$

43 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$; $\tan \theta = \frac{3}{4}$

45 $\operatorname{sen} \theta = \pm 2/\sqrt{13}$; $\cos \theta = \pm 3/\sqrt{13}$

47 $\cos \theta = \pm\sqrt{95}/12$; $\tan \theta = \pm 7/\sqrt{95}$

49 $\operatorname{sen}\theta = -\frac{15}{17}$; $\cos\theta = -\frac{8}{17}$

51 $\operatorname{sen}\theta = -\frac{15}{17}$; $\cos\theta = -\frac{8}{17}$

53 $\operatorname{sen}\theta = -\frac{12}{13}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$

55 $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$

57 $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$; $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

Sección 6.3

1 Son los mismos.

3 (a) $\operatorname{sen}\theta = 0$; $\cos\theta = -1$
(b) $\operatorname{sen}\theta = -1$; $\cos\theta = 0$
(c) $\operatorname{sen}\theta = 1$; $\cos\theta = 0$
(d) $\operatorname{sen}\theta = 0$; $\cos\theta = 1$
(e) $\operatorname{sen}\theta = 0$; $\cos\theta = -1$
(f) $\operatorname{sen}\theta = 0$; $\cos\theta = 1$
(g) $\operatorname{sen}\theta = 1$, $\cos\theta = 0$
(h) $\operatorname{sen}\theta = 0$; $\cos\theta = 1$
(i) $\operatorname{sen}\theta = 0$; $\cos\theta = -1$

13 (a) $\sqrt{2}$, (b) 2

Sección 6.4

11 (a) 1, (b) 1

13 $-\sqrt{3}$

15 $\frac{5}{3} - \sqrt{3}$

17 -1

19 2

21 $\pi/6$, $5\pi/6$

23 $\pi/6$, $7\pi/6$

25 $3\pi/4$, $7\pi/4$

27 $\pi/4$, $3\pi/4$

29 $5\pi/6$, $11\pi/6$

31 (a) $-\sqrt{3}/2$ (b) $-1/\sqrt{3}$ (c) $-2\sqrt{3}$

33 (a) $-\sqrt{3}/2$ (b) $1/2$ (c) $-1/\sqrt{3}$

35 (a) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (b) 1 (c) 2

37 (a) verdadera (b) falsa

39 falsa

Sección 6.6

1 $1/\operatorname{sen}\theta$

3 $\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

5 $\pm \operatorname{sen}\theta/\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$

7 $1/\cos\theta$

9 $\pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$

11 $\pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}/\cos\theta$

13 $\operatorname{sen}\theta = \pm\tan\theta/\sqrt{1 + \tan^2\theta}$, $\cos\theta = \pm 1/\sqrt{1 + \tan^2\theta}$
$\cot\theta = 1/\tan\theta$, $\sec\theta = \pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}$, $\csc\theta = \pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}/\tan\theta$

15 $1/(1 - \cos^2\theta)$

Sección 6.9

1 $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$

3 $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \tan\frac{7\pi}{12} = -(2 + \sqrt{3})$

5 (a) $\frac{56}{65}$ (b) $-\frac{33}{65}$
(c) $-\frac{56}{33}$ (d) $-\frac{16}{65}$
(e) $\frac{63}{65}$ (f) $-\frac{16}{63}$

7 (a) II (b) IV

9 $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = -\frac{304}{425}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{297}{425}$

11 $\frac{\sqrt{3}\tan\theta + 1}{\sqrt{3} - \tan\theta}$

13 $\frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$

15 $\frac{2}{\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

17 $\frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\sqrt{2}}$

35 $13\operatorname{sen}(\theta + \theta_1)$, donde $\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{12}{13}$ y $\cos\theta_1 = \frac{5}{13}$

37 $5\operatorname{sen}(\theta + \theta_1)$, donde $\operatorname{sen}\theta_1 = -\frac{3}{5}$ y $\cos\theta_1 = \frac{4}{5}$

39 $\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

Sección 6.10

1 $-\operatorname{sen} 0{,}2793$

3 $-\operatorname{sen} 0{,}7156$

5 $-\cot 0{,}3665$

7 $\cos 0{,}0873$

9 $-\cot 0{,}2443$

11 $-\operatorname{sen} 0{,}4292$

13 $-\operatorname{sen} 0{,}7124$

15 $-\operatorname{sen} 0{,}2832$

27 π

Sección 6.11

3 $\operatorname{sen} 7\pi/12 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}/2$; $\cos 7\pi/12 = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}/2$; $\tan 7\pi/12 = -(2 + \sqrt{3})$

5 (a) $-\frac{120}{169}$ (b) $-\frac{119}{169}$ (c) $\frac{120}{119}$
(d) $3/\sqrt{13}$ (e) $2/\sqrt{13}$ (f) $\frac{3}{2}$

7 $\frac{3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$

Sección 6.12

1 $(\operatorname{sen} 8\theta - \operatorname{sen} 2\theta)/2$

3 $(\operatorname{sen} 12\theta - \operatorname{sen} 2\theta)/2$

5 $(\operatorname{sen} 7\theta + \operatorname{sen} 3\theta)/2$

7 $[\operatorname{sen}(3\theta/2) - \operatorname{sen}(2\theta)]/2$

9 $2\operatorname{sen}(\pi/6)\cos(\pi/18)$

11 $2\cos(\pi/2)\cos(5\pi/18)$

13 $2\operatorname{sen} 6\theta\cos 2\theta$

15 $2\cos(5\theta/4)\operatorname{sen}(5\theta/12)$

Sección 6.13

3 $11\pi/60 = \pi/12 + \pi/10$, $13\pi/60 = 5\pi/12 - \pi/5$, $7\pi/30 = \pi/3 - \pi/10$

5 (a) 0,4566 (b) 0,9261 (c) 2,2286
(d) 0,1679 (e) −0,9903 (f) 1,1571
(g) −0,9881 (h) −0,9528

PROBLEMAS DE REPASO

Capítulos 4-6

1 (c)

3 $(3^3 \cdot 13)/(2^4 \cdot 5^6)$

5 $216\sqrt[3]{12} - \frac{486}{5}\sqrt[3]{9} + \frac{144}{5}\sqrt[3]{4} - 26$

15 (e)

17 $\cos\theta/9$

19 0

21 $y = x\tan\theta - \dfrac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$

23 $-128\sqrt{2}\,\text{sen}^2\,\theta$

25 $a^6\,\text{sen}^4\,\theta\cos^2\theta$

29 $2(\sqrt{3} - 1)$

31 $\frac{1}{3}$

33 $-v/2\sqrt{9 - u^2}$

35 (a) $\frac{24}{25}$ (b) $-\frac{7}{25}$ (c) $\frac{44}{125}$

Sección 7.1

1 (a) $6 + 4i$, (b) $-2 + 6i$

3 (a) $\frac{3}{17} + \frac{22}{17}i$, (b) $\frac{3}{17} - \frac{22}{17}i$

5 $(a^2 - b^2) + 2abi$

7 $\dfrac{a + bi}{a^2 + b^2}$

13 $z = \frac{15}{2}i$

15 $z = -8 - 6i$

17 $z = \pm 2\sqrt{2}$

19 $z = -2$ ó $z = -3$

21 $z = -1$ ó $z = -i$

23 $z = 4i$ ó $z = 3i$

Sección 7.2

3 (a) 5 (b) 1 (c) $\sqrt{13}$ (d) 3

Sección 7.3

11 $(1, -6)$

13 $(-2, 2)$

15 $(2, 1)$

Sección 7.4

1 $\sqrt{13}$

3 2

5 1

7 $\sqrt{17}$

9 13

11 (a) $\sqrt{17}$, (b) $2\sqrt{2}$

13 $(4, -6)$

15 $(-6, 4)$

17 $(4, 4)$

19 $(6, -4)$

25 (a) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$ (b) $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ (c) $\left(\dfrac{-4}{\sqrt{241}}, \dfrac{-15}{\sqrt{241}}\right)$

(d) $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{13}}, \dfrac{-3}{\sqrt{13}}\right)$ (e) $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ (f) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

27 (a) No (b) Sí

29 (b) $c_1 = c_2 = \frac{1}{5}$ (c) $\mathbf{v} = -10\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$

Sección 8.1

1 -2

3 $\frac{5}{6}$

5 -3

7 -7

9 $\frac{11}{9}$

11 -5

13 $-\frac{16}{9}$

15 $\pi/3$, $2\pi/3$

17 0,3217, 3,4633

19 0,2195, 2,3985, 3,3611, 5,5401

21 $\dfrac{c}{a-b}$

23 $2A/h$

25 $\dfrac{l-a}{n-1}$

27 $\dfrac{Sr + a - S}{r}$

29 $\dfrac{2S - an}{n}$

31 $\dfrac{a \tan\theta_1}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$

41 18 años

43 \$45.000

45 $1\frac{4}{9}$ h

Sección 8.2

1 10, 13, 16; $t_9 = 25$, $S_9 = 117$

3 1, -2, -5; $t_{15} = -32$, $S_{15} = -165$

5 $t_{12} = 46$, $S_{12} = 288$

7 $d = \frac{48}{91}$, $t_{14} = \frac{34}{7}$

9 $t_1 = -\frac{31}{28}$, $t_{14} = \frac{151}{28}$

11 $n = 7$, $S_7 = 147$

13 8, 9, 10

15 187.026

17 2, 5, 8, 11

19 $-\frac{25}{2}$, -7, $-\frac{3}{2}$

21 (a) -4; (b) $\frac{17}{13}$

25 27 números; $S = 2835$

27 1092

29 490 m || 93.1

31 \$5075

Sección 8.3

1 Mínimo -4, cuando $x = -3$

3 Mínimo $-\frac{121}{8}$, cuando $x = -\frac{5}{4}$.

5 Mínimo $-\frac{169}{24}$, cuando $x = \frac{17}{12}$.

7 Mínimo 2, cuando $x = -3$.

9 8, 8

11 40 m, 40 m

Sección 8.4(1)

1 $-1, -5$

3 $\frac{3}{2}, 4$

5 $\frac{1}{3}, \frac{5}{2}$

7 Ninguna.

9 $\pm\frac{4}{3}$

11 $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$

13 $\frac{10}{3}, -\frac{3}{2}$

15 $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$

17 $-\frac{5}{3}, 2$

19 $\pi/3, \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/3$

21 $-a \pm b$

23 $\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$

25 $-\frac{1}{2}, -\frac{14}{3}$

Sección 8.4(2)

1 $\frac{3}{2}, -4$

3 $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

5 $0, \pi/3, 5\pi/3$

7 a, b

9 $1, \dfrac{c-a}{a-b}$

11 $3\pi/4, 7\pi/4$, 0,5880, 3,7295

13 $1, -5/4$

15 0,3142, 0,9425, 2,1991, 2,8275, 3,4558, 4,0841, 5,3407, 5,9691

17 $\dfrac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gs}}{g}$

19 -3

21 $\frac{3}{5}$ ó $\frac{6}{5}$

23 1

25 $\dfrac{-27 + \sqrt{909}}{2}$

Sección 8.5(1)

1 $x > 9$

3 $x < 7$

5 $x > 9$ ó $x < -11$

7 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$

9 $x > -1 + \sqrt{13}$ ó $x < -1 - \sqrt{13}$

11 No hay valores reales.

13 $x > 5$ ó $x < 0$

15 $3 < x < 5$

17 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{7}{2}$

19 $x \le -26$ ó $x \ge -22$

21 $\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$ ó $0 \le \theta < \frac{\pi}{4}$ ó $\frac{7\pi}{4} < \theta \le 2\pi$

23 $\pi < \theta < 2\pi$

25 $\frac{4\pi}{3} < \theta < 2\pi$

27 $0 \le \theta < \frac{7\pi}{6}$ ó $\frac{11\pi}{6} < \theta < 2\pi$

29 Todos los valores.

31 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$

Sección 8.6

1 Las sumas de los ceros son $-6, -1, -\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, \frac{17}{6}, \frac{5}{2}, -6$ y $\frac{5}{3}$ Los productos de los ceros son $5, -6, -6, \frac{15}{2}, \frac{5}{6}, -4, 11, \frac{4}{3}$.

3 $x^2 + x - 20 = 0$

5 $12x^2 + x - 6 = 0$

7 $x^2 - 4x + 1 = 0$

9 $8x^2 + 12x + 1 = 0$

11 $5x^2 - 8x - 4 = 0$

13 $2x^2 + 5x - 3 = 0$

15 $36x^2 + 24x - 5 = 0$

17 $6x^2 - 5x - 1 = 0$

19 $k = -1$

21 $k = 1$

23 $k = \frac{49}{12}$

25 $k = -5$

27 $k = 0$

29 Todos los valores de k.

31 $-8 < k < 8$

33 $k = \frac{27}{4}$

35 $k > \frac{3}{2}$ ó $k < -1$

Sección 8.7

1 $\pm 2, \pm\sqrt{7}$

3 $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}$

5 Raices reales: $-2, 1$

7 $-64, 8$

9 $5, 2, \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2}$

11 0, 0

13 $-\frac{23}{9}$

15 $5, -5/2, \frac{5 \pm \sqrt{57}}{4}$

Sección 8.8

1 $\frac{11}{2}$

3 7, 1

5 16

7 -5

9 6

11 2,09, 6,05 (aprox.)

13 $0, \pi/2$

15 $3\pi/4$, 5,99 (aprox.)

Sección 8.9

1 $z = \dfrac{kx}{y}$

3 $z = 6xy$

5 $C = kd$

7 $A = kx^2$

9 $y = 2x/3$

11 90

13 576π cm^2

15 72 ergs

17 2 m

19 Se multiplica por 16.

Sección 8.10

1 $x = 2,\ y = -1$

3 $x = 3,\ y = 5$

5 $x = \frac{2}{3},\ y = \frac{3}{2}$

7 $\alpha = \pi/6,\ 5\pi/6;\ \beta = 0$

9 $\alpha = \pi/6,\ 11\pi/6;\ \beta = \pi/6,\ 7\pi/6$

11 $x = 5,\ y = -2$

13 $x = \dfrac{a^3 + a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + b^2}$

$y = \dfrac{a^3 - a^2b + ab^2 + b^3}{a^2 + b^2}$

15 $x = \dfrac{a}{\tan k_2 - \tan k_1}$

$y = \dfrac{a \tan k_1}{\tan k_2 - \tan k_1}$

17 $x' = x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha$
$y' = y \cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha$

29 $\frac{37}{36}$

31 300 km/h, 20 km/h

33 12 h, 15 h

35 $(-1, 2), (2, 5), (3, -1)$

37 $(\frac{18}{7}, \frac{8}{7}), (\frac{30}{7}, \frac{4}{7}), (\frac{23}{7}, -\frac{10}{7}), (\frac{11}{7}, -\frac{6}{7})$

39 (a) $y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{11}{3}$ (b) $y = -\dfrac{3}{10}x + \dfrac{4}{5}$

Sección 8.11

1 $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

3 $x = 3,\ y = -1,\ z = 4$

5 $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{2}{3},\ z = \frac{1}{2}$

7 $x = 5,\ y = 6,\ z = 7$

9 $x = 3,\ y = 4,\ z = 6$

11 $\{(-1, 2, 3)\}$

13 10 de 5 cts, 10 de 10 cts y 5 de 25 cts

15 $x^2 + y^2 - x - 7y + 6 = 0$

17 $x = y + 2z - 1$

Sección 8.12

1 $x = 0{,}2 \quad y = 0{,}16$

3 No hay valores reales.

5 $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2},\ y = \dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$

7 $\{(2, 1), (-8/5), (-1/5)\}$

9 $\left\{\left(\frac{-2+2\sqrt{5}}{3}, 1+\sqrt{5}\right), \left(\frac{-2-2\sqrt{5}}{3}, 1-\sqrt{5}\right)\right\}$

11 $b = \pm a\sqrt{1+m^2}$

13 23, 32

15 7, 4

Sección 9.1

1 $a = 2,\ b = -1,\ c = 3$

3 $a = -1,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 2$

5 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} -4 & 7 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 2+3x & -1+3y & x+6 \\ 3 & y-3 & 11 \end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ✓

27 $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

29 No. Las matrices deben tener igual número de filas que de columnas.

Sección 9.2

1 $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix} 2 & 10 & 12 \\ -10 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

7 $[7]$

9 $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

19 Sí

21 Sí

Sección 9.3

1 $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$

3 No existe.

5 $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{16} \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

Sección 9.4

1 -2

3 3

5 1

11 $x = 1$

15 Reales, iguales, imaginarias.

17 (a) 2, 4 (b) 6, -7

Sección 9.5

1 $X = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

Sección 9.6

1 $x = 15$, $y = 4$, $z = 41$

3 5

5 0

17 (a) 5 (b) $\frac{29}{2}$

19 $3y + 4x = 17$

21 (a) $x = 2$ (b) $x =$ o $x = 2$

Sección 9.7

1 Tienen filas y columnas permutadas.

3 Dos columnas son idénticas.

Sección 9.8

1 -110

3 -484

5 0

Sección 9.9

3 $x = -4$, $y = -3$, $z = 2$, $w = 1$

7 $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$

PROBLEMAS DE REPASO

Capitulos 7.9

1 (a) positiva si $x < 0$ (b) negativa si $x > 0$ (c) cero si $x = 0$

3 (a) positiva si $x < 3$ (b) negativa si $3 < x < 9/2$ (c) cero si $x = 3$

5 (a) positiva si $x > 2$ ó $x < 0$ (b) negativa si $0 < x < 2$, $x \neq 1$
(c) cero si $x = 0, 1, 2$

7 No tiene solución real.

9 $w = \dfrac{y^{1/3}}{3x^{4/3}}(1 + x^2 y^{2/3})$

11 $\{(2, 1), (-2, 1)\}$

13 4 seg, 80 m

17 $0, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$

19 $\{(0, 2), (0, -2)\}$.

21 No únicos; una posibilidad: $A = 1$, $B = 27$, $C = 3$.

23 Sí, similar a i

25 (a) $(3, 2)$ (b) $(1, -6)$
(c) $(12, -2)$ (d) $(-2, 22)$

Sección 10.1(1)

1 $R = 17$ 3 $R = -7$

5 (a) -6, (b) 57 7 Sí

9 No 11 Sí

15 -23 17 -52

Sección 10.1(2)

1 2, simple, 3, dos, -4, tres.

3 -7, simple, $\frac{3}{2}$, tres.

5 $-\frac{4}{3}$, simple, 3, cuatro.

7 Cota superior 3, cota inferior -4.

9 Cota superior 3, cota inferior -2.

11 Cota superior 3, cota inferior -3.

13 Cota superior 2, cota inferior -1.

15 Cota superior 2, cota inferior -3.

Sección 10.2

5 2, doble; una entre 1 y 2; una entre -5 y 6.

7 Simple en -3; doble entre 0 y 1.

9 Una entre -2 y -3.

11 Una entre -1 y 0; una entre 0 y 1; una entre 3 y 4

13 Una entre -3 y -2.

15 Una entre -1 y 0 y entre 0 y 1.

Sección 10.4

1 $-2, 3, \frac{1}{2}$ 3 $1, 3, 5, 7$

5 $1, 2, 3, -5$ 7 $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

9 1, 1, 1, 1

11 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\sqrt{-1}$

13 1, 1, -2, 5

17 $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6, 3\pi/2$

19 $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi 6, 3\pi/4, 7\pi/4$

Sección 10.5

1 0,75

3 0,45

5 1,36, 1,69

7 $-0{,}62$, 1,62

9 1,817

11 1,189

13 Tres

15 Raíces de $x^3 - x^2 - 12x - 18 = 0$

17 $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$

19 $2x^3 + 19x^2 + 42x - 26 = 0$

21 $3x^3 - 17x^2 + 27x + 11 = 0$

23 $4, \pm 3i$

25 $2, 3 \pm \sqrt{2}i$

27 (a) 0,9549 (b) 0,8765 (c) 0,7957 (d) 0,4480
(e) 0,8183 (f) 0,7815 (g) $-0{,}8932$ (h) 0,1419

Sección 11.1

1 $y = 5x - 6$, dominio R; inversa $y = (x + 6)/5$, dominio R

3 $y = x^2 - 4x$, dominio $x > 2$, inversa $y = 2 + \sqrt{x + 4}$, dominio $x \geq -4$, dominio $x \geq 2$, inversa $y = 2 - \sqrt{x + 4}$, dominio $x \geq -4$.

5 $y = (x^2 - 1)/x^2$, dominio $x > 0$, inversa $y = 1/\sqrt{1 - x}$, dominio $x < 1$, dominio $x < 0$, inversa $y = 1/(-\sqrt{1 - x})$, dominio $x < 1$.

7 Depende de que n sea par o impar.

9 $y = \sqrt{x^2 - 4}$, dominio $x \geq 2$; inversa $y = \sqrt{x^2 + 4}$, dominio $x \geq 0$, dominio $x \leq -2$, inversa $y = -\sqrt{x^2 + 4}$, dominio $x \geq 0$.

11 $y = x/(x^2 - 1)$, dominio $x > 0$ y $x \neq 1$; inversa $y = (1 + \sqrt{1 + 4x^2})/2x$, dominio $x < 0$ y $x \neq -1$; inversa $y = (1 - \sqrt{1 + 4x^2})/2x$.

Sección 11.3

3 $\pm 2\pi/3 + 2n\pi$

5 $n\pi$

7 $\pm\pi/4 + 2n\pi$

9 $\pi/2$

11 $-\pi/2$

13 $(-1)^n(0{,}4189) + n\pi$

15 $\pm 0{,}8901 + 2n\pi$

17 1,4719

21 $\frac{1}{2}\arctan(y/3)$

23 $\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}(y/2)$

27 $\frac{1}{4}(4 + \cos 3y)$

29 $\tan(y + 2)$

31 $\dfrac{\cos(2y - \pi/12) - 1}{2}$

Sección 11.4

1 $\pm\frac{3}{5}$

3 $\pm\frac{12}{5}$

5 $\sqrt{11}/6$

7 u

9 $\pm\sqrt{1 - u^2}/u$

11 $\pi/7$

13 $\pi/18$

15 $2\pi/5$

17 0

19 $uv \pm \sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)}$

21 $\pm\frac{3}{5}$

23 1 ó $-\frac{7}{8}$

25 $-\frac{16}{65}$

27 $(24\sqrt{5} - 14)/75$

37 $2n\pi \pm (\pi/2 - \theta)$

39 $n\pi + \theta$

41 1

43 0

45 0

Sección 12.1

1 4

3 120

5 240

7 1920

9 60

11 (a) 56, (b) 64

Sección 12.2

1 504

3 585

5 (a) 5040 (b) 144

7 5040

9 103.680

11 1440

13 468.000

15 151.200

17 360

19 $n = 8$

Sección 12.3

1 (a) 35 (b) 45 (c) 210

3 12.650

5 84 456

7 9000

9 560

11 $384C(36, 6)$

13 (a) 36 (b) 84

15 126

17 (a) 28 (b) 56 (c) 247

19 $n = 7$

Sección 12.4

1 $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

3 $32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

5 $625x^4 - 500x^3y^2 + 150x^2y^4 - 20xy^6 + y^8$

7 $x^2 + 6x^{5/3}y^{1/3} + 15x^{4/3}y^{2/3} + 20xy + 15x^{2/3}y^{4/3} + 6x^{1/3}y^{5/3} + y^2$

9 $x^2 - \dfrac{15x^{8/5}}{y^2} + \dfrac{90x^{6/5}}{y^4} - \dfrac{270x^{4/5}}{y^6} + \dfrac{405x^{2/5}}{y^8} - \dfrac{243}{y^{10}}$

11 $\dfrac{x^{24}}{4096} + \dfrac{3x^{22}}{256y^2} + \dfrac{33x^{20}}{128y^4} + \dfrac{55x^{18}}{16y^6} + \cdots$

13 $x^{11/3} - \dfrac{11x^{10/3}}{y^{1/3}} + \dfrac{55x^3}{y^{2/3}} - \dfrac{165x^{8/3}}{y} + \cdots$

15 $1 + kx + \dfrac{k(k-1)}{2}x^2 + \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$

17 $59.136x^6y^6$

19 $\dfrac{35y^8}{\text{[illegible]}}$

21 $-414.720x^7$

23 $(7/2)x^5$

Sección 12.5

1 $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

3 $1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{5x^3}{16} + \cdots$

5 0,9803

7 1,005

9 5,745

11 4,932

13 $\frac{23}{4}, \frac{65}{32}, \frac{74}{15}$

PROBLEMAS DE REPASO

Capítulos 10-13

1 (a)

3 $-x^3 + 5x^2 - 3x + 15$

5 $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

7 (a) $y = 2x + 4$, función (b) $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 36x^2}}{2x}$, relación

9 (a) $y = x^2 + 5$, función (b) $y = \pm\sqrt{x^2}, x \geqslant 0$, relación

15 $1 = \dfrac{10}{x} + \dfrac{45}{x^2} - \dfrac{120}{x^3} + \dfrac{210}{x^4}$

Sección 14.2

1 64, 256, 1024; $t_n = 16.384$, $S_n = 21.845$

3 $-1, 5, -25;\ t_n = 125, S_7 = 13.021/125$

5 $t_n = 486, S_6 = 728$

7 $r = 3$, o -4; $t_n = 9$, o 16

9 $t_1 = \frac{36}{121};\ t_n = \frac{4}{1089}$

11 $n = 6;\ S = -126$

13 $t_1 = \frac{625}{16}, \frac{125}{8}, \frac{25}{4}$

15 $n = 9$

17 $\pm\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \pm 1$

19 $\pm\sqrt{ab}$

23 $\frac{1}{81}$ m, $17\frac{80}{81}$ m

25 $1583

27 La segunda

Sección 14.3

1 $\frac{3}{2}$

3 $\frac{64}{5}$

5 $4 + 2\sqrt{2}$

7 $\frac{10}{3}$

9 $\frac{2}{9}$

11 $\frac{64}{11}$

13 $r = \frac{1}{4}$

15 $16[2 + \sqrt{2}]$

17 60 m

Sección 14.4

1 $\log_3 27 = 3$

3 $\log_4 1 = 0$

5 $\log_8 16 = \frac{4}{3}$

7 $\log_{10} 0{,}001 = -3$

9 $\log_4 4 = 1$

11 $36^{1/2} = 6$

13 $x = 2$

15 $x = -1$

17 $u = 25$

19 $x = 14$

21 $a = \frac{27}{8}$

27 $\log_b \dfrac{a+2}{a-3}$

29 $\log_a \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$

31 $\log_a x^3(x-1)^6$

33 $4 \log_{10} 60{,}3$

35 $3 \log_{10} 54{,}3 + \log_{10} 67 - \log_{10} 93{,}9 - 2 \log 32{,}5$

Sección 14.5(1)

1 0,4099

3 0,8401

5 0,6730

7 0,8373

9 0,5153

11 0,8858

13 2,43

15 4,12

17 8,74

19 1,851

21 8,374

23 3,213

Sección 14.5(2)

1 Característica, 1; mantisa, 0,3782.

3 Característica, -3; mantisa, 0,5728.

5 Característica, 5; mantisa, 0,8723.

7 Característica, -4; mantisa, 0,2715.

9 2,5172

11 3,6747

13 $8{,}8623 - 10$

15 6650

17 267,2

19 0,003653

Sección 14.6

1 32000

3 34,6

5 158.800

7 0,5152

9 2,642

11 0,1313

13 8,52

15 0,923

Sección 14.7

(Todos los problemas resueltos con las tablas a cuatro decimales, al final del libro)

1 (a) \$295,80 (b) \$297,10
(c) \$297,10 [mayor que (b) si se usan tablas mas precisas]
(d) \$298.30

3 (a) 11,9 años (b) 11,55 años

5 $r = 0{,}3467$

7 (a) $-0{,}2746$ (b) 0,002

Sección 14.8

1 3,808

3 2,493

5 1,947

7 0,5824

9 $7{,}052 \times 10^{13}$

11 26,6

13 2,33

17 5

19 3,155

21 6,14

23 0,402

25 $\log_e(1 \pm \sqrt{2})$

27 $\frac{2}{11}$

29 $\frac{1}{297}$

Sección 15.1

1 Amp 5, período 1.

3 Amp 3, período 6.

5 Amp 1,5, período $4\pi/3$.

7 Amp 2, período 8π.

9 Amp 0,5, período $2\pi/3$.

11 Amp 100, período 200 (aprox.).

Sección 15.3

1 Amp 2, período 2π, desfasamiento $\pi/6$.

3 Amp 0,5, período π, desfasamiento $\pi/16$.

5 Amp 1, período 2π, desfasamiento 0,25.

7 Amp 1, período 2π, desfasamiento 1,176.

9 Amp 17, período 2π, desfasamiento 0,4900.

11 Amp $\sqrt{29}$, período 2π, desfasamiento 1,1903.

13 Período 2π.

15 Período 4π.

17 Período 2π.

Sección 15.4

1 La abscisa de P_x es $x = a \cos \omega t$.

3 Sí; período π.

5 $E = 8 \operatorname{sen} 120\pi t$

7 $y = 0{,}001 \operatorname{sen} 800\pi t$

Sección 15.5

1 Amp a

3 $A_0 = 80$, $A_1 = 9{,}5$, $A_2 = 1{,}44$, $\alpha_1 = 0{,}53$, $\alpha_2 = 2{,}16$

Sección 16.1

5 Problema 2: (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $-\frac{5}{8}$ (d) $-\frac{5}{6}$
(e) $\frac{2}{3}$ (f) $\frac{5}{4}$ (g) 2 (h) $-\frac{1}{3}$

Problema 3: (a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{2}{9}$
(e) $-\frac{3}{4}$ (f) $-\frac{5}{12}$ (g) $\frac{5}{24}$ (h) $-\frac{5}{2}$

7 (a) 0,4712 (b) 2,7285 (c) 0,8203
(d) 3,3080 (e) 4,4186 (f) −6,6116

9 (a) 47°41′ (b) 33°53′ (c) 51°
(d) 151° (e) 81°21′ (f) 85°17′
(g) 164°47′ (h) 42°22′ (i) 212°37′
(j) 206°12′ (k) 37°38′ (l) 4°26′

11 $\frac{3}{2}$ radianes, 85°57′.

13 120°, 30°, 172°30′, 108°30′

15 50 radianes.

Sección 16.2(1)

1 -1

3 $-\frac{1}{4}$

5 $30°, 150°$

7 $30°, 210°$

9 $135°, 315°$

11 $45°, 135°$

13 $150°, 330°$

15 (a) $\operatorname{sen} 2 = 0{,}9088 > \operatorname{sen} 2° = 0{,}00349$ (b) $\cos 4 = -0{,}6539 < \cos 4° = 0{,}9976$
(c) $\tan 1 = 1{,}5597 > \tan 1° = 0{,}0175$

17 (a) $-\operatorname{sen} 16°$ (b) $-\cos 33°$ (c) $-\operatorname{sen} 41°$ (d) $-\operatorname{sen} 16°$
(e) $-\cot 24°$ (f) $\cos 8°$ (g) $\cos 5°$ (h) $\operatorname{sen} 15°$

19 (a) 0,2476 (b) 1,3111 (c) 0,8760 (d) 0,8949
(e) 0,3872 (f) 0,3035 (g) 0,9026 (h) $-0{,}9465$

23 (a) $25°10'$ (b) $48°20'$ (c) $27°40'$ (d) $57°40'$
(e) $12°10'$ (f) $75°50'$ (g) $20°20'$ (h) $38°20'$

33 54,1

35 43.000

Sección 16.3

1 $\operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}$

3 $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}, \cos = -\frac{4}{5}$

5 $\operatorname{sen} \theta = -\frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17}$

7 $\operatorname{sen} \theta = -1, \cos \theta = 0$

9 $\operatorname{sen} \theta = 0, \cos \theta = 1$

11 (1) $\theta \approx 56°20'$, (2) $\theta \approx 126°50'$, (3) $\theta = 300°$, (4) $\theta \approx 236°20'$, (5) $\theta = 150°$, (6) $\theta = 135°$

13 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

15 $(0, -8)$

17 (a) $2(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$ (b) $2(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$
(c) $3(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$ (d) $\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°$
(e) $2\sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$ (f) $2\sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$
(g) $\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$ (h) $\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°$

19 (a) $6i$ (b) $-4\sqrt{3} - 4i$
(c) $12i$ (d) 8

21 (a) $\sqrt{3} + i$ (b) $-1 + \sqrt{3}i$

Sección 16.4

1 $64i$

3 $-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

5 $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

7 1

9 $-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i,\ 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

11 $1 + \sqrt{3}i,\ -2,\ 1 - \sqrt{3}i$

13 $\sqrt{3}+i,\ -1+\sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}-i,\ 1-\sqrt{3}i$

15 $(\cos 36^\circ + i \operatorname{sen} 36^\circ), (\cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ), \ldots$

17 $1, i, -1, -i$

19 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}\,i,\quad \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\,i,\quad -2,$

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\,i,\quad \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}\,i$

Sección 16.7

1 (a) $\beta = 52^\circ 40'$, $b = 319$, $c = 401$
(b) $\beta = 27^\circ 20'$, $a = 1540$, $c = 1730$
(c) $\alpha = 29^\circ 40'$, $\beta = 60^\circ 20'$, $c = 6{,}63$
(d) $\alpha = 44^\circ 40'$, $\beta = 45^\circ 20'$, $a = 67{,}6$
(e) $\alpha = 38^\circ 50'$, $a = 0{,}522$, $b = 0{,}648$
(f) $\beta = 52^\circ 20'$, $b = 71{,}0$, $c = 89{,}7$
(g) $\alpha = 33^\circ 30'$, $\beta = 56^\circ 30'$, $c = 68{,}7$
(h) $\alpha = 48^\circ 35'$, $a = 2448$, $b = 2160$
(i) $\alpha = 59^\circ 36'$, $\beta = 30^\circ 24'$, $b = 3185$
(j) $\alpha = 23^\circ 10'$, $\beta = 66^\circ 50'$, $c = 8{,}320$
(k) $\alpha = 27^\circ 3'$, $b = 1{,}619$, $a = 1{,}818$
(l) $\alpha = 42^\circ 37'$, $a = 66{,}74$, $c = 98{,}58$
(m) $\alpha\ 42^\circ 30'$, $\beta = 47^\circ 30'$, $a = 3274$
(n) $\beta = 65^\circ 13'$, $a = 147{,}0$, $c = 350{,}8$

3 313 m, $19^\circ 0'$

5 474 cm^2

7 57°

9 7,08 m, 7,08 m, 10,62 m

11 53,6 m

13 24,65 m

15 840 m

17 9,45 km de A, 10,65 km de B

19 1065 m sur, 1162 m oeste

21 (a) $v = 5$, $\theta = 53^\circ$
(b) $v = 50$, $\theta = 63^\circ$
(c) $v = 32{,}9$, $\theta = 119^\circ 30'$
(d) $v = 858{,}2$, $\theta = 296^\circ 27'$

23 56°, 7,3 m/seg

25 N $47^\circ 0'$ W

27 (a) $f = 43$, $\theta = 122^\circ$
(b) $f = 8250$, $\theta = 21^\circ 10'$
(c) $f = 3000$, $\theta = 255^\circ$

29 $t_1 = 210$, $t_2 = 273$

31 520 kg

Sección 16.9

1 (a) $\gamma = 38^\circ$, $b = 163$, $c = 102$;
(b) $\alpha = 40^\circ 26'$, $a = 36{,}27$, $b = 55{,}35$
(c) $\beta = 13^\circ 52'$, $a = 270.400$, $c = 321.000$
(d) $\alpha = 112^\circ 16'$, $a = 30{,}72$, $c = 26{,}56$

3 No

5 (a) $\alpha_1 = 91^\circ 50'$, $\gamma_1 = 49^\circ 30'$, $a_1 = 95{,}0$; $\alpha_2 = 10^\circ 50'$, $\gamma_2 = 130^\circ 30'$, $a_2 = 17{,}9$
(b) $\beta = 127^\circ 40'$, $\gamma = 7^\circ 10'$, $b = 55{,}0$
(c) $\alpha = 17^\circ 49'$, $\gamma = 14^\circ 24'$, $c = 11{,}96$
(d) $\alpha = 76^\circ 42'$, $\beta = 46^\circ 0'$, $a = 6{,}667$

7 (a) $\beta = 31^\circ 19'$, $\gamma = 96^\circ 23'$, $a = 28{,}35$
(b) $\alpha = 45^\circ 50'$, $\beta = 76^\circ 30'$, $c = 545$

9 (a) $\alpha = 41^\circ$, $\beta = 56^\circ$, $\gamma = 83^\circ$
(b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 63^\circ$, $\gamma = 87^\circ$

15 29,80 cm, 48,52 cm

17 150 km, 90 km

19 7,65 m

21 N 79°20′ W

23 252 km/h, S 63° E

PROBLEMAS DE REPASO

Capítulos 14-16

1 $1 - \frac{4^2}{5^6}$, $n = 7$

3 $\frac{7}{8}$

5 Proposición (c).

7 (a) \$9600
(b) \$9648
(c) ligeramente mayor que (b).
(d) ligeramente mayor que (c).

11 $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

15 $-1024i$

17 (a) 3
(b) 2

Indice de materias

Indice de materias

ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA

Apartado Postal 22.456, México 14060, D.F., Mexico
Apartado Aéreo 29896, Bogota, Colombia
Casilla 70060, Santiago 7, Chile
Apartado Postal 29853, Rio Piedras, Puerto Rico 00929
Martin de los Heros 59, Bis, 4, 28008, Madrid, España
7 Jacob Way, Reading, Massachusetts, E.U.A.

9 780201 080438
ISBN 0-201-08043-